

УДК 532.516 : 532.135

© 1997 г. В.А. Городцов, В.М. Ентов

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТОВ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

Исследуется дестабилизирующее влияние уменьшения вязкости неньютоновской жидкости со скоростью сдвига и ее упругости на плоскопараллельные и круговые фронты вытеснения в ячейке Хеле-Шоу, а также влияние упругости жидкости на форму "языков" Саффмэна – Тейлора, образующихся при развитии первичной неустойчивости фронтов. Рассмотрение проведено отдельно для чисто вязкой неньютоновской жидкости и для вязкоупругой жидкости (с ньютоновским вязким поведением в стационарном сдвиговом течении). В результате процесса многоэтапного развития неустойчивости вытеснения одной жидкости другой в ячейке Хеле-Шоу (так традиционно именуется течение в малом зазоре между большими параллельными плоскими пластинами) могут образовываться разнообразные структуры от отдельного "языка" вытеснения до сложных структур с фрактальным строением. Вид структур и условия их формирования оказываются чувствительными к реологическим особенностям жидкостей.

В разд. 1 рассматривается линейная неустойчивость прямолинейного и кругового фронтов вытеснения одной неньютоновской нелинейновязкой жидкости другой с учетом поверхностного натяжения в постановке плоской задачи, отвечающий осредненному по толщине зазора движению. Показано, что критическая длина волны неустойчивых малых возмущений для прямолинейного фронта и критический радиус начала неустойчивости при радиальном вытеснении в псевдопластических жидкостях меньше, чем в ньютоновских вязких. Неустойчивые возмущения также нарастают быстрее в псевдопластических жидкостях. Эти общие заключения проще всего достигаются при степенной зависимости вязкости от сдвигового напряжения. Они верны независимо от некоторой неопределенности в способах сопоставления степенной и ньютоновской вязких жидкостей.

В разд. 2 оценивается аналогичное влияние упругости вытесняемых вязкоупругих жидкостей на развитие неустойчивости плоскопараллельных и круговых фронтов и на продвижение "языка" невязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу. Ранее в [1] в результате численного анализа уравнений малых возмущений плоскопараллельного фронта вытеснения вязкоупругой жидкости, следующей модели Олдройда-Б, было установлено ускорение роста возмущений. Сдвиговое течение в зазоре между параллельными пластинами ячейки для такой модели отличает отсутствие эффекта аномалии вязкости, эффективная вязкость остается постоянной. Тем самым этот результат указывает на дестабилизирующее влияние упругих нормальных напряжений. При этом громоздкость анализа в [1] связана с учетом нормальных напряжений, как в граничных условиях на фронте вытеснения, так и в определяющих дифференциальных уравнениях. Будет показано, что, по крайней мере, в жидкостях с малой упругостью, ведущим фактором ускорения роста малых возмущений фронта вытеснения является эффект нормальных напряжений в граничном условии на фронте. Предполагается, что локально внутри заполненной жидкостью части ячейки течение подчиняется обычному соотношению Буссинеска для вязкой жидкости, эквивалентному закону Дарси для пористой среды. Результаты тогда получаются достаточно просто в аналитическом виде как для прямолинейного, так и кругового фронта вытеснения. При дальнейшем развитии неустойчивых возмущений формируется равномерно

движущийся "язык" невязкой вытесняющей жидкости. С учетом влияния малой упругости вытесняемой жидкости, по-прежнему только на фронте, показано, что из-за упругости такой "язык" становится менее острым.

1. Фронты вытеснения нелинейновязких жидкостей. Обобщенный закон Дарси для течения нелинейновязкой жидкости. Рассмотрим течение несжимаемой неньютоновской жидкости (с общего вида зависимостью коэффициента вязкости η от второго инварианта тензора скоростей деформации) в узком зазоре $-h \leq z \leq h$ между двумя параллельными гладкими пластинами (течение Хеле-Шоу).

В безынерционном приближении тонкого слоя (при малом зазоре естественным является предположение о малости чисел Рейнольдса и $v_z \approx 0$, $\partial/\partial z \gg \partial/\partial x, \partial/\partial y$) уравнения движения сводятся к соотношению баланса сил давления и вязкости и вместе с условием несжимаемости и определяющим уравнением принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \nabla p = \frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \tau = \eta \left(\left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right| \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \quad \nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y) \quad (1.1)$$

Описание течения становится фактически двумерным: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ – вектор скорости, $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ – двумерный "вектор сдвиговых напряжений". Можно вообще избавиться в полученных уравнениях от третьей координаты z интегрированиями по ней. Первое интегрирование уравнений движения с учетом отсутствия сдвиговых напряжений на срединной плоскости $z = 0$ (плоскости симметрии течения) после обращения определяющего соотношения дает

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = g(\tau) \frac{\tau}{\tau}, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right| = g(\tau), \quad \tau = z \nabla p$$

и при повторном интегрировании по z с учетом условия прилипания жидкости на твердых стенках и осреднении по всей толщине зазора между пластинами приходим к соотношениям для осредненной скорости течения через ячейку Хеле-Шоу

$$\mathbf{u} = -M \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \equiv \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \mathbf{v} dz \quad (1.2)$$

$$M = M(\tau_w) = \frac{h^2}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau g(\tau) d\tau, \quad \tau_w \equiv \tau|_{z=\pm h} = h |\nabla p|$$

В силу известной аналогии с течением в пористой среде эти соотношения дальше для краткости называются обобщенным (нелинейным) законом Дарси. В частном случае ньютоновской вязкой жидкости определяющее уравнение линейно ($g(\tau) = \tau/\eta_0$), и линейным с постоянной подвижностью $M = h^2/(3\eta_0)$ оказывается "закон Дарси". Неньютоновская жидкость нелинейна, и подвижность M зависит от величины сдвигового напряжения на стенках τ_w , пропорциональной величине градиента давления. Например, для степенной жидкости

$$g(\tau) = \left(\frac{\tau}{K} \right)^{1/n}, \quad M = \frac{nh^2}{2n+1} \frac{g(\tau_w)}{\tau_w} \quad (1.3)$$

Прямолинейный фронт вытеснения одной жидкости другой и его неустойчивость. Рассмотрим теперь задачу об однородном вытеснении нелинейновязкой жидкости с постоянной скоростью U в рамках осредненного плоского описания уравнениями (1.2). Она имеет простое решение

$$u_{il} = U \delta_{ix}, \quad p_l = p_0 - \frac{\alpha}{h} + \frac{\partial p_l}{\partial x} (x - Ut), \quad x > Ut$$

$$u_{i2} = U\delta_{ix}, \quad p_2 = p_0 + \frac{\partial p_2}{\partial x}(x - Ut), \quad x < Ut$$

причем постоянные значения градиента давления связаны с постоянной скоростью вытеснения в силу обобщенного закона Дарси соотношениями

$$U = -M_1 \left(h \left| \frac{\partial p_1}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} = -M_2 \left(h \left| \frac{\partial p_2}{\partial x} \right| \right) \frac{\partial p_2}{\partial x} \quad (1.4)$$

Индексами 1 и 2 помечаем соответственно характеристики вытесняемой и вытесняющей жидкостей. Различие подвижностей M_1 и M_2 жидкостей при этом обусловлено различием их определяющих уравнений.

На общей границе раздела $x = Ut$ (фронте вытеснения) скорости течений совпадают, а давление испытывает скачок величины α/h , обусловленный капиллярностью (прямолинейная в плоскости x, y межфазная граница сильно искривлена в третьем направлении, причем ее кривизна обратно пропорциональна ширине зазора). Используемое выражение для величины капиллярного скачка соответствует случаю идеально смачивающей вытесняемой жидкости; однако оно изменится лишь количественно, если смачивание неидеально, но краевой угол остается постоянным независимо от движения фронта вытеснения.

Малые искривления фронта вытеснения в плоскости течения

$$x = Ut + \xi(y, t) \quad (1.5)$$

вызывают малые возмущения полей скоростей и давлений жидкостей. Компоненты возмущений скоростей в направлении нормали к фронту определяются линеаризованным граничным условием

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u'_{x1} \Big|_{x=Ut} = u'_{x2} \Big|_{x=Ut} \quad (1.6)$$

В линейном приближении обобщенный закон Дарси сводится к линейным соотношениям связи между возмущениями скоростей и давлений

$$u'_{xs} = -L_s \frac{\partial p'_s}{\partial x}, \quad u'_{ys} = -M_s \frac{\partial p'_s}{\partial y}, \quad s = 1, 2 \quad (1.7)$$

$$M_s \equiv M_s(\tau_{ws}) > 0, \quad L_s \equiv \frac{h^2}{\tau_{ws}} g_s(\tau_s) - 2M_s > 0$$

и в силу условия несжимаемости возмущения давления удовлетворяют уравнениям (эллиптического типа)

$$L_s \frac{\partial^2 p'_s}{\partial x^2} + M_s \frac{\partial^2 p'_s}{\partial y^2} = 0$$

Поскольку уравнения для возмущений линейны и имеют постоянные коэффициенты (благодаря однородности возмущаемого течения), удобно рассматривать элементарные возмущения с экспоненциальной зависимостью от y и t . В итоге получим

$$\xi = ae^{i\theta}, \quad \theta \equiv ky - \omega t$$

$$(u'_{xs}, u'_{ys}, p'_s) = -\omega a \left(i, \frac{k}{|k|} \left(\frac{M_s}{L_s} \right)^{1/2}, \frac{i}{|k|} (L_s M_s)^{-1/2} \right) \exp(i\theta + \psi_s)$$

$$\psi_{1,2} = \mp |k| \left(\frac{M_{1,2}}{L_{1,2}} \right)^{1/2} (x - Ut)$$

Если принять еще во внимание линеаризованное граничное условие для скачка давления, обязанного действию поверхностного натяжения при возмущениях кривизны фронта в плоскости течения (такое ограничение искажениями фронта только в плоскости x, y выглядит несколько искусственным; однако, как показывает непрекращающееся обсуждение в случае ньютоновских жидкостей [2], оно имеет право на существование в качестве некоторого первого приближения), т.е.

$$\alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) \xi + (p'_1 - p'_2) \Big|_{x=U t}$$

то получим дисперсионное уравнение

$$-i\omega = |k| \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial x} - \alpha k^2 \right) \left[(L_1 M_1)^{-1/2} + (L_2 M_2)^{-1/2} \right]^{-1} \quad (1.8)$$

связывающее $-i\omega$ с $|k|$ и определяющее условие неустойчивости и темп экспоненциального нарастания малых возмущений.

Поверхностное натяжение на границе между двумя жидкостями приводит к появлению критического (минимального) значения длины волны растущих возмущений

$$\lambda_c = 2\pi\alpha^{1/2} \left(\left| \frac{\partial p_1}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial p_2}{\partial x} \right| \right)^{-1/2} \quad (1.9)$$

Неустойчивы только возмущения с $\lambda > \lambda_c$, причем наиболее быстро растут возмущения с длиной волны $\lambda_c \sqrt{3}$. По отношению к гораздо более длинноволновым возмущениям прямолинейный фронт вытеснения всегда неустойчив при $|\partial p_1 / \partial x| > |\partial p_2 / \partial x|$ безотносительно к величине поверхностного натяжения.

На первый взгляд полученный результат (1.8) говорит о независимости, по крайней мере, критерия неустойчивости от типа жидкости, если для различных определяющих соотношений жидкостей (различных пар жидкостей) уравниваются градиенты давления перед фронтом и за ним. Однако при выбранной паре жидкостей градиенты давления в них, вообще говоря, нельзя задавать независимо, как это видно из (1.4). Различные, но согласованные градиенты давления должны обеспечить одну и ту же скорость стационарного продвижения фронта при разных подвижностях жидкостей. Еще более чувствительным к особенностям жидкостей оказывается темп роста неустойчивых возмущений.

Для степенной жидкости из (1.4), (1.7) следует

$$M_s = n_s L_s = \frac{n_s h^{1+1/n_s}}{(2n_s + 1) K_s^{1/n_s}} \left| \frac{\partial p_s}{\partial x} \right|^{1/n_s - 1} = U \left| \frac{\partial p_s}{\partial x} \right|^{-1} \quad (1.10)$$

и дисперсионное уравнение (1.8) сводится к формуле

$$-i\omega = U |k| \left(\left| \frac{\partial p_1}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial p_2}{\partial x} \right| - \alpha k^2 \right) \left(\left| \frac{\partial p_1}{\partial x} \right| \sqrt{n_1} + \left| \frac{\partial p_2}{\partial x} \right| \sqrt{n_2} \right)^{-1} \quad (1.11)$$

с очевидной зависимостью темпа роста неустойчивых возмущений от показателя степенного закона n .

При заданной скорости продвижения фронта U параметризацию можно изменить с помощью соотношений (1.4). В случае степенной жидкости обращение (1.4) дает (см. также (1.10))

$$\left| \frac{\partial p_s}{\partial x} \right| = \frac{K_s}{h} \left[\left(2 + \frac{1}{n_s} \right) \frac{U}{h} \right]^{n_s} = \eta_{ws} \left(2 + \frac{1}{n_s} \right) \frac{U}{h}$$

В последнем равенстве введены вязкости двух жидкостей на ограничивающих поток пластинах в соответствии с определением $\eta_w = \tau_w/g(\tau_w)$, которые полностью определяются величиной U . С учетом этого формулу (1.11) можно переписать в несколько ином виде

$$-i\omega = U|k| \frac{U[\eta_{w1}(2+1/n_1) - \eta_{w2}(2+1/n_2)] - \alpha k^2 h^2}{\eta_{w1}(2+1/n_1)\sqrt{n_1} + \eta_{w2}(2+1/n_2)\sqrt{n_2}}$$

В частном случае ньютоновских жидкостей ($n_1 = n_2 = 1$) результат совпадает с классическим из работ [3, 4].

Обсудим последнюю формулу для случая вытесняющей жидкости настолько малой вязкости, что ею можно пренебречь, положив $\eta_{w2} = 0$. Тогда для критической длины волны, разделяющей устойчивые и неустойчивые возмущения, и для темпа роста неустойчивых возмущений будем иметь

$$\lambda_c = 2\pi h \left(\frac{\alpha}{U\eta_w} \frac{n}{2n+1} \right)^{1/2}, \quad -i\omega = U^2|k| \left[1 - \left(\frac{k\lambda_c}{2\pi} \right)^2 \right] \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Отсюда ясно, что для псевдопластичных жидкостей ($n < 1$) критическая длина волны меньше, чем для ньютоновской жидкости с вязкостью, равной эффективной вязкости вытесняемой жидкости при той же скорости вытеснения. Темп же роста неустойчивых возмущений (фиксированной длины волны) для неньютоновской жидкости выше. Для дилатантных жидкостей ($n > 1$) эти утверждения меняются на обратные.

Отметим еще возможность количественных различий при сопоставлении результатов для ньютоновской и неньютоновской жидкостей из-за переменности вязкости последних. Так, взамен характеристики интегрального наклона кривой течения, вязкости $\eta_w = \tau_w/g(\tau_w)$, можно выбрать характеристику локального наклона кривой течения, "касательную вязкость" $\bar{\eta}_w = (\partial g / \partial \tau_w)^{-1}$. В случае степенной жидкости они различаются множителем, равным показателю степенного закона, $\bar{\eta}_w = n\eta_w$. Поэтому ясно, что при соотнесении вязкости ньютоновской жидкости "касательной вязкости" неньютоновской предыдущий вывод о падении критической длины волны и более быстром росте неустойчивых возмущений только усилится.

Развитие неустойчивости радиального вытеснения неньютоновской жидкости. При чисто радиальном течении несжимаемой жидкости скорость (осредненная по толщине зазора) изменяется обратно пропорционально радиусу. Закачка вытесняющей жидкости (с индексом 2) в начале координат с объемным расходом в единицу времени $Q(t)$ вызывает радиальное течение обеих жидкостей со скоростью

$$u = U \frac{R}{r}, \quad u = u_{r1}, \quad r > R; \quad u = u_{r2}, \quad r < R; \quad U = \frac{dR}{dt} = \frac{Q}{4\pi h R}$$

Этому полю скоростей по обобщенному закону Дарси (1.2) соответствуют градиенты давления, определяемые неявным соотношением

$$U \frac{R}{r} = -M_s \left(h \left| \frac{\partial p_s}{\partial r} \right| \right) \frac{\partial p_s}{\partial r}, \quad s=1, \quad r < R(t), \quad s=2, \quad r > R(t) \quad (1.12)$$

Здесь в отличие от предыдущего случая прямолинейного вытеснения течение не является однородным, а градиенты давления (и подвижности M_s) постоянными.

Малые возмущения кругового фронта вытеснения

$$r = R(t) + \xi_m(t) e^{im\varphi}, \quad \xi \ll R \quad (1.13)$$

наводят возмущения полей скоростей и давлений жидкостей. Возмущениям радиальной

компоненты скорости течения вида

$$u'_{rs} = A_s(t)B_s(\rho)e^{im\varphi}, \quad \rho \equiv r/R(t) \quad (1.14)$$

соответствуют по условию несжимаемости возмущения угловых компонент

$$u'_{\varphi s} = \frac{i}{m} A_s(t) \frac{d}{d\rho} (\rho B_s) e^{im\varphi} \quad (1.15)$$

Отметим, что в общем случае возмущения поля скоростей не допускают представлений вида (1.14), (1.15) с расщеплением зависимостей от радиальной и временной переменных. Таким образом, ограничиваемся специальными классами течений, оправдывая принятые допущения апостериори. Линеаризованное граничное условие равенства нормальных компонент скоростей на возмущенном фронте вытеснения и скорости фронта

$$\left(\frac{\partial u_{rs}}{\partial r} \xi_m e^{im\varphi} + u'_{rs} \right) \Big|_{r=R} = \frac{d\xi_m}{dt} e^{im\varphi}$$

позволяет выразить амплитуду возмущений скорости $A_s(t)$ через амплитуду возмущений фронта $\xi_m(t)$,

$$A_1(t) = A_2(t) = A(t) \equiv \frac{1}{R} \frac{d}{dt} (\xi_m R), \quad B_1(1) = B_2(1) = 1$$

Линеаризуя обобщенный закон Дарси, получим для малых возмущений скоростей и давлений соотношения

$$u'_{rs} = -L_s \frac{\partial p'_s}{\partial r}, \quad u'_{\varphi s} = -M_s \frac{1}{r} \frac{\partial p'_s}{\partial \varphi} \quad (1.16)$$

$$M_s \equiv M_s \left(h \left| \frac{\partial p_s}{\partial r} \right| \right), \quad L_s \equiv h \left| \frac{\partial p_s}{\partial r} \right|^{-1} g_s \left(h \left| \frac{\partial p_s}{\partial r} \right| \right) - M_s$$

позволяющие выразить возмущения давления через те же функции $B_s(\rho)$ и получить для последних дифференциальные уравнения

$$p'_s = -\frac{1}{m^2} R(t) A(t) \frac{\rho}{M_s} \frac{d}{d\rho} [\rho B_s(\rho)] e^{im\varphi} \quad (1.17)$$

$$L_s \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\rho}{M_s} \frac{d}{d\rho} \rho B_s(\rho) \right] = m^2 B_s(\rho)$$

В рассматриваемой задаче о возмущениях кругового фронта вытеснения коэффициентные функции M_s и L_s зависят, вообще говоря, от радиальной координаты и времени, т.е. от ρ и t . Это, как уже было сказано, противоречит сделанному допущению о зависимости B_s только от ρ . Однако для определенных классов течений эти предположения выполняются заведомо. Так, при режиме вытеснения с постоянной скоростью продвижения фронта, $U = U_0$, обеспечиваемом линейно растущим расходом жидкости $Q(t) = 4\pi h U_0^2 t$, эти уравнения имеют смысл для произвольных нелинейновязких жидкостей. Тогда скорости жидкостей зависят только от ρ ($v_{rs} = U_0/\rho$), и в силу (1.12), (1.16) это верно и относительно градиентов давления $\partial p_s/\partial r$, подвижностей M_s и коэффициентных функций L_s . Для степенных жидкостей уравнение (1.17)

имеет смысл независимо от режима вытеснения

$$M_s = n_s L_s = \frac{n_s h^2}{(2n_s + 1)K_s} \left[\frac{2n_s + 1}{h\rho n_s} U(t) \right]^{1-n_s}$$

$$\rho^{n_s-1} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^{2-n_s} \frac{d}{d\rho} (\rho B_s(\rho)) \right] = n_s m^2 B_s(\rho)$$

и допускает степенные решения

$$B_s(\rho) = \rho^{\nu_s}$$

$$2(\nu_1 + 1) = -(1 - n_1) - \sqrt{(1 - n_1)^2 + 4n_1 m^2}$$

$$2(\nu_2 + 1) = -(1 - n_2) + \sqrt{(1 - n_2)^2 + 4n_2 m^2}$$

Выбор знаков перед радикалами здесь диктуется требованием убывания возмущений давления ($p'_s \sim \rho^{2+\nu_s-n_s}$) с удалением от фронта во внешней жидкости и регулярностью их у источника в начале координат во внутренней. При этом возмущения скорости ($v'_{rs} \sim v'_{\varphi s} \sim \rho^{\nu_s}$) убывают в вытесняемой жидкости вдали от фронта и менее сингулярны, чем основное течение, у источника вытесняющей.

Наконец, линеаризованное граничное условие для скачка давления на возмущенном фронте, вызванного капиллярным давлением, записанное в предположении, что мениск не возмущается в перпендикулярном к пластинам направлении и в пренебрежении относительно малыми нормальными вязкими напряжениями,

$$\left[\left(\frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) \xi_m e^{im\varphi} + (p'_1 - p'_2) \right]_{r=R} = \alpha \frac{1-m^2}{R^2} \xi_m e^{im\varphi}$$

приводит к уравнению для амплитуды возмущений кругового фронта

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_m}{dt} R \left(\frac{b_1}{M_1} - \frac{b_2}{M_2} \right)_{r=R} + \xi_m \frac{dR}{dt} \left(\frac{b_1 + m^2}{M_1} - \frac{b_2 + m^2}{M_2} \right)_{r=R} = \\ = m^2 (m^2 - 1) \frac{\alpha}{R^2} \xi_m, \quad b_s = \left. \frac{d\rho B_s}{d\rho} \right|_{\rho=1} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Подвижности M_s в окрестности фронта ($r \rightarrow R$) являются функциями только его скорости $U = dR/dt$, и полученное линейное по ξ_m уравнение позволяет определить скорость роста искривлений фронта $d \ln \xi_m / dt$.

Ограничимся далее анализом случая, когда степенная жидкость вытесняется жидкостью пренебрежимо малой вязкости (тогда индекс s излишен). Для степенной жидкости

$$M|_{r=R} = \frac{h}{K} \left(\frac{nh}{2n+1} \right)^n \left(\frac{dR}{dt} \right)^{1-n}$$

$$b = \left. \frac{d}{d\rho} (\rho B) \right|_{\rho=1} = 1 + \nu = -\frac{1}{2} \left[1 - n + \sqrt{(1-n)^2 + 4nm^2} \right]$$

и уравнение для скорости роста амплитуды возмущений (1.18) упрощается:

$$\frac{1}{\xi_m} \frac{d\xi_m}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \frac{1+\nu+m^2}{1+\nu} + \frac{m^2(m^2-1)\alpha h}{(1+\nu)K} \left(\frac{nh}{2n+1} \right)^n \frac{1}{R^3} \left(\frac{dR}{dt} \right)^{1-n} \quad (1.19)$$

Самым простым здесь является случай возмущений с низшим волновым числом $m = 1$. Амплитудное уравнение вырождается до тривиального $d\xi_1/dt = 0$. Нейтральные возмущения требуют, вообще говоря, дополнительного анализа в следующем порядке теории возмущений (или учета отброшенной малой вязкости вытесняющей жидкости). Однако здесь они больше обсуждаться не будут, поскольку не связаны с искажениями кругового фронта, а лишь вызывают его смещение как целого.

Для возмущений с $m > 1$ имеем $1 + \nu + m^2 > 0$, и при степенном изменении расхода вытесняющей жидкости со временем (или с ростом радиуса фронта)

$$Q = qt^\gamma, \quad R = \sqrt{\frac{q}{2\pi h(1+\gamma)}} t^{(1+\gamma)/2}$$

$$U = \frac{dR}{dt} = \phi R^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}, \quad \phi \equiv \frac{1+\gamma}{2} \left[\frac{q}{2\pi h(1+\gamma)} \right]^{1/(\gamma+1)}$$

уравнение для скорости роста возмущений (1.19) можно переписать в более наглядном виде

$$\frac{1}{\xi_m} \frac{d\xi_m}{dR} = \frac{\mu}{R} \left[1 - \left(\frac{R_c}{R} \right)^\sigma \right] \quad (1.20)$$

$$\mu \equiv \frac{1+\nu+m^2}{1+\nu} > 0, \quad \sigma \equiv 2 - n \frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \quad R_c^\sigma = \frac{m^2(m^2-1)\alpha h}{(1+\nu+m^2)K} \left[\frac{nh}{(2n+1)\phi} \right]^n$$

Здесь R_c – критический радиус кругового фронта вытеснения, при превышении которого в случае $\sigma > 0$ производная $d\xi_m/dt$ становится положительной и начинает развиваться неустойчивость (при $\sigma < 0$ имеет место обратное). Существование критического радиуса связано с конкуренцией неустойчивости вязкого вытеснения и стабилизирующего действия поверхностного натяжения, так что оно полностью эквивалентно наличию критической длины волны λ_c в задаче для прямого фронта вытеснения. Условие $\sigma > 0$ в режиме постоянного расхода вытесняющей жидкости ($\gamma = 0$) подразумевает согласно (1.20) ограничение на показатель ее степенного закона $n < 2$, и лишь при равномерном и ускоренном расширении кругового фронта ($\gamma \geq 1$) оно выполняется без каких-либо подобных ограничений.

Уравнение (1.20) для скорости роста возмущений (на радиальную переменную R можно смотреть как на "растянутую" временную) легко интегрируется:

$$\xi_m = \xi_{m0} \left(\frac{R}{R_c} \right)^\mu \exp \left[\frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{R_c}{R} \right)^\sigma \right] \quad (1.21)$$

При большом расширении фронта, $R \gg R_c$, характер роста возмущений становится степенным (а не экспоненциальным, как в случае прямого фронта), и показатель степени μ увеличивается с уменьшением показателя степенного реологического закона n для жидкости:

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = - \frac{m^2(1+\nu+m^2)}{(1+\nu)^2 \sqrt{(1-n)^2 + 4nm^2}} < 0, \quad \mu|_{n=1} = m-1$$

так что для фронтов большого радиуса развитие неустойчивости в псевдопластической жидкости ($n < 1$) должно происходить быстрее, чем в ньютоновской (линейно вязкой), противоположный эффект имеет место для дилатантной жидкости ($n > 1$). Влияние на экспоненту в (1.21), важную при почти критическом развитии возмущений, может быть противоположным, а именно $\partial \sigma / \partial n < 0$ при $\gamma < 1$.

Неустойчивость коротковолновых угловых гармоник наступает позднее, чем у гармоник с меньшими m . Критический радиус монотонно возрастает с ростом номера m , если $\sigma > 0$:

$$\left[R_{c,m} / R_{c,m+1} \right]^\sigma < 1$$

Наиболее простой параметрическая зависимость характеристик неустойчивости получается при равномерном расширении фронта ($\gamma = 1$). Тогда величина σ вообще оказывается не зависящей от свойств вытесняемой жидкости ($\sigma = 2$), и имеем

$$R = U_0 t, \quad Q = q_0 t, \quad q_0 = 4\pi h U_0^2 = \text{const}$$

$$\xi_m = \xi_{m0} \left(\frac{R}{R_c} \right)^\mu \exp \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \right], \quad R_c^2 = \frac{m^2(m^2 - 1)\alpha h}{(1 + \nu + m^2)K} \left[\frac{nh}{(2n + 1)U_0} \right]^n$$

Чтобы сопоставить критические радиусы для жидкостей с различными вязкостными зависимостями, следует оговорить, какие именно значения вязкостей фиксируются. При радиальном течении в ячейке Хеле-Шоу сдвиговые напряжения на ее стенках зависят от радиальной координаты, и потому нелинейная вязкость оказывается переменной даже на стенках:

$$\eta_w \equiv \frac{\tau_w}{g(\tau_w)} = K \left[\frac{nh}{(2n + 1)U_0} \frac{r}{R} \right]^{1-n}$$

Удобно здесь фиксировать вязкости вблизи фронта $\eta_{wR} \equiv \eta_w|_{r=R}$, и при этом для критического радиуса получим

$$R_c^2 = \frac{m^2(m^2 - 1)n}{(1 + \nu + m^2)(2n + 1)} \frac{\alpha h^2}{U_0 \eta_{wR}}, \quad \frac{\partial R_c}{\partial n} > 0$$

Таким образом, критический радиус равномерно распространяющегося фронта вытеснения псевдопластической жидкости меньше, чем при вытеснении ньютоновской жидкости. Отметим, что при сравнении по "касательной" вязкости у фронта $\bar{\eta}_{wR} = (\partial g / \partial \tau_{wR})^{-1} = n \eta_{wR}$ производная $\partial R_c / \partial n$ оказывается только еще большей.

В итоге в пренебрежении поверхностным натяжением вытеснение маловязким газом произвольной нелинейновязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу оказывается неустойчивым по отношению к возмущениям любой длины волны. Это в равной мере относится к прямому и круговому фронтам вытеснения.

Поверхностное натяжение делает устойчивыми короткие волны на прямолинейном равномерно движущемся фронте. При этом критическая длина волны (разделяющая устойчивые и неустойчивые волны) снижается в разжижаемых сдвигом (псевдопластических) жидкостях и увеличивается в дилатных в сравнении со случаем вязкой жидкости при равных вязкостях вблизи фронта вытеснения. Скорость экспоненциального роста малых неустойчивых возмущений (с длиной волны большей критической) больше в псевдопластических жидкостях.

Под действием поверхностного натяжения рост кругового фронта стабилизируется вплоть до некоторого критического радиуса. При дальнейшем расширении неустойчивыми становятся сначала низшие, а затем и более высокие угловые гармоники (все это в рамках линеаризованного описания). Рост даже малых возмущений здесь не является экспоненциальным, а для фронтов большого радиуса близок к степенному. В режиме равномерного расширения фронта критический радиус меньше, а скорость роста неустойчивых возмущений больше в псевдопластической жидкости, чем в ньютоновской вязкой.

Приходим к общему заключению о меньшей устойчивости процесса вытеснения разжижающейся сдвигом жидкости.

Неустойчивость вытеснения нелинейновязких жидкостей ранее анализировалась в [1,5–9]. Обобщенный закон Дарси и критерий неустойчивости вида (1.8) с параметризацией градиентами давления для плоского фронта вытеснения в пористой среде (т.е. в задаче, во многом аналогичной задаче о течении в ячейке Хеле-Шоу) рассматривались в [5], там же указаны более ранние работы. Для жидкостей со степенным законом течения неустойчивость прямого и кругового фронтов в пористой среде рассмотрена в [6–8]. При этом круговой фронт [7,8] обсуждался без учета такого важного фактора, как поверхностное натяжение. Анализ в [1] ограничен плоским фронтом в ячейке Хеле-Шоу (с не самой удачной параметризацией). Довольно подробно обсуждалась в [9] задача об устойчивости кругового фронта в ячейке Хеле-Шоу, но при этом допущена ошибка в формулировке граничного условия для скоростей на фронте, отразившаяся на полученных результатах. Отметим, что в [1,9] использовано весьма громоздкое трехмерное описание с последующим осреднением результатов по толщине узкого зазора. Наконец, при качественной интерпретации результатов неоправданно принималась [9] неизменность критического радиуса для угловых гармоник с $m = 2$ при изменении показателя степени реологического соотношения неньютоновской жидкости.

2. Фронты вытеснения вязкоупругих жидкостей. Развитие неустойчивости плоско-параллельного фронта вытеснения. Рассмотрим установившееся напорное сдвиговое течение в ячейке Хеле-Шоу для вязкоупругой жидкости с модельными определяющими уравнениями Джеффериса – Олдройда-Б:

$$\theta_1 \frac{\delta}{\delta t} \left(\sigma_{ij} - 2\eta \frac{\theta_1}{\theta_2} e_{ij} \right) + \sigma_{ij} = 2\eta e_{ij}$$

$$\frac{\delta \sigma_{ij}}{\delta t} \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \sigma_{ij} - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \sigma_{\alpha j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_\alpha} \sigma_{\alpha i} \right)$$

Здесь $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ – скорость жидкости, e_{ij} – тензор скоростей деформации, σ_{ij} – тензор дополнительных (сверх изотропного давления p) напряжений, η, θ_1, θ_2 – вязкость, время релаксации и время ретардации (последствия) – постоянные жидкости.

При безынерционном установившемся течении несжимаемой жидкости вектор скорости оказывается двумерным, давление не зависит от поперечной координаты z , а распределение скоростей выражается через локальный градиент давления с помощью формулы Буссинеска, аналогичной обычному закону Дарси для плоского движения:

$$\mathbf{v} = -\frac{h^2}{2\eta} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \nabla p, \quad v_z = 0$$

Поле напряжений в вязкоупругой жидкости имеет тогда вид

$$\sigma_{xx} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\eta} 2z^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2, \quad \sigma_{yy} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\eta} 2z^2 \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2, \quad \sigma_{xy} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\eta} 2z^2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\sigma_{xz} = \eta z \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \eta z \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \sigma_{zz} = 0$$

Такие соотношения являются точными для течения между двумя неограниченными плоскими пластинами при постоянном по величине и направлению градиенте давления.

Используем приведенные формулы в более общей ситуации переменного градиента давления $\nabla p(x, y, t)$, предполагая все поля медленно меняющимися функциями коор-

динат в плоскости зазора. После осреднения по толщине узкого зазора между пластинами течение будет описываться обычными для несжимаемой вязкой жидкости вязкости η соотношениями Буссинеска – Дарси

$$\mathbf{u} \equiv \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{h^2}{3\eta} \nabla p, \quad \Delta p = 0$$

причем поле осредненных напряжений просто определяется по полю давления

$$\langle \sigma_{xx} \rangle = c \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2, \quad \langle \sigma_{yy} \rangle = c \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2, \quad \langle \sigma_{xy} \rangle = c \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad \langle \sigma_{zz} \rangle = 0$$

$$c = 2h^2(\theta_1 - \theta_2) / (3\eta)$$

Можно показать, что приведенные соотношения могут быть получены в рамках формальной процедуры разложения по малому параметру, характеризующему медленность изменения состояния по пространственным переменным. Хотя течение в объеме жидкости в подобном "квазиоднородном", "локальном" приближении определяется только вязкими свойствами, даже малые упругие напряжения могут влиять на его устойчивость через граничные условия.

Рассмотрим задачу об устойчивости прямолинейного равномерно движущегося фронта вытеснения вязкоупругой жидкости невязкой жидкостью (газом). Для основного (невозмущенного) течения на таком фронте $x = Ut$ выполняются граничные условия для скорости и нормального напряжения

$$u_x = -\frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = U, \quad p - \langle \sigma_{xx} \rangle = -\frac{\alpha}{h} \quad (2.1)$$

Здесь принят во внимание капиллярный скачок давления (α – коэффициент поверхностного натяжения), причем кривизна межфазной поверхности в поперечном к пластинам направлении принята постоянной, не зависящей от движения фронта и соответствующей идеальному смачиванию пластин заполняющей лоток жидкостью.

В объеме жидкости имеем

$$u_x = U, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3\eta}{h^2} U = \text{const}$$

При малых возмущениях фронта (1.5) линеаризованные граничные условия для возмущений, отмечаемых штрихом, на возмущенном фронте будут иметь вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u'_x \Big|_{x=Ut}, \quad \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \left(\xi \frac{\partial p}{\partial x} + p' - \xi \frac{\partial \langle \sigma_{xx} \rangle}{\partial x} - \langle \sigma'_{xx} \rangle \right) \Big|_{x=Ut}$$

и после использования соотношений для возмущений течения в объеме жидкости

$$u'_x = -\frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \langle \sigma'_{xx} \rangle = -4(\theta_1 - \theta_2) U \frac{\partial p'}{\partial x}$$

их можно переписать как условия для возмущений давления и границы

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_{x=Ut}, \quad \left(\frac{3\eta}{h^2} U + \alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \xi = \left[1 + 4(\theta_1 - \theta_2) U \frac{\partial}{\partial x} \right] p' \Big|_{x=Ut} \quad (2.2)$$

Возмущения давления удовлетворяют уравнению Лапласа. В силу линейности задачи для возмущений достаточно рассмотреть периодические по x и t возмущения

вида

$$\xi(y, t) = A(t) \exp i(ky - \omega t), \quad p' = P(x - Ut) \exp i(ky - \omega t)$$

Тогда затухающие с удалением от фронта элементарные возмущения давления даются выражением

$$p' \sim \exp[-|k|(x - Ut) +iky - i\omega t]$$

подстановка которого в граничные условия (2.2) приводит к следующему выражению для амплитуды роста малых синусоидальных возмущений границы:

$$A = A_0 \exp \kappa t; \quad \kappa = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = |k| \left(U - \frac{\alpha h^2}{3\eta} k^2 \right) (1 - 4(\theta_1 - \theta_2)U|k|)^{-1}$$

Это выражение отличается от классического результата для неустойчивости плоско-параллельного фронта вытеснения вязкой жидкости лишь [3,4] присутствием дополнительного множителя в знаменателе, зависящего от разности времен релаксации и последействия жидкости. Последний не влияет на величину критической длины волны λ_c или критического волнового числа

$$k_c = 2\pi / \lambda_c = (3\eta U / \alpha)^{1/2} / h$$

отвечающих самым коротковолновым неустойчивым возмущениям. Изменяется лишь инкремент нарастания возмущений, причем увеличивается скорость нарастания неустойчивых возмущений с волновыми числами из диапазона

$$k \leq \min(k_c, k^0), \quad k^0 = [4(\theta_1 - \theta_2)U]^{-1}$$

При малой упругости жидкости (что при фиксированной вязкости отвечает малым временам релаксации и последействия) $k^0 > k_c$ и дестабилизируются все неустойчивые возмущения. В противном случае дестабилизируются лишь наиболее длинноволновые возмущения, а для более коротких изначально неустойчивых возмущений с $k^0 < k < k_c$ согласно полученной формуле возникает стабилизация, так как множитель в знаменателе меняет знак. Вообще формально при $k^0 < k$ устойчивые и неустойчивые возмущения меняются местами. Однако следует помнить, что весь предшествующий вывод основан на использовании асимптотики медленно меняющихся по пространству (т.е. в некотором смысле длинноволновых) движений, так что вряд ли следует придавать указанному формальному выводу серьезное значение.

Максимально быстро растущие возмущения с $k < k^0$ характеризуются волновым числом

$$k_{\max} = \frac{k_c}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{8} (\theta_1 - \theta_2) U k_c \right]^{-1/2}$$

т.е. под влиянием упругости жидкости длина волны наиболее быстро растущего возмущения становится меньше.

Развитие неустойчивости кругового фронта вытеснения. В рамках такого же "квазиоднородного", "локального" приближения, при котором течение описывается обычным законом Дарси, а вязкоупругий эффект нормальных напряжений принимается во внимание лишь в граничных условиях на фронте вытеснения, рассмотрим теперь задачу устойчивости радиального вытеснения вязкоупругой жидкости.

Осредненные по узкому зазору между пластинами скорость течения и поле напряжений в плоскости зазора описываются уравнениями

$$\mathbf{u} = -\frac{h^2}{3\eta} \nabla p, \quad \Delta p = 0, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = c \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

С использованием граничных условий на круговом фронте вытеснения $r = R(t)$

$$u_r \Big|_{r=R} = \frac{dR}{dt}, \quad (p - \langle \sigma_{rr} \rangle) \Big|_{r=R} = -\alpha \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{R} \right)$$

являющихся аналогом условий (2.1), для течения в объеме жидкости получим

$$u_r = \frac{R}{r} \frac{dR}{dt}, \quad p = p_0 - \frac{3\eta}{h^2} R \frac{dR}{dt} \ln \frac{r}{R}$$

При малых возмущениях фронта (1.13) линеаризованные граничные условия для возмущений принимают вид

$$\left(u_r' + \frac{\partial u_r}{\partial r} \xi_m e^{im\varphi} \right) \Big|_{r=R} = \frac{d\xi_m}{dt} e^{im\varphi}$$

$$\left[p' - \langle \sigma_{rr}' \rangle + \frac{\partial}{\partial r} (p - \langle \sigma_{rr} \rangle) \xi_m e^{im\varphi} \right] \Big|_{r=R} = \frac{\alpha(1-m^2)}{R^2} \xi_m e^{im\varphi}$$

Для возмущений в объеме жидкости находим с учетом условия затухания на бесконечности

$$p' = \frac{3\eta}{mh^2} r u_r' = \frac{3\eta}{mh^2} \left(\frac{R}{r} \right)^m \frac{d\xi_m R}{dt} e^{im\varphi}, \quad \langle \sigma_{rr}' \rangle = 4m(\theta_1 - \theta_2) \frac{d \ln R}{dt} p'$$

При этом граничные условия сводятся к уравнению для инкремента роста малых возмущений

$$\kappa_m = \frac{1}{\xi_m} \frac{d\xi_m}{dt} \left[1 - 4(\theta_1 - \theta_2) \frac{m}{R} \frac{dR}{dt} \right] = \frac{1-m}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\alpha h^2}{3\eta} (m^2 - 1) \frac{m}{R^3}$$

В случае степенного характера изменения радиуса фронта со временем

$$R = qt^\gamma, \quad t = \tau R^\beta, \quad \beta = 1/\gamma$$

уравнение роста малых возмущений фронта можно переписать в виде

$$\kappa_m = \frac{1}{\xi_m} \frac{d\xi_m}{dR} = (m-1) \left[1 - \left(\frac{R_c}{R} \right)^{3-\beta} \right] \left[1 - \frac{m(\theta_1 - \theta_2)}{\beta \tau R^\beta} \right]^{-1}$$

$$R_c^{3-\beta} = \alpha \beta \tau m(m+1) h^2 / (3\eta)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом приближении вязкоупругость при

$$\Pi \equiv 4(\theta_1 - \theta_2) R^{-1} dR / dt \ll 1$$

не влияет на критический радиус R_c (при $R < R_c$ фронт устойчив) и лишь несколько увеличивает скорость роста неустойчивых возмущений (при $R > R_c$). Больше влияние упругость оказывает на более высокие (с большим m) гармоники.

Сильное ускорение развития неустойчивости и замена области устойчивости на область неустойчивости происходят при формальном стремлении параметра Π к $1/m$ и переходе через эти значения.

Роль упругого параметра Π быстро падает с ростом радиуса фронта, если $R(t)$ растет медленнее, чем экспоненциально.

Равномерно движущийся "язык" невязкой жидкости. Как показывает предшествующий анализ, влияние упругости жидкости на поведение свободных границ в течении Хеле-Шоу в первом приближении сводится к изменению граничного условия

для давления на свободной границе, принимающего (в отсутствие капиллярных сил) вид

$$-p + c \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^2 = 0$$

где n – направление нормали к границе. В объеме жидкости уравнения движения остаются в первом приближении теми же, что и для ньютоновской вязкой жидкости, и приводятся к уравнению Лапласа для потенциала скорости:

$$\Delta \varphi = 0, \quad \varphi = -h^2 p / (3\eta)$$

Это позволяет несколько продвинуться в исследовании и более сложных, неоднородных движений со свободной границей. Рассмотрим, в частности, классическую задачу Саффмэна – Тейлора о стационарном движении "языка" невязкой жидкости вдоль оси полособразной ячейки Хеле-Шоу (фиг. 1, а), заполненной упруговязкой жидкостью.

В рамках принятого приближения задача сводится к отысканию пары сопряженных гармонических функций φ, ψ в области ABCDEA (фиг. 1), удовлетворяющих условиям

$$\psi = 0, (x, y) \in AB; \quad \psi = \lambda UH, (x, y) \in CD$$

$$\varphi = -\beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2, (x, y) \in EA; \quad \beta = \frac{3\eta}{h^2} c = 2(\theta_1 - \theta_2)$$

При этом граница языка EA сама подлежит определению; соответствующее дополнительное краевое условие выражает тот факт, что "язык" движется как твердое тело со скоростью U , и потому вдоль EA имеем $\varphi = Uy$.

Задачу можно значительно упростить и сделать более обзримой, введя [10] вспомогательную аналитическую функцию

$$\chi = \xi + i\eta = W - Uz, \quad W = \varphi + i\psi, \quad z = x + iy \quad (2.3)$$

В плоскости χ образом неизвестной области течения является полоса Π_χ с соответствием точек, показанным на фиг. 1, б; комплексная координата z и комплексный потенциал W представляют собой аналитические функции от χ в Π_χ , удовлетворяющие краевым условиям

$$\psi = \text{Im } W = 0, \quad y = \text{Im } z = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi < 0$$

$$\psi = \text{Im } W = \lambda UH, \quad y = \text{Im } z = H, \quad \eta = -(1 - \lambda)UH, \quad -\infty < \xi < \infty \quad (2.4)$$

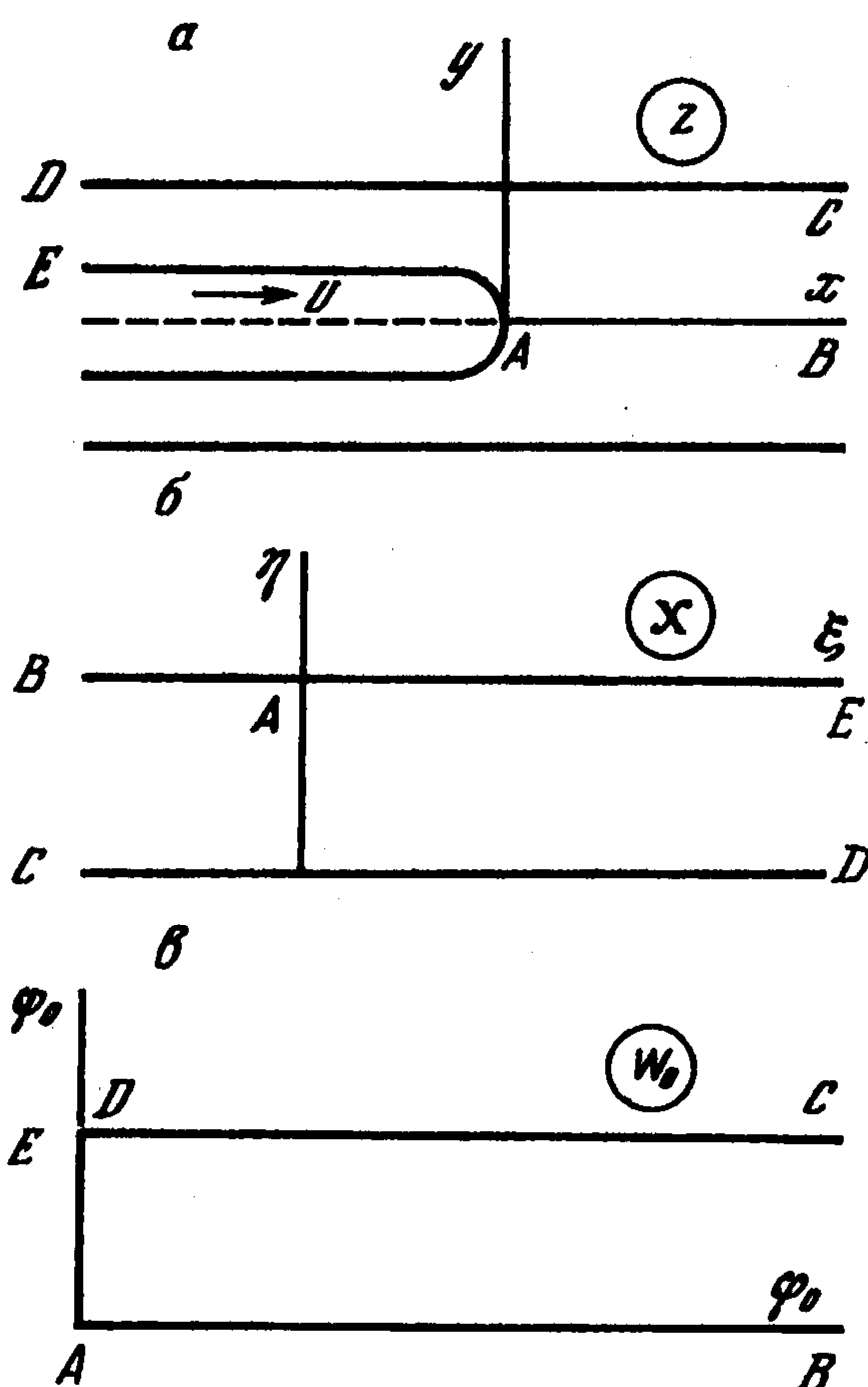
$$\varphi + \beta (\partial \psi / \partial s)^2 = 0, \quad ds / d\xi = |dz / d\xi|, \quad \eta = 0, \quad \xi > 0$$

и связанные соотношением (2.3).

При малых β , для которых, собственно, и имеет смысл рассматриваемая задача, легко найти приближенное решение, которое строится с помощью итераций. Полагая $\beta = 0$ в выражениях (2.3), (2.4), получим, прежде всего, задачу нулевого приближения

$$\psi_0 = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi < 0; \quad \psi_0 = \lambda UH, \quad \eta = -(1 - \lambda)UH, \quad -\infty < \xi < \infty$$

$$\varphi_0 = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi > 0, \quad z_0 = (W_0 - \chi) / U$$



Фиг. 1

При этом задачи отыскания $W_0(\chi)$ и $z_0(\chi)$ расщепляются и могут быть решены последовательно.

Решение задачи нулевого приближения было найдено в [3], и результат имеет вид

$$\frac{z}{H} = \frac{W_0}{\lambda UH} + \frac{2}{\pi}(1-\lambda) \ln \left[\frac{1}{2} [1 + \exp(-\mu W_0)] \right], \quad \mu \equiv \frac{\pi}{\lambda UH}$$

$$\chi = -(1-\lambda)UH \left[\frac{W_0}{\lambda UH} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{2} [1 + \exp(-\mu W_0)] \right]$$
(2.5)

Здесь $W_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ – комплексный потенциал нулевого приближения, изменяющийся в полуполосе $0 \leq \varphi_0 < \infty$, $0 \leq \psi_0 \leq \lambda UH$, показанной на фиг. 1, в. Исходный потенциал W_0 , однозначно связанный с χ вторым соотношением (2.5), удобно в дальнейшем использовать в качестве аргумента при построении последующих приближений. Для них имеем следующую последовательность задач (в плоскости χ):

$$\psi_k = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi < 0; \quad \psi_k = \lambda HU, \quad \eta = -(1-\lambda)HU, \quad -\infty < \xi < \infty$$

$$\varphi_k = -\beta \left[\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \xi} \left| \frac{dz_{k-1}}{d\xi} \right|^{-1} \right]^2 \equiv \varphi_k(\xi), \quad \eta = 0, \quad \xi > 0; \quad z_k = \frac{(W_k - \chi)}{U}$$
(2.6)

$$k = 1, \dots, n, \dots$$

При известной функции $\varphi_k(\xi)$ смешанная краевая задача (2.6) решается в замкнутой форме с помощью стандартной техники. Сперва с помощью преобразования

$$\zeta = \tau + i\theta = \exp \left[-\frac{\pi \chi}{(1-\lambda)UH} \right]$$
(2.7)

область изменения независимого переменного преобразуется в верхнюю полуплоскость, $\theta > 0$, а возникающая смешанная краевая задача решается с помощью формулы Келдыша – Седова [11]. Воспользуемся, однако, представлением всех функций через ψ_0 и φ_0 , которые рассматриваются как координаты во вспомогательной плоскости W_0 . При этом ψ_k и φ_k – гармонические функции от ψ_0 и φ_0 .

Для первого приближения ($k = 1$) имеем из (2.6)

$$\varphi_1 \Big|_{\varphi_0=0} = -\beta \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \left| \frac{dz_0}{d\xi} \right|^{-1} \right]^2 \equiv -\beta \left| \frac{dz_0}{dW_0} \right|_{\varphi_0=0}^{-2}$$

Из (2.5) следует

$$\frac{dz_0}{dW_0} \Big|_{\varphi_0=0} = \frac{i}{\lambda U} \left[1 - (1-\lambda) \exp \left[-\frac{i\mu\psi_0}{2} \right] \left(\cos \frac{\mu\psi_0}{2} \right)^{-1} \right]$$

$$\varphi_1 \Big|_{\varphi_0=0} = -\beta \lambda^2 U^2 \left[\lambda^2 + (1-\lambda)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\mu\psi_0}{2} \right]^{-1}$$
(2.8)

Соотношение (2.8) задает значение искомой функции на левой границе ($\varphi_0 = 0$) полуполосы фиг. 1, в. Кроме того, она должна удовлетворять условиям

$$\partial \varphi_1 / \partial \psi_0 = 0, \quad \psi_0 = 0; \quad \psi_0 = \lambda UH, \quad \varphi_0 \geq 0; \quad \varphi_1 \sim \varphi_0, \quad \varphi_0 \rightarrow \infty$$

Решая уравнение Лапласа для φ_1 с указанными краевыми условиями, находим

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos m\mu\psi_0 \exp(-m\mu\varphi_0)$$

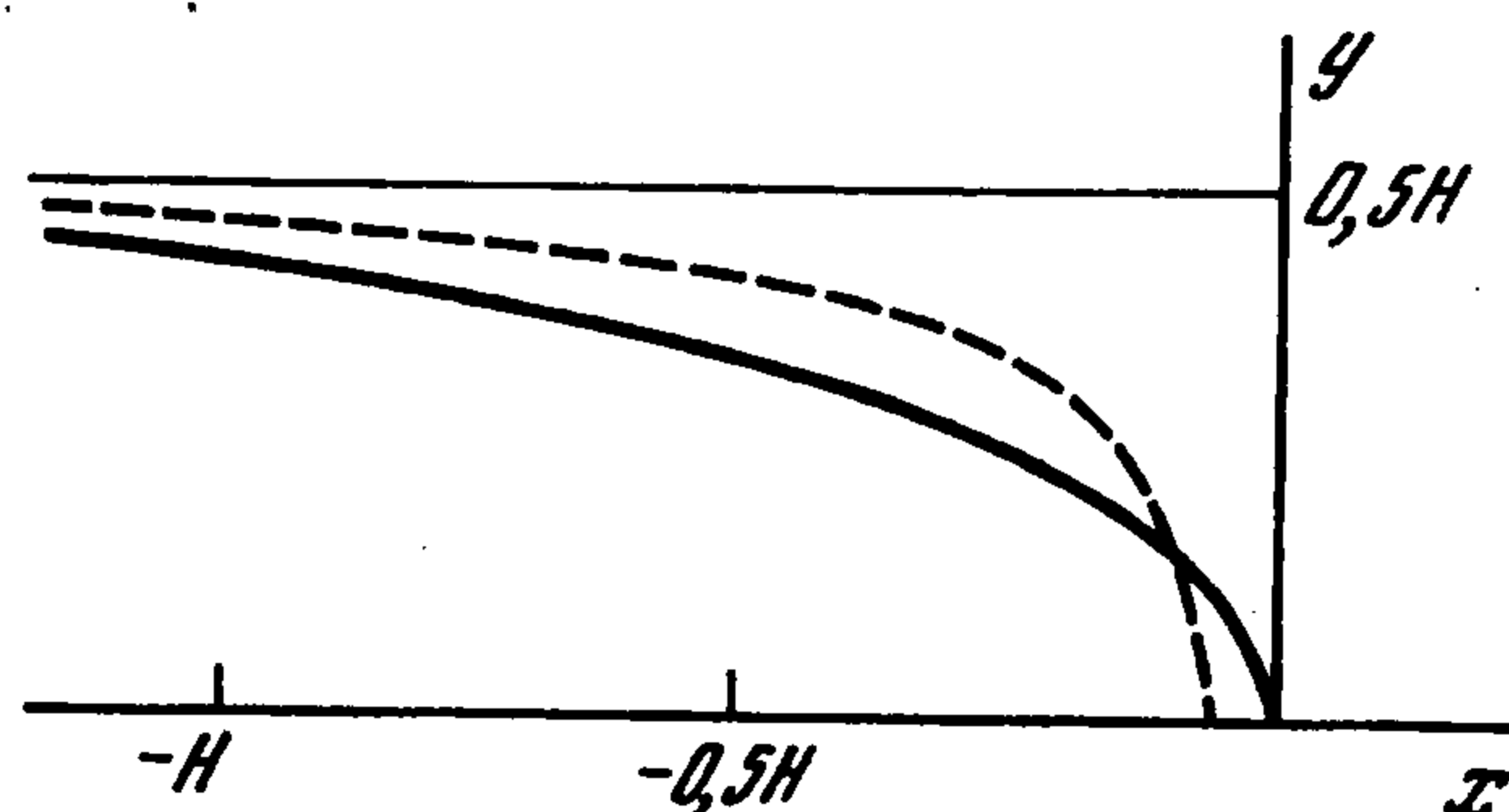
$$\psi_1 = \psi_0 - \sum_{m=0}^{\infty} C_m \sin m\mu\psi_0 \exp(-m\mu\psi_0) \quad (2.9)$$

$$W_1 = W_0 + \sum_{m=0}^{\infty} C_m \exp(-m\mu W_0)$$

$$z_1 = \frac{W_1 - \chi}{U} = z_0(W_0) + \frac{1}{U} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \exp(-m\mu W_0) \quad (2.10)$$

$$C_m = -2\beta\lambda UH^{-1} \int_0^{\lambda UH} \cos m\mu\psi_0 \left[\lambda^2 + (1-\lambda)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\mu\psi_0}{2} \right]^{-1} d\psi_0 \quad (2.11)$$

Соотношения (2.9)–(2.11) дают полное решение задачи первого приближения для произвольного λ . Как и в задаче Саффмена – Тейлора, величина λ , асимптотическое



Фиг. 2

значение ширины "языка", остается неопределенной, и решение задачи существует при всех λ между 0 и 1. Неизвестная граница "языка" получается, если положить в (2.10)

$$W_0 = i\psi_0, \quad 0 \leq \psi_0 \leq \lambda UH$$

$$z_1 = \frac{1}{\lambda U} W_0 + \frac{2}{\pi} H(1-\lambda) \ln \frac{1}{2} [1 + \exp(-\mu\psi_0)] + \frac{1}{U} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \exp(-im\mu\psi_0)$$

Особенно простым оказывается результат при $\lambda = 1/2$ (что соответствует наблюдаемым в эксперименте при достаточно больших скоростях вытеснения устойчивым "языкам"). Тогда подынтегральное выражение в (2.11) превращается в $2(1+\cos\mu\psi_0)\cos m\mu\psi_0$. Поэтому только первый ($m = 1$) коэффициент Фурье в данном случае отличен от нуля, $C_m = 0, m \neq 1$; $C_1 = -2\beta\lambda^2 U^2$. Таким образом, для возмущенной границы "языка" получаем

$$z_1(\psi_0) = z_0(\psi_0) - 2\beta\lambda^2 U^2 \left[\cos \frac{2\pi\psi_0}{UH} - i \sin \frac{2\pi\psi_0}{UH} \right]$$

В тыльной части "языка" ($\psi_0 \rightarrow UH/2$) точки границы сдвигаются относительно невозмущенного положения вперед, так как $\cos[2\pi\psi_0/(UH)] \rightarrow -1$; в передней части ($\psi_0 \rightarrow 0$) – назад на ту же величину $\beta U/2$ (конечно, форма "языка" определена лишь с точностью до сдвига как жесткого целого вдоль оси канала). Таким образом, переходная зона сокращается, и "язык" становится "более тупым". Невозмущенная и возмущенная формы "языка" показаны на фиг. 2 для $\gamma = \beta U = 0.2$.

Отметим, что непосредственная физическая трактовка данного результата применительно к "языкам", развивающимся при неустойчивом вытеснении упругих жидкостей, затруднена тем, что исходная задача имеет непрерывный спектр допустимых стационарных форм "языков" (с любым λ), и неясно, как учет упругости

повлияет на выбор "правильного" (устойчивого) решения из этого спектра. Проблема выбора исследована пока лишь при учете влияния капиллярных сил на свободную поверхность "языка".

В заключение отметим, что формальное математическое исследование, выполненное в данной работе, по существу относится к любому течению в лотке Хеле-Шоу или его аналогам иной физической природы, когда в объеме жидкости распределение давления описывается уравнением Лапласа, а граничное значение давления на свободной границе является функцией скорости продвижения границы:

$$p|_{\Gamma} = f(V_n)|_{\Gamma}$$

Такая зависимость может быть следствием не только упруговязкого поведения жидкости, но и иных физических эффектов, например, непостоянства динамического краевого угла смачивания вытесняемой жидкости. Соответствующие эффекты для течения Хеле-Шоу изучались ранее [12–14]. Не исключено, что именно они, а не обычно учитываемый вклад в капиллярное давление кривизны фронта в плоскости ячейки, играют основную роль в динамике границ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (М69000 и М69300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wilson S.D.R.* The Taylor – Saffman problem for a non-Newtonian liquid // *J. Fluid. Mech.* 1990. V. 220. P. 413–425.
2. *Homsy G.M.* Viscous fingering in porous media // *Annu. Rev. Fluid. Mech.* 1987. V. 19. P. 271–311.
3. *Saffman P.G., Taylor G.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1958. V. 245. No. 1242. P. 312–329.
4. *Chuoque R.L., Neurs Pivan, Poel C. van der.* The instability of slow, immiscible, viscous liquid–liquid displacements in permeable media // *Petrol. Trans. AIME.* 1959. V. 216. P. 188–194; Summary: *J. Petrol. Technol.* 1959. V. 11. No. 7. P. 64. P. 73.
5. *Бернадинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
6. *Pascal H.* Stability of moving interface in a porous medium for non-Newtonian displacing fluids and its application in oil displacement mechanism // *Acta Mech.* 1986. V. 58. No. 1–2. P. 81–91.
7. *Pascal H.* Rheological effects of non-Newtonian behavior of displacing fluids on stability of a moving interface in radial oil displacement mechanism // *Intern. J. Eng. Sci.* 1986. V. 24. No. 9. P. 1465–1476.
8. *Pascal H.* Stability of non-Newtonian fluid interface in a porous medium and its applications in an oil displacement mechanism // *J. Colloid Interface Sci.* 1988. V. 123. No. 1. P. 14–23.
9. *Sader J.E., Chan Derek J.C., Haghés B.D.* Non-Newtonian effects on immiscible viscous fingering in a radial Hele-Shaw cell // *Phys. Rev. Ser. E.* 1994. V. 49. No. 1. P. 420–432.
10. *Taylor G.L., Saffman P.G.* A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1959. V. 12. Pt. 3. P. 265–279.
11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
12. *Park C.-W., Homsy G.M.* Two phase displacement in Hele-Shaw cells: theory // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 139. P. 291–308.
13. *Reinelt D.A.* Interface conditions for two-phase displacement in Hele-Shaw cells // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 183. P. 219–234.
14. *Ro J.S., Homsy G.M.* Viscoelastic free surface flows; thin film hydrodynamics of Hele-Shaw and dip coating flows // *J. Non-newt. Fluid Mech.* 1995. V. 57. No. 2. P. 203–225.