ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 61. Вып. 1, 1997

УДК 531.36

© 1997 г. В.Ф. Журавлев

# НОВЫЙ АЛГОРИТМ НОРМАЛИЗАЦИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ПО БИРКГОФУ

**Существующие многомерные рекуррентные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем заменяются одномерным алгоритмом, т. е. вся процедура вычисления нормальной формы сводится к одной рекуррентной формуле. В основе достигнутого упрощения лежит отказ от использования рядов Тейлора по формальному параметру с заменой их кольцом асимптотик фиксированного порядка.**

Приведение систем обыкновенных дифференциальных уравнений к нормальной форме Пуанкаре в окрестности особой точки упрощается, если уравнения имеют гамильтонову форму, поскольку необходимым преобразованиям можно подвергать гамильтониан, а не саму систему. Определение нормальной формы гамильтониана и первый алгоритм приведения к ней предложил Биркгоф [1]. Впоследствии заметное усовершенствование алгоритма было достигнуто посредством перехода от производящей функции искомого канонического преобразования к производящему гамильтониану с использованием рядов Ли [2, 3]. Следующим шагом явилось формирование замкнутых рекуррентных алгоритмов, позволяющих написать программы аналитических вычислений на вычислительных машинах для проведения гамильтонианов к нормальной форме [4][1].

Применяемый ниже подход был ранее использован для упрощения алгоритмов нормализации дифференциальных систем по Пуанкаре и алгоритма метода Крылова – Боголюбова [5].

Рассматриваются гамильтоновы системы, описываемые автономным аналитическим гамильтонианом

$$H(q,p)=H_0(q,p)+H_*(q,p) \tag{1}$$

где $H_0(q,p)$ – квадратичная часть функции Гамильтона, определяющая линейную часть системы, а $H_*(q,p)$ – конечный или бесконечный полином, не содержащий членов ниже третьей степени. В теории квазилинейных систем гамильтониан $H_0(q,p)$ называется невозмущенным, или порождающим, а функция $H_*(q,p)$ называется возмущением.

При определении понятия "нормальная форма Биркгофа" и при приведении к ней обычно вместо исходных обобщенных координат $q$ и обобщенных импульсов $p$ используют их комплексные комбинации $x=p+iq$, $y=p-iq$. Эти соотношения можно рассматривать как каноническую замену переменных $(q,p)\to(x,y)$ с валентностью $2i$.

Сохраним для функций, зависящих от новых переменных, старые обозначения и будем считать также, что учет валентности тоже выполнен. Итак, будем исходить из записи гамильтониана, как функции переменных $x$ и $y$:

$$H(x,y)=H_0(x,y)+H_*(x,y) \tag{2}$$

[1] См. также *Маркеев А.П., Сокольский А.Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем: Препринт № 31, М.: Ин-т прикладной математики АН СССР. 1976. 61 с.

Известно, что линейной канонической заменой переменных квадратичную часть гамильтониана консервативной колебательной системы можно привести к простейшей форме, которая может быть записана так:

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(q_k^2 + p_k^2),\quad H_0(x,y) = i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k y_k$$

Можно поставить аналогичную задачу о приведении к простейшей форме возмущенной части гамильтониана $H_*(x, y)$. При этом преобразования переменных, решающие эту задачу, должны удовлетворять трем условиям: быть каноническими, не менять квадратичную часть гамильтониана, т. е. $H_0$, и, наконец, быть в классе полиномиальных функций. Последнее означает, что искомые замены переменных не должны иметь никаких особенностей в нуле.

Такая, не упрощаемая никакими полиномиальными заменами форма гамильтониана и называется нормальной формой Биркгофа (НФБ).

Общую структуру НФБ установить легко. Пусть в $H_*(x, y)$ необходимо устранить член

$$x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}y_1^{s_1}\ldots y_n^{s_n}$$

Это можно сделать посредством канонической замены $(x, y) \to (u, v)$ с производящей функцией $S(x, v)$ при наличии в ней точно такого же члена:

$$S = \sum_k x_k v_k + h x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n} v_1^{s_1}\ldots v_n^{s_n}$$

(здесь часть производящей функции $\sum\limits_k x_k v_k$ порождает тождественное преобразование).

При соответствующей замене

$$y = \frac{\partial S}{\partial x} = v + h\frac{\partial}{\partial x}(x^l v^s) = v + h\frac{\partial}{\partial u}(u^l v^s) + \ldots$$

$$u = \frac{\partial S}{\partial v} = x + h\frac{\partial}{\partial v}(x^l v^s) = x + h\frac{\partial}{\partial y}(x^l y^s) + \ldots \qquad (3)$$

для которой запишем и обратные выражения

$$v = y - h\frac{\partial}{\partial x}(x^l y^s) + \ldots,\quad x = u - h\frac{\partial}{\partial v}(u^l v^s) + \ldots$$

для функции Гамильтона (2) получаем

$$\tilde{H} = i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k v_k + ih\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(u_k\frac{\partial}{\partial u_k} - v_k\frac{\partial}{\partial v_k}\right)u^l v^s + H_*$$

Член, пропорциональный $h$, имеет ту же структуру, что и подлежащий уничтожению, во всех случаях, за исключением того, когда выражение $u^l v^s = u_1^{l_1}\ldots u_n^{l_n} v_1^{s_1}\ldots v_n^{s_n}$ является первым интегралом системы линейных дифференциальных уравнений, порождаемой гамильтонианом $H_0$.

Таким образом, полиномиальными заменами можно уничтожить в нелинейной части гамильтониана $H_*$ все члены, кроме первых интегралов линейной части.

У системы с гамильтонианом $H_0$

$$\dot{u}_k = i\lambda_k u_k,\ \dot{v}_k = -i\lambda_k v_k\ \ (k = 1,\ldots,n)$$

имеется $2n - 1$ независимых первых интегралов $G_1(u, v),\ldots,G_{2n-1}(u, v)$. Из них $n$ первых интегралов всегда имеют полиномиальный вид

$$G_k = u_k v_k \; (k = 1,\ldots,n) \tag{4}$$

Среди других первых интегралов, интегралов в полиномиальной форме нет, если система нерезонансная, т. е.

$$k_1\lambda_1+\ldots+k_n\lambda_n \neq 0 \quad (k_1^2+\ldots+k_n^2 \neq 0) \tag{5}$$

ни при каких целых $k_1,\ldots,k_n$.

Если же резонансы есть, то число независимых полиномиальных первых интегралов превышает $n$ на число резонансных отношений типа (5).

Например, если имеется резонанс $\lambda_1 = 3\lambda_2$, то полиномиальным интегралом, дополнительным к (4), будет такой: $G_{n-1} = u_1 v_2^3$. В этом примере НФБ может зависеть только от таких аргументов: $u_1v_1,\ldots,u_nv_n$, $u_1v_2^3$.

*Определение*. Гамильтониан имеет НФБ, когда он зависит только от полиномиальных первых интегралов (от инвариантов) невозмущенной части, т. е. $H = H_0 + H_*$ имеет НФБ, если $\{H_0, H_*\} = 0$, ($\{H_0, H_*\}$ – скобка Пуассона).

Описанный алгоритм приведения гамильтониана к НФБ может быть заменен существенно более простым алгоритмом, если искомые канонические преобразования представлять не с помощью производящей функции (3), а с помощью функции Гамильтона некоторой вспомогательной системы, фазовый поток которой и задает однопараметрическую группу преобразований, используемых для нормализации исходного гамильтониана.

Пусть гамильтониан этой вспомогательной системы есть $Q(x, y)$. Это значит, что уравнения

$$dx/d\tau = \partial Q/\partial y, \; dy/d\tau = -\,\partial Q/\partial x$$

с начальными условиями $x(0) = u$, $y(0) = v$ определяют искомые преобразования по формулам

$$x = x(u, v, \tau), \; y = y(u, v, \tau) \tag{6}$$

представляющим собой решение этой начальной задачи Коши.

Преобразования (6) и обратные к ним могут быть записаны с помощью следующих рядов Ли [5, 6]:

$$x = u + \tau\{u, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{u,Q\},Q\}+\ldots, \quad y = v + \tau\{v, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{v,Q\},Q\}+\ldots$$

$$u = x - \tau\{x, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{x,Q\},Q\}+\ldots, \quad v = y - \tau\{y, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{y,Q\},Q\}+\ldots$$

В случае прямых преобразований обозначения аргументов $x$ и $y$ в функции $Q$ заменены обозначениями $u$ и $v$. Сама функция $Q$ неизменна.

Преобразованный гамильтониан связан с исходным также рядом Ли:

$$\tilde{H}(u,v) = H(u,v) + \tau\{H, Q\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{H,Q\},Q\}+\ldots \tag{7}$$

Эта формула является основной для формирования алгоритма приведения гамильтониана к НФБ.

Формализуем признак, определяющий порядок нелинейных членов, посредством введения масштаба $x \to \varepsilon x$, $y \to \varepsilon y$. Тогда гамильтониан (2) при учете валентности этой замены запишется так:

$$H(x,y) = H_0(x,y) + \frac{1}{\varepsilon^2} H_*(\varepsilon x, \varepsilon y) \equiv H_0(x,y) + \varepsilon H_*(x,y,\varepsilon)$$

Введем обозначения для асимптотик гамильтониана

$$H_k(x, y) = H + O(\varepsilon^{k+1}) \tag{8}$$

т. е. $H_k$ – это любая функция, отличающаяся от точного гамильтониана членами более высокого порядка малости, чем $\varepsilon^k$.

Гамильтониан вспомогательной производящей системы также будем искать в форме асимптотик

$$Q_k = Q + O(\varepsilon^k)$$

Ряд (7) позволяет найти связь асимптотик нормальной формы Биркгофа с асимптотиками исходного гамильтониана и гамильтониана группы преобразований. Полагая $\varepsilon = \tau$, найдем

$$\tilde{H}_0(u,v) = H_0(u,v)$$

$$\tilde{H}_1(u,v) = H_1(u,v) + \tau\{H_0, Q_0\} \tag{9}$$

$$\tilde{H}_2(u,v) = H_2(u,v) + \tau\{H_1, Q_1\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{H_0, Q_0\}, Q_0\}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\tilde{H}_k(u,v) = H_k(u,v) + \tau\{H_{k-1}, Q_{k-1}\} + \ldots + \frac{\tau^k}{k!}\underbrace{\{\ldots\{}_{\text{к раз}}H_0, Q_0\}, Q_0\}\ldots\}$$

В соотношениях (9) использованы свойства кольца асимптотик.

В выражении для $\tilde{H}_k(u, v)$ представим скобку Пуассона $\{H_{k-1}, Q_{k-1}\}$ в асимптотически эквивалентной форме:

$$\{H_{k-1}, Q_{k-1}\} = \{H_0, Q_{k-1}\} + \{H_{k-1} - H_0, Q_{k-1}\} = \{H_0, Q_{k-1}\} + \{H_{k-1} - H_0, Q_{k-2}\}.$$

Такая эквивалентность имеет место, поскольку $H_{k-1} - H_0 \sim \tau$.

С учетом этого представления введем следующие обозначения:

$$L_1 = H_1(u, v)$$

$$L_2 = \tau\{H_1 - H_0, Q_0\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{H_0, Q_0\}, Q_0\} + H_2(u,v) \tag{10}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$L_k = \tau\{H_{k-1} - H_0, Q_{k-2}\} + \sum_{i=2}^{k} \frac{\tau^i}{i!}\underbrace{\{\ldots\{}_{i\ \text{раз}}H_{k-i}, Q_{k-i}\}, Q_{k-i}\}\ldots\} + H_k(u,v)$$

Тогда формулу для искомой асимптотики $k$-го порядка преобразованного гамильтониана можно записать так:

$$\tilde{H}_k = \tau\{H_0, Q_{k-1}\} + L_k \tag{11}$$

В этом уравнении, которое называется гомологическим, функция $L_k$ представляет собой известную функцию $u$ и $v$, поскольку для ее нахождения необходимо в соответствии с формулой (10) знать младшие асимптотики $H$ и $Q$, которые предположительно уже найдены. Неизвестными и подлежащими нахождению из уравнения (11) являются функции $\tilde{H}_k(u, v)$ и $Q_{k-1}(u, v)$.

Для решения гомологического уравнения относительно этих функций заметим, что скобка Пуассона $\{H_0, Q_{k-1}\}$ представляет собой полную производную по $t$ от функции $Q_{k-1}(u, v)$, взятую вдоль траекторий системы с гамильтонианом $H_0$, т. е. вдоль семейства отображений $u \to u\exp(i\lambda t)$, $v \to v\ \exp(-i\lambda t)$:

$$\{H_0, Q_{k-1}\} = dQ_{k-1}/dt.$$

Однако, по определению $\tilde{H}_k$ состоит только из инвариантов этой же линейной системы, и из уравнения (11) по этим причинам следует

$$\int_0^t L_k(ue^{i\lambda t}, ve^{-i\lambda t})dt = t\tilde{H}_k - \tau Q_{k-1} + \tau Q_{k-1}(t) \tag{12}$$

Полученная формула и завершает весь алгоритм нормализации по Биркгофу: а) вычислить функцию $L_k(u, v)$; б) вычислить от нее интеграл по времени вдоль траекторий порождающей системы.

Тогда коэффициент при $t$ есть искомая нормальная форма, а не зависящий от $t$ коэффициент при $\tau$ есть искомая асимптотика производящего гамильтониана, необходимая для поиска следующего приближения.

Первый шаг этой рекуррентной схемы состоит в вычислении интеграла вдоль траекторий порождающей системы от первой асимптотики предъявленного гамильтониана:

$$\int_0^t H_1(ue^{i\lambda t}, ve^{-i\lambda t})dt = t\tilde{H}_1 - \tau Q_0 + \tau Q_0(t)$$

*Пример (уравнение Дуффинга)* $\ddot{q} + q + q^3 = 0$. Соответствующий этому уравнению гамильтониан $H = (p^2 + q^2 + q^4/2)/2$ заменой $x = q - ip$, $y = q + ip$ приводится к виду $H = i[xy + (x + y)^4/32]$. В гамильтониане нет членов третьей степени, поэтому параметр $\varepsilon$, отделяющий друг от друга члены разных порядков, можно взять из условия $x = \sqrt{\varepsilon}x'$, $y = \sqrt{\varepsilon}y'$, в результате чего гамильтониан запишется в виде (штрихи опускаем):

$$H = i[xy + \varepsilon(x + y)^4/32]$$

*Первое приближение.* В результате замены $x \to ue^{it}$, $y \to ve^{-it}$, $\varepsilon = \tau$ имеем

$$\int_0^t H_1 dt = \int_0^t H dt = i\int_0^t \left[ uv + \frac{\tau}{32}(ue^{it} + ve^{-it})^4 \right] dt =$$

$$= \tilde{H}_1 + \tau Q_0 + \frac{\tau}{32}\left( \frac{1}{4}u^4e^{4it} + 2u^3ve^{2it} - 2uv^3e^{-2it} - \frac{1}{4}v^4e^{-4it} \right)$$

$$\tilde{H}_1 = i\left( uv + \frac{3\tau}{16}u^2v^2 \right),\ Q_0 = -\frac{1}{32}\left( \frac{1}{4}u^4 + 2u^3v - 2uv^3 - \frac{1}{4}v^4 \right)$$

*Второе приближение.* Вычислим функцию $L_2$:

$$L_2 = \tau\{H_1 - H_0, Q_0\} + \frac{\tau^2}{2}\{\{H_0, Q_0\}, Q_0\} + H_2$$

Здесь

$$H_1 - H_0 = \frac{i\tau}{32}(u+v)^4,\ \{H_0, Q_0\} = \frac{1}{\tau}(\tilde{H}_1 - H_1) = -\frac{i}{32}(u^4 + 4u^3v + 4uv^3 + v^4),\ H_2 = H.$$

Вычисления, аналогичные выполненным в первом приближении, дают

$$\tilde{H}_2 = i\left( uv + \frac{3\tau}{16}u^2v^2 - \frac{17}{256}\tau^2u^3v^3 \right)$$

(выделены только члены с множителем $t$). Поскольку ограничиваемся двумя приближениями, то в нахождении $Q_1$, необходимого для поиска третьего приближения, потребности нет.

Для возвращения к исходному масштабу измерения переменных достаточно положить $\tau = 1$.

*Замечания.* 1°. Для упрощения выкладок по рекуррентной формуле (10) все возникающие члены, содержащие множителем $\tau^m$ при $m > k$, следует полагать равными нулю.

2°. Было дано определение НФБ, основанное на использовании переменных "действие–угол" [7]: $p_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\varphi_i$, $q_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\varphi_i$. НФБ называется полином по степеням $\rho$, и она существует лишь в нерезонансных случаях. В резонансном случае НФБ называется резонансной, и она зависит уже не только от переменной действия, но еще и от резонансных комбинаций углов.

Приведенное в настоящем исследовании определение представляется более удобным по следующим причинам. Во-первых, оно охватывает сразу как резонансный, так и нерезонансный случаи. Во-вторых, оно апеллирует не к внешним признакам, таким, как вид зависимости от $\rho$ и $\varphi$, а к понятиям, определяющим фундаментальную суть нормальной формы: эта форма может зависеть только от полиномиальных инвариантов порождающей системы. При этом совершенно неважно, с чем связаны конкретные инварианты: с "тождественными", или "нетождественными" резонансами. В-третьих, определение нормальной формы гамильтоновых систем должно быть частным случаем определения нормальной формы произвольных систем (форма Пуанкаре). В-четвертых, определение инвариантным понятиям желательно давать в инвариантной форме. В настоящем исследовании не только определение обладает этим свойством, но и сам алгоритм: при вычислении интеграла в левой части равенства (12) вдоль траекторий вырожденной системы не имеет значения в каких переменных описываются эти траектории, т. е. не обязательно предварительное приведение гамильтона $H_0$ в канонической форме.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Биркгоф Д.Д.* Динамические системы. М., Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
2. *Deprit A.* Canonical transformations depending on a small parameter // Celest. Mech. 1969. V. I. № 1. P. 12–30.
3. *Hori G.I.* Theory of general perturbations with unspecified canonical variables // Publs. Astron. Soc. Japan. 1966. V. 18. 4. P. 287–296.
4. *Mersman W.A.* A new algorithm for the Lie transformation // Celest. Mech. 1970. V. 3. № 1. P. 81–89.
5. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
6. *Olver P.J.* Applications of Lie Groups to differential equations. Berlin: Springer, 1986. 497 p.
7. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т.3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.



Москва

Поступила в редакцию
2.XI.1994