УДК 532.5

© 1997 г. С.А. Вакуленко, И.А. Молотков

НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ ЭВОЛЮЦИИ ФРОНТОВ ВЫТЕСНЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассматривается одна нелинейная модель фильтрации. Изучается начальная стадия эволюции фронта вытеснения, найдены начальные условия, при которых фронт долго сохраняет устойчивую форму. Получены профили концентрации и давления в нормальном к фронту направлении. Оказывается, что концентрация здесь меняется сравнительно быстро, а давление – весьма медленно.

1. Описание задачи, выбор модели. Рассмотрим двумерную нестационарную изотермическую задачу двукомпонентной фильтрации в однородной и изотропной пористой среде без фазовых переходов. Будем моделировать процесс вытеснения одной жидкости или газа другой жидкостью или газом.

Пусть вытесняющее вещество характеризуется парциальной плотностью ρ_1, плотностью чистого вещества ρ_{10} и вязкостью μ_1. Его концентрацию в смеси обозначим c_1. Аналогичные характеристики вытесняемого вещества: $\rho_2, \rho_{20}, \mu_2, c_2$. В практически важной ситуации $\mu_1 < \mu_2$, $\rho_1 > \rho_2$. Основными искомыми величинами будем считать плотность смеси $\tilde{\rho} = \rho_1 + \rho_2$ и концентрацию вытесняемого вещества $c = c_2 = \rho_2(\rho_1 + \rho_2)^{-1}$. Полагаем, что вязкость смеси $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(c)$, изменяющаяся между значениями μ_1 и μ_2, зависит только от концентрации c. Считаем дальше всюду, что $\tilde{\mu}'(c) \geqslant 0$ и что давление p зависит только от полной плотности ρ.

Для указанных искомых функций координат и времени можно записать систему уравнений

$$m\tilde{\rho}_t = \operatorname{div}\left(\frac{kp_\rho}{\tilde{\mu}(c)}\tilde{\rho}\nabla\tilde{\rho}\right), \quad mc_t = \frac{kp_\rho}{\tilde{\mu}(c)}(\nabla\tilde{\rho}, \nabla c) + D\Delta c \tag{1.1}$$

Входящие сюда коэффициенты: пористость m, проницаемость пористой среды k, производная давления по плотности p_ρ и коэффициент диффузии D – естественно считать известными. Известной считается и функция $\tilde{\mu}(c)$. Уравнения (1.1) – следствия обычных уравнений неразрывности, диффузии и закона Дарси [1, 2].

Будем далее использовать понятие фронта вытеснения (ФВ) – замкнутой и расширяющейся со временем кривой l, в окрестности которой происходит наиболее быстрое изменение концентрации c. Такое определение ФВ оправданно, если включающий коэффициент диффузии безразмерный параметр мал (разд. 2). Внутри l расположена нагнетательная скважина, в ее окрестности $\rho \approx \rho_{10}$, $c \approx 0$. Вне l находится добывающая скважина, здесь $\rho \approx \rho_{20}$, $c \approx 1$.

Первая сложность обсуждаемой нелинейной (2 + 1)-мерной задачи состоит в том, что при ее решении необходимо найти не только искомые функции $\tilde{\rho}$, c, но и неизвестную кривую l. Вторая сложность связана с наблюдаемой неустойчивостью ФВ, проявляющейся во вторжении вытесняющего вещества во внешнюю (нефтегазовую) зону в виде узких вязких пальцев, именуемых также пальцами Саффмана–Тейлора [3].

Главная цель работы – исследование эволюции ФВ в ее начальной стадии, когда образование вязких пальцев только начинается.

2. Переход к безразмерным величинам, малые параметры. Введем некоторые средние (эффективные) значения для плотности и вязкости, а также масштабы длины L и времени T, к которым отнесем пространственные координаты и время, сохранив для них, а также для операций div, ∇, Δ прежние обозначения. Для безразмерных функций $\rho = \tilde{\rho} / \rho_0$, c, $\mu(c) = \tilde{\mu}(c) / \mu_0$ вместо (1.1) получаем систему уравнений

$$\rho_t = A \operatorname{div} \frac{\rho \nabla \rho}{\mu(c)}, \quad c_t = A \frac{\nabla \rho, \nabla c}{\mu(c)} + B \Delta c, \quad A = \frac{k p_\rho \rho_0}{m \mu_0} \frac{T}{L^2}, \quad B = \frac{D}{m} \frac{T}{L^2} \tag{2.1}$$

Величина безразмерных и постоянных коэффициентов A и B может быть оценена. В реальных условиях возможны два варианта

1) $A = A_0, B = \varepsilon^2 B_0$; 2) $A = \varepsilon A_0, B = \varepsilon^2 B_0$

в которых A_0 и B_0 порядка единицы, а $\varepsilon \sim 10^{-5}$. Эти варианты в принципиальном плане не различаются. Будем рассматривать в дальнейшем первый вариант, т.е. систему уравнений

$$\rho_t = \operatorname{div}(\mu^{-1} \rho \nabla \rho), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(\mathbf{x}); \quad c_t = \mu^{-1}(\nabla \rho, \nabla c), \quad c|_{t=0} = c_0(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

в которой положено $A_0 = 1$, иначе можно было перейти к переменной $\tau = A_0 t$. Ясно, что фильтрация в слабо неоднородной пористой среде также может быть описана в рамках системы уравнений (2.2).

Исследование таких сингулярно возмущенных систем можно провести двумя различными способами, которые дают эквивалентные результаты.

Первый способ – это подстановка анзатца типа Уизема

$$\rho = R(\delta^{-1} S(x,t,\delta), x, t, \delta), \quad c = C(\delta^{-1} S(x,t,\delta), x, t, \delta)$$

где S – неизвестная фаза, δ – малый параметр, связанный с ε. Для C и R возникает так называемая эталонная задача, которая часто имеет автомодельное решение (например, зависящее от $x - vt$). Для S также естественным образом возникает некоторое уравнение, которое и описывает распространение фронта l волны.

Второй способ связан с идеями пограничного слоя. Вводим в окрестности кривой l безразмерные длину нормали $|n|$ к l и длину дуги s вдоль l. Предполагая, что l – замкнутая, гладкая и без самопересечений кривая, считаем, что $n > 0$ вне области, ограниченной l, и $n < 0$ внутри нее. Вводим также быструю переменную $\nu = \delta^{-1} n$. После этого также возникает (аналогичное упомянутому выше) эталонное уравнение. Далее рекуррентная процедура позволяет описать геометрические характеристики фронта l и закон его эволюции со временем.

Описанная схема успешно действует в ряде важных задач, описываемых квазилинейными уравнениями второго порядка. Здесь же возникает ряд принципиальных трудностей, которые существенно отличают систему (2.2) от рассмотренных ранее.

3. Априорные оценки, оценка локальной скорости движения ФВ. Из общей теории [4, 5] известно, что для доказательства существования решений системы (2.2) для всех $t > 0$ достаточно получить некоторые априорные оценки. Эти оценки, а также некоторую информацию об эволюции решений можно получить методом верхних и нижних функций [5].

Естественно считать, что начальные значения $\rho_0(\mathbf{x})$, $c_0(\mathbf{x})$ решений системы (2.2) удовлетворяют условиям

$$\rho_{20} < \rho_0(\mathbf{x}) < \rho_{10}, \quad 0 < c_0(\mathbf{x}) < 1 \tag{3.1}$$

Видно, что постоянные ρ_{20}, 0 и ρ_{10}, 1 дают нижнее и верхнее решения. Следовательно, имеем априорные оценки

$$\rho_{20} \leqslant \rho(\mathbf{x},t) < \rho_{10}, \quad 0 \leqslant c(\mathbf{x},t) \leqslant 1 \tag{3.2}$$

гарантирующие существование решения.

Для одномерного варианта

$$\rho_t = (\rho\rho_x\mu^{-1}(c))_x, \quad c_t = \mu^{-1}(c)c_x\rho_x + \varepsilon^2 c_{xx} \tag{3.3}$$

можно получить дополнительную информацию. Предположим, что в начальный момент $t = 0$ функция $c_0(x) = c(x, 0)$ монотонна, $c_0'(x) > 0$. Докажем, что аналогичное свойство имеется и при всех $t > 0$. Дифференцируем второе уравнение (3.3) по x, получаем уравнение, содержащее $u = c_x$. Для этого уравнения $u \equiv 0$ – нижнее решение. Тогда [5]

$$c_x(x, t) \geqslant 0 \tag{3.4}$$

Аналогично предположение $\rho_0'(x) < 0$ влечет неравенство

$$\rho_x(x,t) \leqslant 0 \tag{3.5}$$

Полученные оценки для ρ_x и c_x позволяют оценить функцию $\rho(x, t)$ снизу. Оказывается, что эта функция мажорирует функцию $Z^{1/2}(x, t)$, удовлетворяющую уравнению $Z_t = \mu Z^{1/2} Z_{xx}$.

Решения этого уравнения ведут себя примерно так же, как решения стандартного уравнения теплопроводности. В частности, их расплывание по x при возрастании t следует из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z_t^2 (\mu Z^{1/2})^{-1} dx = -\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} Z_x^2 dx$$

Далее можно оценить $|\rho_x|$ на некотором интервале

$$0 \leqslant t \leqslant T_\varepsilon \tag{3.6}$$

начальной эволюции ФВ, когда $|c_x| \ll c_1\varepsilon^{-1}$, $|c_{xx}| \ll c_2\varepsilon^{-2}$. В качестве нижней функции для ρ_x возьмем функцию $-a(t)\mu(x,t)$. Можно показать,что функция $a(t)$ может быть выбрана в виде

$$a(t) = \sup_x |\rho_{0x}| \mu(x,t) \exp(c_2 t) \tag{3.7}$$

Здесь c_2 – постоянная, возникающая при оценке $|c_{xx}|$ на интервале (3.6):

$$\sup_x |c_{xx}(x,t)| < c_2\varepsilon^{-2}$$

Наконец, используя (3.5), можно построить верхнюю и нижнюю оценки для функции $c(x, t)$:

$$\tilde{c}(x - At, t) \leqslant c(x,t) \leqslant \tilde{c}(x + At, t), \quad A = \sup_{0<t<T_\varepsilon} a(t) \tag{3.8}$$

где $\tilde{c}$ – решение уравнения теплопроводности

$$\tilde{c}_t = \varepsilon^2 \tilde{c}_{xx}, \quad \tilde{c}|_{t=0} = c_0(x) \tag{3.9}$$

Неравенства (3.8) позволяют оценить скорость движения фронта на начальном этапе процесса. Именно на интервале (3.6) кривизна фронта может нарастать, однако скорость его перемещения не превышает постоянную A, которая ограничивает снизу величину $\mu^{-1}(c_0)|\nabla\rho_0|$.

Полученная оценка ведет к следующей практической рекомендации. Неустойчивость ФВ тем меньше, чем меньше производная от выражения $\rho_{0n}\mu^{-1}(c_0)$ вдоль l, т.е. по переменной s.

На основании приведенных оценок и вычислений можно описать физический механизм образования неустойчивости формы фронта. Дальнейшие рассуждения не вполне строгие, так как они частично базируются на полученных выше оценках, доказанных лишь для одномерного случая. Однако эти оценки достаточно убедительны в случае квазиплоского фронта, т.е. фронта с малой начальной кривизной.

Итак, предположим, что в начальный момент вектор

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mu^{-1}\nabla\rho$$

меняется весьма плавно, так что $|\nabla\mathbf{V}| < \delta$, $|\nabla^2\mathbf{V}| < \delta \ll 1$. Пока величина $\varepsilon^2|\Delta c|$ мала, этот вектор по-прежнему слабо меняется по $\mathbf{x}$ и почти не изменяет с ростом t своего начального значения, что доказывается аналогично выводу выражения нижней функции для ρ_x. Поэтому уравнение (2.6) хорошо аппроксимируется уравнением

$$c_t = \mathbf{V}(\delta\mathbf{x}, \delta t)\nabla c$$

или, при учете предположения о квазиплоском фронте, уравнением $c_t = V(\delta x, \delta t)c_n$. При начальном условии $c|_{t=0} = c_0(\mathbf{x})$ соответствующее решение имеет вид $c(\mathbf{x}, t) = c_0(\mathbf{x} + \mathbf{V}t)$. Это означает, что каждый участок фронта распространяется со своей локальной скоростью $\mathbf{V}$, определяемой начальным значением $\mu^{-1}\nabla\rho$. Таким образом, здесь имеем обычную картину кинематической неустойчивости, когда разные участки фронта движутся с разной скоростью.

По мере нарастания $|\nabla\mathbf{V}|$ и $|\nabla c|$ картина усложняется. Для описания поведения решений при временах, когда $|\nabla c| \sim \varepsilon^{-1}$, необходимо применение других методов. При дополнительном предположении о малости кривизны фронта такая работа проделана в разд. 5.

4. Эталонная задача. Попытаемся найти автомодельное в старшем порядке решение $\rho = R(z)$, $c = C(z)$, $z = x - vt$ одномерных уравнений (3.3). При этом $\mu(c) = M(z)$. Для краткости пусть $\rho_i \equiv \rho_{i0}$. Функции R, C должны удовлетворять граничным условиям

$$R(z_+) = \rho_2, \quad R(z_-) = \rho_1, \quad C(z_+) = 1, \quad C(z_-) = 0, \tag{4.1}$$

где для задачи на бесконечном интервале $z_\pm = \pm\infty$.

После подстановки и интегрирования имеем

$$-vR + Kv = RR'M^{-1}, \; K = \text{const} \tag{4.2}$$

$$-C'(v + R'M^{-1}) = \varepsilon^2 C'' \tag{4.3}$$

Уравнение (4.2) после использования граничного условия дает

$$v\int_{z_-}^{z_+} M(z)dz = S(K) \equiv \rho_1 - \rho_2 + K\ln\frac{\rho_1 - K}{\rho_2 - K} \tag{4.4}$$

Видно, что решение рассматриваемой задачи на бесконечном интервале изменения z отсутствует, поскольку правая часть (4.4) по модулю не меньше, чем $(z_+ - z_-)|v|\mu_1$. Однако, используя (4.4), можно доказать существование решений двухточечной краевой задачи (4.1)–(4.3) на большом, но конечном интервале, когда $z_\pm = \pm\delta^{-1}$, δ – малый параметр.

Предположим, что функция R выражена в виде

$$R = R_1(-vU(z), K), \quad \rho_2 \leqslant R \leqslant \rho_1; \quad U(z) = \int_{z_-}^{z} M(C(z'))dz' \tag{4.5}$$

Выражение R_1 может быть найдено из уравнения $vU = \rho_1 - R_1 + K\ln(\rho_1 - K) - K\ln(R_1 - K)$. Оно является вполне непрерывным функционалом от $C(z)$, если $C(z)$ – непрерывная функция. Пусть

$$\Phi(z,\delta,\varepsilon,K) = vK\varepsilon^{-2}\int_z^{\delta^{-1}} \frac{dz'}{R(z')}, \quad \langle\mu\rangle = 2\delta\int_{-\delta^{-1}}^{\delta^{-1}} M(z)dz$$

Постоянная v определена соотношением $v = 2\delta S(K)\langle\mu\rangle^{-1}$, вытекающим из (4.4). Подстановка (4.5) в (4.3) приводит к равенству

$$C(z) = (c_2 - c_1)[\exp\Phi(z,\delta,\varepsilon,K) - E_-](E_+ - E_-)^{-1} + c_1 \equiv T[C(\cdot)](z) \tag{4.6}$$

$$c_{2,1} \equiv C(\pm\delta^{-1}), \quad E_\pm \equiv \exp\Phi(\pm\delta^{-1},\delta,\varepsilon,K)$$

Здесь фаза Φ – нелинейный, вполне непрерывный функционал на множестве непрерывных на $(-\delta^{-1}, \delta^{-1})$ функций $C(z)$, таких, что $c_1 \leqslant C(z) \leqslant c_2$. Согласно (4.6), T – такой же функционал и отображает указанное множество функций в себя. Следовательно, по принципу Шаудера решение уравнения (4.6) существует. Тогда для каждого K, такого, что $S(K) > 0$, существует решение краевой задачи (4.1)–(4.3) с некоторым положительным значением скорости v.

Найденное решение можно следующим образом использовать при малых $\delta \ll \varepsilon^2$. В этом случае имеем

$$C'(-\delta^{-1}) = O(e^{-c\varepsilon^2}), \quad C'(\delta^{-1}) = O(\delta\varepsilon^{-2}), \quad R'(\pm\delta^{-1}) = O(\delta)$$

Следовательно, если продолжим решение за пределы интервала $(-\delta^{-1}, \delta^{-1})$, полагая

$$C = c_1, \quad R = \rho_1 \ (z < -\delta^{-1}), \quad C = c_2, \quad R = \rho_2 \ (z > \delta^{-1})$$

то получим обобщенное решение задачи класса $W^{2,1}$, удовлетворяющее системе уравнений с малой невязкой (невязка представляет собой функционал $L_{\varepsilon,\delta}$ на классе функций Шварца с нормой, не превышающей $\delta\varepsilon^{-2}$). Похожая идея была применена в [6].

Рассмотрим детально поведение решения $C(z)$, $R(z)$. Формула (4.6) показывает, что концентрация c резко меняется в окрестности фронта. Крутизна графика этой функции нарастает с уменьшением ε. Это связано с тем, что уравнение (4.3) содержит малый параметр. В то же время плотность ρ и давление p в окрестности ФВ изменяются сравнительно медленно, а градиент давления заметен и вдали от ФВ.

5. Критерий устойчивости фронта малой кривизны. В разд. 3 был рассмотрен вопрос об эволюции фронта малой кривизны, когда $|\nabla\rho|$ и $|\nabla c|$ малы и $|(\nabla\rho, \nabla c)|$ много больше, чем $\varepsilon^2\Delta c$. Можно ожидать, что в результате временно́й эволюции формируются решения, для которых членом $\varepsilon^2\Delta c$ пренебречь уже нельзя. Представляет интерес вопрос, как меняются при этом со временем нормальная скорость и кривизна таких фронтов. Для более простых уравнений и систем этот вопрос решен, см. [7–10].

В однородной среде (когда коэффициенты уравнений не зависят от x и t) для скорости v фронта в нормальном к нему направлении имеем

$$v = -\alpha\varkappa + v_0 \tag{5.1}$$

где $\varkappa$ – кривизна фронта (в многомерном случае – средняя кривизна), v_0 – постоянная, определяемая из решения эталонной задачи. Для вычисления постоянной α может быть предложена некоторая процедура.

Для уравнений из [8, 9] всегда $\alpha > 0$. Для некоторых других систем, как показано Курамото [10], возможно $\alpha < 0$. Для таких систем имеется диффузионная неустойчивость фронта: фронт, имеющий первоначально малую кривизну, вскоре может оказаться сильно изогнутым.

Главный физический эффект – будет фронт устойчив или нет – полностью определяется знаком α.

В рассматриваемой задаче, которая значительно сложнее изучавшихся ранее, трудно создать регулярную процедуру построения поправок. Воспользуемся иным способом, который позволит определить знак α. Можно проверить, что этот способ дает правильный ответ и в изучавшихся ранее случаях.

Пусть фронт – плоская гладкая кривая l, без самопересечений и с очень малой кривизной $\varkappa$, $|\varkappa| \ll \delta \ll \varepsilon^2$, где δ – малый параметр, использованный в разд. 4. Вводя стандартные координаты (n, s), где n - длина нормали к фронту, s – длина дуги вдоль него, получаем систему уравнений

$$-\nu\ \rho_n = \left(\frac{\rho\rho_n}{\mu(c)}\right)_n + \varkappa(s)\left[\frac{\rho\rho_n}{\mu} - n\left(\frac{\rho\rho_n}{\mu}\right)_n\right] \tag{5.2}$$

$$-\nu\ c_n = \rho_n c_n \mu^{-1}(c) + \varepsilon^2 c_{nn} \tag{5.3}$$

Полагаем, что член с $\varkappa$ в (5.2) носит поправочный характер в соответствии с условием $|\varkappa| \ll \delta$ и поскольку $\nu \sim \delta$. Поэтому функции ρ и c могут быть определены формулами разд. 4.

Проинтегрируем уравнение (5.2) по n в пределах от $-\delta^{-1}$ до δ^{-1}. После этого находим, что

$$\alpha = 2\int_{-1/\delta}^{1/\delta} \frac{\rho\rho_n}{\mu}dn - n\frac{\rho\rho_n}{\mu}\Bigg|_{-1/\delta}^{1/\delta} \tag{5.4}$$

Здесь следует подставить $\rho = R(n)$. В изученных задачах из [8, 9] внеинтегральный член всегда исчезал и знак α легко определялся из соображений монотонности ρ по n. Теперь же требуется определенная аккуратность, поскольку оба члена в (5.4) – одного порядка.

Используем (4.2), откуда после преобразований имеем

$$\alpha = \frac{\nu}{4\delta}\left(\frac{\rho_{10}+\rho_{20}}{2} - \langle R\rangle\right),\quad \langle R\rangle = 2\delta\int_{-\delta^{-1}}^{\delta^{-1}} R dn \tag{5.5}$$

Таким образом, знак α зависит от того, что больше – среднее R по всем n или среднее от граничных значений ρ_{10} и ρ_{20}. В первом случае происходит устойчивое распространение, во втором – распад фронта.

Для анализа величины α были проведены численные расчеты непосредственно для исходных уравнений в частных производных в пространственно-одномерном случае, когда $0 \leqslant x \leqslant L$, $\rho(0) = \rho_1 > \rho_2 = \rho(L)$, $c(0) = 0$, $c(L) = 1$. Если бы функция $\rho(x)$ была линейной, то получилось бы, что $\alpha = 0$. Однако расчеты показали, что функция $\rho(x)$ выпукла вверх, хотя и весьма слабо. Поэтому величина α очень мала по абсолютной величине, но отрицательна, т.е. фронт слабо устойчив. При учете неодномерности процесса неустойчивость ФВ может возникать на самой начальной стадии процесса.

Авторы благодарят О.Ю. Динариева за ценные советы по формулировке задачи, В.М. Шелковича и Я.И. Белопольскую – за полезное обсуждение и Н.М. Бессонова – за помощь в численных расчетах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96–02–18050).

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. Отв. ред. П.Я. Полубаринова-Кочина. М.: Наука, 1969. 545 с.
2. *Николаевский В.Н., Бондарев Э.А., Миркин М.И. и др.* Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.
3. *Saffman P.G., Taylor G.* The penetration of a fluid into a porous medium of Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. of London. Ser. A. 1958. V. 245. № 1242. P. 312–329.
4. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.
6. *Fusco G.A.* Geometric approach to the dynamics of $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u)$ for small ε // Lecture Notes in Physics: Problems Involving Change of Type. Berlin; Heidelberg: Springer, 1990. V. 359. P. 53–73.
7. *Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А.* Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987. 352 с.
8. *De Mottoni P., Schatzman M.* Évolution géométrique d'interphace // C. r. Acad. Sci. Ser. 1. Math. 1989. V. 309. № 7. P. 453–458.
9. *Molotkov I.A., Vakulenko S.A.* Autowave propagation for general reaction-diffusion systems // Wave Motion, 1993. V. 17. N 3. P. 255–266.
10. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. New York: Springer, 1984. 156 p.

Санкт-Петербург, Москва

Поступила в редакцию
12.V.1994