УДК 533

© 1996 г. Л.В. Овсянников, А.П. Чупахин

РЕГУЛЯРНЫЕ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Дается описание всех регулярных подмоделей системы уравнений газовой динамики с уравнением состояния общего вида. Подмодели классифицируются по типам, определяемым рангом и дефектом. Приводятся классификационные таблицы, комментарии к ним и некоторые характерные примеры.

Программа ПОДМОДЕЛИ [1] имеет целью исчерпание всех возможностей, вытекающих из свойства симметрии дифференциальных уравнений, для построения подмоделей (систем уравнений пониженной размерности), описывающих классы точных решений исходных уравнений. В настоящей работе, в рамках этой программы, сообщается описание всех (с точностью до подобия) регулярных подмоделей системы уравнений газовой динамики с уравнением состояния общего вида. Регулярные подмодели [2] выделяются тем, что в них инвариантные независимые переменные являются функциями только от исходных независимых переменных.

1. Общие положения. Рассматривается система E дифференциальных уравнений с n независимыми переменными $x=(x^1,\dots,x^n)$ и m искомыми функциями $u=(u^1,\dots,u^m)$ переменных x. Пусть E допускает локальную группу Ли H преобразований пространства $R^{n+m}(x,u)$, имеющую *универсальный инвариант* $I=(I^1,\dots,I^l)$.

Определение 1. *H-подмоделью* типа (σ, δ) системы E называется система уравнений $E|_M$, получаемая сужением E на инвариантное многообразие M группы H, имеющее размерность $n+\delta$ в $R^{n+m}(x,u)$ и размерность σ в пространстве инвариантов $R^l(I)$, причем $\sigma \geqslant 0$ и $0 \leqslant \delta < m$. Число σ называется *рангом*, а число δ – *дефектом* H-подмодели. Решения системы $E|_M$ называются *частично инвариантными решениями* ранга σ и дефекта δ или, коротко, $H(\sigma,\delta)$*-решениями*.

Если такое M существует, то компоненты I всегда можно выбрать так, что с разложениями $u=(u',u'')$, $I=(I',II'')$, где $u'=(u^1,\dots,u^{m-\delta})$, $I'=(I^1,\dots,I^{m-\delta})$ будут выполнены соотношения (gr означает «общий ранг»)

$$\partial I''/\partial u'=0,\ \mathrm{gr}\|\partial I'/\partial u'\|=m-\delta,\ \mathrm{gr}\|\partial I''/\partial(x,u'')\|=\sigma \tag{1.1}$$

$$\sigma=l-m+\delta \tag{1.2}$$

Тогда, если положить

$$v=I'(x,u),\quad y=I''(x,u'') \tag{1.3}$$

то уравнения M можно записать в виде

$$M\colon v=V(y) \tag{1.4}$$

Равенства (1.3) задают *представление* $H(\sigma,\delta)$-решений через инварианты группы H. Уравнения подмодели $H(\sigma,\delta)$ получаются подстановкой этого представления в уравнения E. В результате система E распадается на две подсистемы: *инвариантную подсистему* E/H для искомых функций $V(y)$ и дополнительную, вообще говоря, переопределенную подсистему П для «лишних» функций (ЛФ) $u''(x)$. Если П несовместна, то множество $H(\sigma,\delta)$-решений пусто. Поэтому проблема отыскания $H(\sigma,\delta)$-решений упирается в первую очередь в исследование совместности уравнений П (*приведение* П *в инволюцию*).

Определение 2. *Мерой нерегулярности* $H(\sigma,\delta)$-подмодели называется число

$$\mu = \mathrm{gr}\|\partial I'' / \partial u''\|;$$

если $\mu = 0$, то $H(\sigma,\delta)$ подмодель называется *регулярной*, а если $\mu > 0$, то *нерегулярной*.

Существенные различия между регулярными и нерегулярными подмоделями описаны в [2]. В частности, для регулярных решений инвариантные независимые переменные y (1.4) в подсистеме E/H зависят только от исходных независимых переменных, что сильно облегчает приведение в инволюцию подсистемы П.

В приложениях обычно используется не сама группа H, а ее *алгебра Ли операторов с базисом*

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha(x,u)\partial_{x^i} + \eta^k_\alpha(x,u)\partial_{u^k} \quad (\alpha = 1,\ldots,r) \tag{1.5}$$

Тогда число l определяется общим рангом матрицы из координат операторов (1.5)

$$r_* = \mathrm{gr}\|\xi^i_\alpha(x,u), \quad \eta^k_\alpha(x,u)\|$$

а именно, $l = n + m - r_*$. Подстановка в (1.2) дает формулу

$$\sigma = \delta + n - r_* \tag{1.6}$$

определяющую ранг σ по заданному дефекту δ.

Как известно [3], возможные значения дефекта δ удовлетворяют неравенствам

$$\max\{r_* - n, 0\} \leqslant \delta \leqslant \min\{r_* - 1, m - 1\} \tag{1.7}$$

Из неравенств (1.7) и формулы (1.6) следует, что число различных типов (σ, δ) равно nm.

Определение 3. $H(\sigma,0)$-решения называются *инвариантными H-решениями* ранга σ (всегда $\sigma < n$).

Для инвариантных H-решений в (1.3) будет $y = I''(x)$, т.е. все инвариантные H-решения регулярны. Для них подмодель $E|_M$ состоит из одной инвариантной подсистемы E/H, подсистема П пуста, и проблемы приведения в инволюцию нет.

Если дефект $\delta > 0$, то процесс приведения подсистемы П в инволюцию может ветвиться и давать *различные классы* $H(\sigma,\delta)$-решений. Некоторые из этих классов могут оказаться $H_1(\sigma_1,\delta_1)$-решениями для *подгруппы* $H_1 \subset H$. Как известно [3], при этом всегда $\sigma_1 \geqslant \sigma$, $\delta_1 \leqslant \delta$. Введение следующего понятия исходит из того, что классы $H(\sigma,\delta)$-решений данного ранга с меньшим дефектом или меньшего ранга с данным дефектом описывать и исследовать проще.

Определение 4. Если некоторый класс $H(\sigma,\delta)$-решений является классом $H_1(\sigma_1,\delta_1)$-решений с *подгруппой* $H_1 \subset H$, причем

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \delta_1 < \delta \tag{1.8}$$

то говорят, что для этого класса имеет место *редукция* $H(\sigma,\delta)$-*решений к меньшему дефекту*. Наоборот, если некоторый класс $H(\sigma,\delta)$-решений является классом

$H_2(\sigma_2,\delta_2)$-решений с *надгруппой* $H_2 \supset H$, причем

$$\sigma_2 < \sigma, \quad \delta_2 = \delta \tag{1.9}$$

то говорят, что для этого класса имеет место *обратная редукция* $H(\sigma,\delta)$-решений *к меньшему рангу*.

Особенно часто встречается редукция к инвариантному решению. Некоторые достаточные признаки такой редукции, позволяющие предвидеть ее на основании структурных свойств подсистемы П, указаны в [3].

2. Уравнения газовой динамики. На 9-мерном *базовом пространстве* $R^9(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\rho,S)$ с независимыми переменными t (время), $\mathbf{x}=(x,y,z)$ (декартовы координаты в R^3) и искомыми величинами $\mathbf{u}=(u,v,w)$ (вектор скорости), ρ (плотность), S (энтропия) рассматривается система E:

$$\rho D\mathbf{u}+\nabla p=0, \quad D\rho+\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}=0, \quad DS=0, \quad p=F(\rho,S) \tag{2.1}$$

Здесь $D=\partial_t+\mathbf{u}\cdot\nabla$, $\nabla=(\partial_x,\partial_y,\partial_z)$. Давление p определяется *уравнением состояния* (последнее в (2.1)). $F(\rho, S)$ предполагается заданной гладкой функцией общего вида, удовлетворяющей неравенствам $F_\rho=c^2>0$, где c – скорость звука, и $F_S>0$.

Известно [3], что система (2.1) допускает 11-параметрическую локальную группу Ли G_{11} преобразований пространства R^9. Алгебра Ли L_{11} этой группы имеет следующий базис операторов вида (1.5):

$$\begin{aligned}
&X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad X_3=\partial_z\\
&X_4=t\partial_x+\partial_u, \quad X_5=t\partial_y+\partial_v, \quad X_6=t\partial_z+\partial_w\\
&X_7=y\partial_z-z\partial_y+v\partial_w-w\partial_v\\
&X_8=z\partial_x-x\partial_z+w\partial_u-u\partial_w\\
&X_9=x\partial_y-y\partial_x+u\partial_v-v\partial_u\\
&X_{10}=\partial_t, \quad X_{11}=t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Нормализованная оптимальная система подалгебр ΘL_{11} приведена в [1]. Она состоит из 220 представителей, каждый из которых является потенциальным производителем $H(\sigma,\delta)$-подмоделей.

В дальнейшем эти представители обозначаются символом $L_{r,i}$, где r – размерность подалгебры, а i – порядковый номер подалгебры данной размерности согласно таблице ΘL_{11}.

3. Типы подмоделей. В системе (2.1) $n=4$ и $m=5$. Поэтому для (2.1) априори возможны 20 типов $H(\sigma,\delta)$-подмоделей. Эти типы вычисляются по соотношениям (1.6) и (1.7).

Результат, представленный в табл. 1, содержит исходную информацию о числе различных подмоделей каждого типа. Здесь принято во внимание, что подмодели определяются не только их типом, но зависят также от конкретного представления алгебры Ли L_{11} операторами (2.2) в пространстве R^9. Например, из (2.2) непосредственно видно, что величины ρ, S и p являются инвариантами любой подгруппы из G_{11}.

В первых двух столбцах табл. 1 указан тип (σ, δ). В третьем приведены возможные размерности пространства инвариантов l. Четвертый столбец дает информацию о числе N подалгебр из оптимальной системы ΘL_{11}, которые могут порождать различные подмодели. Здесь число N представлено суммой $N_1(r_1)+N_2(r_2)$, где r_k – размерность подалгебр, $N_k(r_k)$ – число подалгебр размерности r_k. В пятом столбце в

Таблица 1

σ	δ	l	N	N_{reg}	Примечания
3	0	8	13 (1)	13 (1)	инвариантные
2	0	7	26 (2)	26 (2)	инвариантные
3	1		26 (2)	1 (2)	
1	0		38 (3)	38 (3)	инвариантные
2	1	6	51 (3)	12 (3)	
3	2		47 (3)	–	
0	0		5 (4)	5 (4)	инвариантные изобарические
1	1	5	46 (4) + 1 (5)	29 (4)	
2	2		47 (4) + 1 (5)	1 (4)	
3	3		47 (4) + 2 (5)	–	
0	1		22 (5) + 2 (6)	22 (5)	частные изобарические
1	2	4	35 (5) + 13 (6)	9 (5) + 1 (6)	
2	3		35 (5) + 8 (6)	–	
3	4		35 (5) + 8 (6)	–	
0	2		13 (6) + 10 (7)	13 (6) + 10 (7)	частные изобарические
1	3	3	1 (6) + 8 (7)	1 (7)	барохронное
2	4		1 (6) + 5 (7)	–	
0	3	2	1 (≥7)	1 (≥7)	изобарические
1	4		1 (7)	–	изэнтропические и баротропные
0	4	1	–	–	нет

тех же обозначениях указано число N_{reg} тех подалгебр, которые порождают различные *регулярные* подмодели. Прочерк означает отсутствие подмоделей данного типа. Шестой столбец содержит указания на конкретные классы решений.

Среди описываемых системой (2.1) движений газа выделяются часто встречающиеся в классификации подмоделей упоминаемые ниже классы движений.

Тип (1,4). *Изэнтропические движения*, $S = \text{const}$. Система (2.1) сводится к следующей:

$$\rho D\mathbf{u} + F'(\rho)\nabla\rho = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad p = F(\rho) \tag{3.1}$$

с заданной функцией $F(\rho)$.

Тип (1,4). *Баротропные движения*, $p = P(\rho)$. Такое движение либо изэнтропическое когда $P(\rho) = F(\rho)$, либо с переменной энтропией. В последнем случае система (2.1) сводится к следующей:

$$D\mathbf{u} + \nabla e = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad De = 0 \tag{3.2}$$

с удельной энтальпией $e = e(\rho)$, через которую давление выражается формулой $p = \int \rho e(\rho) d\rho$.

Тип (1,3). *Барохронные движения*, $p = p(t)$, $\rho = \rho(t)$. Такое движение является изэнтропическим. Система (2.1) сводится к следующей:

$$D\mathbf{u} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = -\rho'/\rho, \quad p(t) = F(\rho(t)) \tag{3.3}$$

с заданной функцией $F(\rho)$.

Тип (0,3). *Изобарические движения*, $p = \text{const}$. Система (2.1) сводится к следующей:

$$D\mathbf{u} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad D\rho = 0, \quad F(\rho, S) = \text{const} \tag{3.4}$$

с заданной функцией $F(\rho, S)$, определяющей зависимость $\rho(S)$.

Системы уравнений (3.2)–(3.4) являются переопределенными. Для (3.4) известно выражение общего решения через произвольные функции [4]. Система (3.3) легко приводится в инволюцию, но для нее общее решение не построено. Остается нерешенной также задача о приведении в инволюцию системы (3.2).

На структуру подмодели сильное влияние оказывает тот факт, что величины ρ и S – инварианты любой подалгебры из ΘL_{11}. В частности, подмодели типа (0,4) невозможны, так как ранг $\sigma = 0$ означает, что следует положить $\rho = \mathrm{const}$ и $S = \mathrm{const}$, а дефект $\delta = 4$ означает, что должно быть 4 ЛФ, тогда как искомыми остаются только три: u, v, w. В силу того же факта все подмодели типа (0, δ) описывают изобарические движения. Все решения типа (0,0) (в том числе постоянное решение) содержатся в классе решений типа (1,0), порожденных подалгеброй $L_{3,33}$ с базисом X_2, X_3, X_{10} и имеющих вид

$$u = 0, \quad v = v(x), \quad w = w(x), \quad \rho = \rho(x), \quad p = \mathrm{const}$$

Все инвариантные подмодели (тип (σ, 0)) описаны отдельно и в данной работе не приводятся (тип (3,0) опубликован в [1]). Поэтому ниже описываются только единственно возможные регулярные подмодели типов (3,1), (2,2) и серии регулярных подмоделей типов (2,1), (1,1) и (1,2). Выделяется одна подмодель типа (1,2), которую можно назвать *канонической*, так как она возникает и в ряде других подмоделей.

Ниже для краткости зависимость величин u, v,... от переменных t, x,... обозначается символом $(u,v,\ldots)|(t,x,\ldots)$.

4. Каноническая подмодель типа (1,2). Описывает двумерный вариант барохронных движений и порождается подалгебрами $L_{5,17}, L_{5,37}, L_{6,8^{00}}$. Они имеют один и тот же набор инвариантов: t, u, ρ, S с ЛФ v, w. Представление решений:

$$(u,\rho,S)|t; \quad (v,w)|(t,x,y,z)$$

Из (3.3) следует $u'(t) = 0$, т.е. $u = \mathrm{const}$. За счет галилеева переноса по x можно сделать $u = 0$, и тогда уравнения (3.3) сведутся к следующим:

$$v_t + vv_y + wv_z = 0, \quad w_t + vw_y + ww_z = 0 \tag{4.1}$$

$$v_y + w_z = 2h \tag{4.2}$$

с подлежащей определению функцией $h = h(t)$, через которую $\rho = \rho(t)$ находится из уравнения $\rho' = -2h\rho$.

Условия совместности системы (4.1), (4.2) имеют вид

$$v_y w_z - v_z w_y = k \tag{4.3}$$

$$k = h' + 2h^2, \quad k' + 2hk = 0 \tag{4.4}$$

В силу этих условий вся система (4.1)–(4.4) находится в инволюции. Эта система интересна тем, что ее решение находится в общем виде через произвольные функции.

Заменой переменных

$$z = Z(t,y,v), \quad w = W(t,y,v) \tag{4.5}$$

система линеаризуется и принимает вид

$$W_v = Z_y + 2hZ_v, \quad W_y = -kZ_v \tag{4.6}$$

$$W_t + vW_y = 0, \quad Z_t + vZ_y = W \tag{4.7}$$

Подсистема (4.6) интегрируется как система уравнений с постоянными коэффициентами. Форма решения зависит от дискриминанта $d = h^2 - k$: система (4.6) гиперболическая при $d > 0$, эллиптическая при $d < 0$ и параболическая при $d = 0$. Функции $h(t)$ и $k(t)$ легко находятся решением системы (4.4) и оказываются рациональными функциями от t. Подсистема (4.7) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и тоже интегрируется явно. Окончательно решение определяется неявно из соотношений (4.5) с известными функциями Z и W.

5. Регулярная подмодель типа (3,1). Порождается подалгеброй $L_{2,26}$ с базисом X_1, X_4. Инварианты t, y, z, v, w, ρ, S и ЛФ u. Представление решения:

$$u = u(t,x,y,z); \quad (v, w, \rho, S) | (t,y,z)$$

Система (2.1) принимает вид

$$D'u + uu_x = 0, \quad \rho D'v + p_y = 0, \quad \rho D'w + p_z = 0 \tag{5.1}$$

$$D'\rho + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \quad D'S = 0, \quad p = F(\rho, S)$$

где $D' = \partial_t + v\partial_y + w\partial_z$.

Для приведения системы (5.1) в инволюцию достаточно заметить, что в силу четвертого уравнения u_x есть функция только от t, y, z. Поэтому для ЛФ u можно взять представление

$$u = (x + X)/h \tag{5.2}$$

с некоторыми функциями $X = X(t,y,z)$, $h = h(t,y,z)$. После подстановки (5.2) система (5.1) превращается в систему

$$\rho D'v + p_y = 0, \quad \rho D'w + p_z = 0, \quad D'\rho + \rho(v_y + w_z) = -\rho / h \tag{5.3}$$

$$D'S = 0, \quad D'X = 0, \quad D'h = 1$$

Система (5.3) в инволюции. Она может трактоваться как подмодель двумерных движений газа с источником массы (правая часть в третьем уравнении), зависящим от решения.

С модифицированными плотностью и давлением $\rho^* = h\rho$, $p^* = hp$ из (5.3) формально получается подмодель двумерных движений газа без источника, но с «уравнением состояния», зависящим от функции h: $p^* = hF(\rho^* / h, S)$.

6. Регулярная подмодель типа (2,2). Порождается подалгебрами $L_{4,47}$ и $L_{5,14}$, имеющими одинаковые наборы инвариантов t, x, v, ρ, S с ЛФ u, w. Представление решения:

$$(u, \rho, S) | (t,x); \quad (v, w) | (t,x,y,z)$$

Со вспомогательной инвариантной функцией $h = h(t, x)$ система (2.1) распадается на инвариантную подсистему

$$\rho(u_t + uu_x) + p_x = 0, \quad \rho_t + u\rho_x + \rho u_x + 2\rho h = 0 \tag{6.1}$$

$$S_t + uS_x = 0, \quad p = F(\rho, S)$$

и переопределенную подсистему для ЛФ v, w

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = 0, \quad w_t + uw_x + vw_y + ww_z = 0 \tag{6.2}$$

$$v_y + w_z = 2h$$

Условия совместности здесь таковы:

$$v_y w_z - v_z w_y = k(t,x) \tag{6.3}$$

$$h_t + uh_x + 2h^2 = k, \quad k_t + uk_x + 2hk = 0$$

Таблица 2

i	Базис $L_{3,i}$	Инварианты		ЛФ	Хар. класс
		независимые	искомые		
6	1, 4, α7 + 11	$R/t,\ \theta - \alpha \ln t$	V, W	u	χ^s
8	7, 8, 9	t, r	U, H	ω	χ^e
11	1, 4, 7	t, R	V, W	u	χ^e
13	2, 3, 7	t, x	u, q	φ	χ^e
15^{00}	3 + 5, 2–6, 7	t, x	u, V^*	θ^*	χ^e
17	1, 4, 7 + 10	$R, \theta - t$	V, W	u	χ^s
23	1, 4, α6 + 11	$y/t,\ z/t - \alpha \ln t$	$v,\ w - z/t$	u	χ^s
27^{00}	3, 6, 4 + 10	$x - \frac{1}{2}t^2,\ y$	$u - t,\ v$	w	χ^s
29	1, 4, 10	y, z	v, w	u	χ^s
38_1^{000}	3, 1 + 5, 6	$t,\ x - y/t$	$u,\ v - y/t$	w	χ^e
38_2^{000}	3, 5, 2 + 6	t, x	$u,\ w + tv - y$	v	χ^e
46	1, 2, 4	t, z	v, w	u	χ^e

Система (6.1)–(6.3) находится в инволюции. Видно, что подсистема (6.2), (6.3) аналогична канонической (4.1)–(4.4) и в точности совпадет с ней после введения лагранжевой координаты $\xi = \xi(t, x)$ как решения уравнения $\xi_t + u\xi_x = 0$ и замены переменных $(t, x) \to (t, \xi)$. Поэтому подсистема (6.2), (6.3) интегрируется явно и остается лишь подсистема (6.1) одномерных движений газа с источником массы $2\rho h$.

Функция $\xi(t, x)$ может быть выбрана так, что будут верны выражения

$$\rho = k\xi_x, \quad \rho u = -k\xi_t \tag{6.4}$$

точно интегрирующие второе уравнение (6.1). Так как здесь $S = S(\xi)$, то для функции $\xi(t, x)$ можно получить одно квазилинейное уравнение второго порядка с известными коэффициентами (аналогично случаю стандартных одномерных движений газа).

7. Регулярные подмодели типа (2,1). Согласно табл. 1 таких подмоделей всего 12 и все они порождаются некоторыми трехмерными подалгебрами $L_{3,i}$ из оптимальной системы ΘL_{11} [1]. Подробное описание этих подмоделей существует; здесь оно дается в сокращенной форме в виде табл. 2.

В первом столбце табл. 2 указаны номера i порождающих подалгебр $L_{3,i}$. Во втором приведены базисы операторов подалгебр $L_{3,i}$ в обозначениях (2.2), причем каждый оператор X_k представлен только своим номером k, а запись α7 + 11, где α – произвольное вещественное число, означает оператор $\alpha X_7 + X_{11}$ и т.д. В следующих двух столбцах выписаны базисы инвариантов подалгебр $L_{3,i}$ с использованием следующих стандартных обозначений: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $R = \sqrt{y^2 + z^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(z/y)$, $V = v\cos\theta + w\sin\theta$, $W = -v\sin\theta + w\cos\theta$, $q = \sqrt{v^2 + w^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(w/v)$. Индивидуальные обозначения приняты для $i = 8$, где U и H – величины соответственно радиальной и касательной к сферам $r = \text{const}$ компонент вектора скорости $\mathbf{u}$, а ω – угол между проекцией $\mathbf{u}$ на сферу и меридианом. Для $i = 15^{00}$ введены величины V^* и θ^* из представления

$$v = \frac{ty + z}{t^2 + 1} + V^*\cos\theta^*, \quad w = \frac{tz - y}{t^2 + 1} + V^*\sin\theta^*$$

Таблица 3

i	Базис $L_{5,i}$	Инварианты		ЛФ	Дубли	
		независимые	искомые		$r=5$	$r=6$
7	1, 5, 6, α4 + 7, β4 + 11	R/t	$u-\alpha\varphi-\beta\ln t$	q, φ		
10	2, 3, 5, 6, β4 + 7 + α11	$x/t-(\beta/\alpha)\ln t$	$u-x/t$	v, w	26	6^0
13	2, 3, 5, 6 β4 + 7	t	$u-x/t$	v, w	35	15
15	1, 2, 3, 4, 7	t	q	u, φ		
16	1, 4, 3 + 5, 2–6, 7	t	V^*	u, θ^*		
17	2, 3, 5, 6, 1 + 7	t	u	v, w	37	8^{00}
18	2, 3, 5, 6, β4 + 7 + β10	$x-\frac{1}{2}t^2$	$u-t$	v, w	31	12^{00}
19	2, 3, 5, 6, 7 + 10	x	u	v, w	33	13
36	2, 3, 4, 5, 1 + 6	t	$w-tu-x$	u, v		

Во всех подмоделях инвариантами являются также величины ρ и S, указание которых для краткости записи опущено. В пятом столбце указаны ЛФ. Последний столбец показывает дополнительную качественную особенность подмодели – ее *характеристический класс* χ^e или χ^s. К классу χ^e относятся те подмодели, уравнения которых имеют сходство с уравнениями *одномерных неустановившихся движений*, имеющими гиперболический тип. К классу χ^s относятся те подмодели, уравнения которых имеют сходство с уравнениями *двумерных установившихся течений*, имеющими смешанный эллиптико-гиперболический тип.

Для всех подмоделей из табл. 2 установлено существование соответствующих частично инвариантных решений. Подмодель для $i = 8$ изучалась в работе [5]. При анализе подмодели для $i = 15^{00}$ выяснилось, что в ней имеет место редукция к инвариантному решению. Все остальные подмодели из табл. 2 нередуцируемы.

8. Регулярные подмодели типа (1,2). Все они, кроме одной, порождаются пятимерными подалгебрами $L_{5,i}$. Исключением является подмодель, порождаемая подалгеброй $L_{6,10}$ с базисом $X_1, X_2, X_3, X_7, X_8, X_9$, инвариантами t, $|\mathbf{u}|$, ρ, S и ЛФ v, w. Она описывает специальные барохронные движения, в которых модуль скорости постоянен:

$$u^2+v^2+w^2=a^2 \quad (a=\text{const}) \tag{8.1}$$

Такие решения существуют, но для соответствующей переопределенной системы (3.3), дополненной соотношением (8.1), общее решение в конечном виде не найдено.

Список порождающих подалгебр $L_{5,i}$ дается в табл. 3, аналогичной табл. 2. Здесь учитывается важный *эффект дублирования*: не подобные подалгебры порождают одну и ту же подмодель. Такие подалгебры имеют одинаковые универсальные инварианты, что возможно из-за специального вида представления алгебры Ли L_{11} операторами (2.2). Эффект дублирования учтен в табл. 3 указанием всех значений i, определяющих данную подмодель и шестимерных подалгебр (последний столбец), порождающих ту же подмодель.

Подмодель для $i = 17$ уже упоминалась в разд. 4 как каноническая. Установлено,

Таблица 4

i	Базис $L_{4,i}$	Инварианты		ЛФ
		независимые	искомые	
1	7, 8, 9, 11	r/t	U, H	ω
4	1, 4, 10, 7 + α11	$\mathrm{Re}^{-\alpha\theta}$	$q, \varphi-\theta$	u
5^0	5, 6, 7, β4 + 11	$x/t-\beta\ln t$	$u-x/t, q^*$	φ^*
6	1, 4, 7, 11	R/t	$q, \varphi-\theta$	u
7^0	2, 3, 7, β4 + 11	$x/t-\beta\ln t$	$u-x/t, q$	φ
9^0	1, 5, 6, β4 + 7	t	$u-\beta\varphi^*, q^*$	φ^*
10^0	2, 3, 4, 7	t	$u-x/t, q$	φ
12	1, 2, 3, β4 + 7	t	$u-\beta\varphi, q$	φ
13	7, 8, 9, 10	r	U, H	ω
14	2, 3, 7, 10	x	u, q	φ
16^0	2, 3, 7, 4 + 10	$x-\frac{1}{2}t^2$	$u-t, q$	φ
17	4, 5, 6, 7	t	$u-x/t, q^*$	φ^*
18	4, 5, 6, 1 + 7	t	$u+(\varphi^*-x)/t, q^*$	φ^*
19	4, 3 + 5, 2–6, α1 + 7	t	$u+(\alpha\theta^*-x)/t, V^*$	θ^*
20	1, 3 + 5, 2–6, α4 + 7	t	$u-\alpha\theta^*, V^*$	θ^*
21	2, 3, 4, 1 + 7	t	$u+(\varphi-x)/t, q$	φ
23	1, 4, 10, 11	z/y	v, w	u
29	1, 4, 6, α5 + 11	$y/t-\alpha\ln t$	$v-y/t,\ w-z/t$	u
30^0	2, 3, 6, β4 + σ5 + 11	$x/t-\beta\ln t$	$u-x/t,\ v-\sigma\ln t$	w
35^0	2, 3, 5, 4 + β6 + 10	$x-\frac{1}{2}t^2$	$u-t,\ w-\beta t$	v
36^0	2, 3, 5, 6 + 10	x	$u, w-t$	v
38	2, 3, 5, 10	x	u, w	v
41	1, σ2 + τ3 + 4, α3 + 5, β2 + 6	t	$j_1,\ j_2$	u
42	1, 4, 3 + 5, 2–6	t	$V^*,\ \theta^*$	u
43	1, 4, 5, 6	t	$v-y/t,\ w-z/t$	u
44	2, α1 + 3, 1 + 5, 6	t	$u, v-\alpha tw-x+\alpha z$	w
46	2, α1 + 3, 5, 6	t	$u, w+(x-\alpha z)/\alpha t$	v
48	1, 2, 3 + 5, 6	t	$u, v+tw-z$	w
50	1, 2, 3, 4	t	v, w	u

что во всех подмоделях ($i = 10$, 13, 18, 19) есть подсистема уравнений, равносильная канонической типа (1,2).

9. Регулярные подмодели типа (1,1). Все 29 подмоделей этого типа порождаются четырехмерными подалгебрами $L_{4,i}$. Их сокращенное описание представлено в табл. 4, построенной по тем же принципам и в тех же обозначениях как и табл. 2, 3. Дополнительно возникающие здесь инварианты q^*, φ^*, j_1, j_2, определены равенствами

$$v = y/t + q^*\cos\varphi^*, \quad w = z/t + q^*\sin\varphi^*$$

$$j_1 = (t^2-\alpha\beta)v + (\sigma t-\beta\tau)u - ty + \beta z$$

$$j_2 = (t^2-\alpha\beta)w + (\tau t-\alpha\sigma)u - \alpha y + tz$$

Для всех подмоделей из табл. 4 соответствующие $H(1,1)$-решения существуют. Подмодели, в которых независимой переменной является t, определяют частные барохронные движения газа.

10. Заключительные замечания. В итоге данного исследования получен полный список из 100 регулярных частично инвариантных подмоделей уравнений газовой динамики (2.1) с уравнением состояния газа общего вида $p = F(\rho, S)$. Их значение для газовой динамики определяется в первую очередь тем, что они описывают точные решения системы (2.1). Физическое содержание многих из перечисленных подмоделей обусловлено возможностью постановки для них задачи со специальными начальными данными.

Например, подмодель порождаемая подалгеброй $L_{4,48}$ из табл. 4, описывающая частный случай барохронных движений газа, дает решения вида

$$u = 0, \quad v = z - tw, \quad w = w(t,x,y,z), \quad \rho = \rho(t), \quad S = \text{const}$$

где указанные функции удовлетворяют системе уравнений

$$w_t + vw_y + ww_z = 0, \quad w_z - tw_y = h$$

$$\rho' / \rho = -h$$

$$h' + h^2 = 2k, \quad k' + hk = 0, \quad p = F(\rho)$$

в которой $h = h(t)$, $k = k(t)$, штрихом обозначена производная по t.

Решение этой системы однозначно определяется начальными данными при $t = 0$:

$$u = 0, \quad v = z, \quad w = -k_0 y + h_0 z + W(x)$$

$$\rho = \rho_0, \quad h = h_0, \quad k = k_0$$

где ρ_0, k_0, h_0 – произвольные постоянные, $W(x)$ – произвольная функция. Решение находится в явном виде и содержит произвольную функцию одного аргумента. Оно описывает движение газа типа волны, бегущей по пространственному расширяющемуся фону.

Для специальных уравнений состояния (политропный газ и др.) такой список будет, вообще говоря, шире в соответствии с классификацией «больших» моделей газовой динамики [1].

Нерегулярных подмоделей для системы (2.1) так же достаточно много, но они пока остаются для дальнейших исследований. Такие подмодели существуют, как правило, лишь для специальных уравнений состояния. Проблема их существования связана с нетривиальными вопросами о приведении переопределенных систем в инволюцию. Некоторое представление о возникающих при этом трудностях можно получить из работ [6, 7], где в основном эта проблема обсуждается (среди прочих) для частично инвариантных подмоделей типов (2,2) и (3,3), порожденных подалгеброй $L_{4,40}$ с базисом X_1, X_2, X_3, X_{10}.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–17326).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
2. *Овсянников Л.В.* Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 2. С. 156–159.
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 339 с.
4. *Овсянников Л.В.* Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1792–1799.
5. *Овсянников Л.В.* Особый вихрь // ПМТФ. 1995. № 3. С. 45–52.
6. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
7. *Мелешко С.В.* О неизэнтропических стационарных пространственных и плоских нестационарных двойных волнах // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 255–260.

Новосибирск

Поступила в редакцию
4.VIII.1995