УДК 533.7

© 1996 г. В.В. Струминский

РАЗВИТИЕ И ОБОСНОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ В XX ВЕКЕ

Построена новая кинетическая теория, близкая к динамическим процессам. Получена система из M интегродифференциальных уравнений и система из M обыкновенных дифференциальных уравнений в частных производных. Теория продемонстрирована на примерах расчета структуры сильных ударных волн, расчета турбулентных течений в плоском канале. Показано, что теория структуры сильных ударных волн с поразительной точностью совпадает с многочисленными опытными данными. Расчеты турбулентного течения хорошо аппроксимируют опытные данные, но поразительно, что единая теория хорошо описывает как турбулентное ядро в центре канала, так и ламинарный подслой у стенки.

Основы кинетической теории газов были заложены в конце прошлого века Больцманом. На базе законов классической механики и качественных интуитивных соображений им было получено знаменитое интегродифференциальное кинетическое уравнение. Первые приближенные решения были даны самим Больцманом. Он обосновал гидродинамические уравнения с учетом вязкого трения.

Основные положения кинетической теории Больцмана были подвергнуты серьезной критике учеными (его современниками), которую он не мог убедительно опровергнуть. Лошмидт первым указал на симметрию законов механики по отношению к прошлому и будущему; в кинетической теории Больцмана этой симметрии не существует.

Для получения кинетического уравнения Больцман принял гипотезу молекулярного хаоса, которая до сих пор вызывает сомнения, связанные со следующими обстоятельствами.

При строго упругих соударениях молекул выполняются все законы сохранения, а на молекулярном уровне образуется упорядоченное распределение поля коррелированных скоростей. Поэтому подынтегральные выражения в теории Больцмана сами оказываются инвариантными относительно упругих соударений; здесь не нужно привлекать понятие хаоса.

Цермело обратил внимание на теорему Пуанкаре, согласно которой система материальных частиц имеет квазипериодический характер движения. Для совокупности частиц в 1 см^3 при нормальных условиях Больцман провел необходимые расчеты. При разумных требованиях к точности возвращения оно состоится, но потребное время возвращения будет огромным. Квазипериодичность доказана. Поэтому возвращение состоится только при отсутствии хаоса.

В наше время ведущие ученые мира Н.Н. Боголюбов и др. строгими математическими методами вывели уравнение Больцмана из уравнения Лиувилля без привлечения гипотезы молекулярного хаоса.

Больцман показал также, что энтропия материи в замкнутом объеме возрастает, а ее работоспособность уменьшается – материя стремится к хаосу, к тепловой смерти. Больцман, кроме того, выдвинул так называемую флуктуационную гипотезу, которая внесла некоторое успокоение, но не могла удовлетворить квалифицированных оппонентов.

В нашем веке основные положения теории Больцмана получили фундаментальные теоретические развития и обоснования.

1°. В начале века появилось несколько различных методов решения уравнений Больцмана: Гильберта [1], Чепмена – Энскога [2, 3], а также метод Грэда [4] и другие со множеством модификаций. При решении одних и тех же задач эти методы приводили к различным выражениям, но, как правило, к физически ясным и практически одинаковым результатам.

2°. В середине XX века интерес к кинетической теории газов сильно возрос во всем мире, что было связано со стремительным развитием скоростной авиации и космической техники. В 1946 г., практически одновременно, появились работы Н.Н. Боголюбова [5], Борна и Грина [6], Кирквуда [7], в которых получены фундаментальные результаты по кинетической теории.

Исходя из уравнения Лиувилля и вытекающей из него цепочки кинетических уравнений, указанным ученым строго математически удалось получить кинетическое уравнение Больцмана.

В работах автора [8, 9] также приводится вывод кинетического уравнения Больцмана из уравнения Лиувилля с учетом особого интегрального вида взаимодействия, не свойственного классической механике, так как молекулы ведут себя при этом как нелокализованные частицы. Учет этого интегрального вида взаимодействия позволил строго построить необратимое решение цепочки кинетических уравнений и прийти к кинетическому уравнению Больцмана. Учет этого интегрального вида взаимодействия фактически свидетельствует о том, что функция распределения вероятности нахождения частиц в шестимерном фазовом пространстве различным образом зависит от быстрого и медленного времени.

Кроме того, автор показал, что метод Гильберта не позволяет построить правильное решение кинетического уравнения Больцмана [10, 11] и предложил новый, более общий метод решения [12] по сравнению с указанным в вышецитируемых работах. В этом методе учитывается, что функция распределения зависит как от быстрого, так и от медленного времени. Этот метод, фактически основан на идеях метода Пуанкаре [13].

В результате завершения приведенного выше цикла теоретических работ стало ясно, что в прошлом веке выдающемуся ученому Больцману удалось получить кинетическое уравнение для газов и вытекающие из него уравнения гидродинамики, которые были строго теоретически обоснованы в XX веке.

3°. Кроме того, Больцманом были получены кинетические уравнения для газовых смесей, описывающие движение отдельных компонент газа. Для М-компонентной газовой смеси это кинетическое уравнение было записано в виде

$$\frac{df_s}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{\tau=1}^{M} \iiint \left(f_\tau' f_s' - f_\tau f_s\right) q_{\tau s} b db d\varepsilon d\mathbf{v}_\tau = \sum_{\tau=1}^{M} I\left(f_\tau f_s\right) \qquad (1)$$

где $f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_s$ – функция распределения вероятности s-той компоненты смеси в шестимерном фазовом пространстве, $q_{\tau s}$ – начальная относительная скорость этих молекул, b – их прицельное расстояние, $1/\varepsilon$ – мера частоты столкновения, ε – малая величина. Функцию распределения разлагают по параметру ε:

$$f_s(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) = f_s^{(0)}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) + \varepsilon f_s^{(1)}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) + \varepsilon^2 f_s^{(2)}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) + \ldots \qquad (2)$$

В первой половине нашего века для решения системы кинетических уравнений Больцмана был применен тот же метод Чепмена – Энскога [2].

При решении системы кинетических уравнений этим методом для газовых смесей в нулевом приближении оказалось необходимым потребовать, чтобы сумма всех интегралов соударения в нулевом приближении была равна нулю, что следует из (1) и (2):

$$\sum_{\tau=1}^{M} I\left(f_\tau^{(0)}, f_s^{(0)}\right) = 0$$

Это привело к тому, что кинетическая теория смогла описывать только движение газовой смеси лишь в целом и определить среднемассовые параметры потока, а движение отдельных компонент в приближении Эйлера оставалось совершенно неопределенным, что также следует из известных результатов.

4°. Только в начале 70-х годов в Академгородке Новосибирска остро назрела проблема разделения газовых смесей, но никакой теории не существовало, поэтому автор был вынужден разработать новый метод решения кинетического уравнения для газовой смеси. Для успешного описания движения данной компоненты газовой смеси она должна иметь свое интегральное уравнение с присущим ей интегральным ядром, в то время как для других компонент интегральные ядра должны учитываться в последующем приближении.

Интегральное уравнение для газовой смеси было поэтому записано в виде

$$\varepsilon\left(\frac{df_s}{dt}-\sum_{\tau\neq s}^{M} I\left(f_\tau f_s\right)\right)=I\left(f_s f_s\right) \tag{3}$$

В этом случае оказалось возможным определить парциальные параметры для каждой компоненты потока, а нулевое приближение было записано также только для основной компоненты смеси:

$$I\left(f_\tau^{(0)}, f_s^{(0)}\right)=0 \tag{4}$$

Этот метод докладывался в 1971 г. на семинарах в московских институтах Академии наук СССР и Московском университете. В 1972 г. он был доложен на Восьмом Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике в Москве [14], а в 1974 г. опубликован [15]. Метод позволяет описывать движение и разделение многокомпонентных газовых смесей в трубах, каналах и диффузорах, а также теоретически определять движение пылевидного катализатора в химико-технологических аппаратах. Расчеты приведены в [16], а модификация метода Чепмена – Энскога для двухтемпературной бинарной газовой смеси в работе [17].

Метод решения системы уравнений Больцмана для газовых смесей, предложенный автором, позволяет определить средние парциальные параметры потока (плотности, скорости и температуры) для каждой компоненты газовой смеси:

$$\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_M;\quad v_1,v_2,\ldots,v_M;\quad T_1,T_2,\ldots,T_M$$

По этим парциальным параметрам потока простым суммированием найдем среднемассовые параметры, т.е. получим решение Чепмена – Энскога.

В указанных выше работах была впервые получена многопараметрическая система газодинамических уравнений

$$\frac{\partial v_s^\alpha}{\partial t}+v_s^\beta\frac{\partial v_s^\alpha}{\partial r_\beta}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial p_s}{\partial r_\alpha}=\frac{16}{3\rho_s}\sum_{\tau\neq s}^{M}\frac{\rho_s\rho_\tau\Omega_{\tau s}^{(11)}}{m_\tau+m_s}\left(v_\tau^\alpha-v_s^\alpha\right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t}+v_s^\alpha\frac{\partial T_s}{\partial r_\alpha}+\frac{2}{3}T_s\frac{\partial v_s^\alpha}{\partial r_\alpha}=\frac{16}{3}\sum_{\tau\neq s}^{M}\frac{\rho_s\rho_\tau\Omega_{\tau s}^{(11)}}{m_\tau+m_s}\left\{\frac{3k}{2m}\left(T_\tau-T_s\right)+q_{\tau s}\left(\mathrm{v}_\tau-\mathrm{v}_s\right)^2\right\} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t}+\frac{\partial \rho_s v_s^\alpha}{\partial r_\alpha}=0 \tag{7}$$

где $q_{\tau s}=\dfrac{m_s T_s}{T_\tau+T_s}$; $\Omega_{\tau s}^{(11)}$ – табличные интегралы.

Здесь впервые появился важнейший вид взаимодействия между скоростными потоками $v_\tau^\alpha-v_s^\alpha$, который еще сыграет определенную роль в науке.

Исследования, выполненные в течение XX века, показали, что подавляющее большинство аэродинамических течений вполне удовлетворительно описываются уравнениями Эйлера и Навье – Стокса, а также уравнениями многокомпонентной газовой динамики [15].

5°. В прошлом веке Больцман так много занимался законом изменения энтропии систем, так много переживал по этому поводу, что следует, хотя бы вкратце, коснуться этого вопроса.

Исходя из своего кинетического уравнения, он показал, что энтропия в замкнутых объемах возрастает $dS/dt \geqslant 0$, и мир стремится к тепловой смерти. Это положение вызывало определенные сомнения и возражения. Видимо, для смягчения этих возражений Больцман выдвинул, как уже отмечалось, так называемую "флуктуационную гипотезу" – энтропия флуктуирует во времени. За положительной флуктуацией $dS/dt > 0$ последует отрицательная $dS/dt < 0$.

Однако на Земле, в нашей Солнечной системе, в нашей Галактике энтропия не может убывать, здесь интенсивно протекают диссипативные процессы.

В то же время во Вселенной образовались такие скопления материи, в которых энергия накапливается, а энтропия убывает. Возможность появления таких образований во Вселенной предсказывалась еще Лапласом. Строгие теоретические результаты были получены Шварцшильдом в 1916 г. на основе точных решений уравнений Эйнштейна для симметричных случаев. Только в 1963 г. Керру для задачи Шварцшильда удалось обнаружить решение для гравитационного поля вращающейся "черной дыры". Таким образом, было показано, что во Вселенной могут существовать материальные области с различной энергетикой и различными законами изменения энтропии.

Для определения области космического пространства будем иметь $dS/dt \gtrless 0$.

Тогда в нашей Солнечной системе и в нашей Галактике для области без "черных дыр" $dS/dt > 0$, что вытекает из данной многопараметрической кинетической теории, в то время как у Больцмана $dS/dt \geqslant 0$.

6°. В течение XX века методы кинетической теории материи были подключены к решению подавляющего большинства аэродинамических проблем и показали свою высокую эффективность. В то же время ряд важнейших аэродинамических проблем не были поняты и решены с позиций кинетической теории и уравнений Навье – Стокса.

Это относится к следующим проблемам.

Структура сильных ударных волн. Над этой проблемой с начала века работал Прандтль, который впервые столкнулся с непреодолимыми трудностями. Расчеты на базе уравнений Навье – Стокса сильно расходились с экспериментальными данными. Подобные же результате были получены Мотт-Смиттом и другими учеными.

Турбулентные течения жидкости и газа. Еще в конце прошлого века на основе своих простейших опытов с подкрашенными струйками жидкостей Рейнольдс пришел к выводу, что турбулентность в потоке зарождается в результате потери устойчивости исходного ламинарного течения. На основе этой идеи Рейнольдс [18] разделил все параметры потока на средние и пульсационные. В течение всего XX века проблемой турбулентности занимались ведущие ученые мира: Прандтль, Карман, Гейзенберг, Ландау и др.

Кнудсеновские слои. Значительные трудности возникают при исследовании тонких кнудсеновских слоев, имеющих несколько хаотических зон, которые не перемешиваются между собой. Толщина таких слоев меньше длины свободного пробега молекул.

По указанным проблемам ведущие ученые мира высказывали множество своих точек зрения и конкретных предложений. Подавляющее большинство из них оказались малоэффективными.

В 50-х годах в США директор Авиационного Центра НАСА построил первые бестурбулентные трубы. Затем директор Института механики СО Академии наук в Новосибирске построил первые в СССР бестурбулентные трубы и провел первые исследования. Испытания плоской пластинки в бестурбулентных трубах привели к резкому увеличению критического числа Рейнольдса $3 \cdot 10^6$, в то время как граница устойчивости практически осталась прежней: $6 \cdot 10^4$. Появилась огромная переходная область. В передней половине этой области пульсаций не наблюдалось. Во второй половине наблюдались колебания с заметной амплитудой, которая возрастала при приближении к точке перехода. Появившиеся в переходной зоне сложные пульсации указывают на то, что пространственные явления могут послужить основой для новой трактовки проблемы перехода.

Уже из приведенных материалов видно, что простое разделение движения газа на малые колебания неустойчивой природы и некоторые осредненные движения (по Рейнольдсу) не могут быть признаны обоснованными. В каждом конкретном случае точная постановка проблемы турбулентности должна быть своей, но до сих пор таких постановок пока не было найдено.

В то же время существует большой класс различных турбулентных течений, которые имеют для человечества огромное значение. В середине нашего века такие течения изучались экспериментально Никурадзе [19] и др. В частности, им было показано, что в круглых трубах профиль скорости не меняется на протяжении многих десятков калибров. Это важнейшее положение может, в частности, облегчить решение проблемы турбулентности. Им мы и воспользуемся в дальнейшем. Но не следует его слишком упрощать. Те сложные возмущения, которые возникают в переходной зоне, наверное, сохраняются на протяжении всей длины канала.

Проблемы структуры ударных волн и турбулентных течений не решаются в рамках классической теории, которой явно не хватает динамики.

Кинетическая теория ближе к термодинамическим процессам. Даже у Больцмана $dS/dt \geqslant 0$. Поэтому классической кинетической теории было трудно объяснить ярко выраженные динамические процессы (ударные волны, турбулентность и т.д.).

Из сказанного следует, что для продвижения в области нерешенных проблем механики следует: 1) кинетическую теорию надо приблизить к динамике, 2) теорию этих процессов ориентировать на применение набора функции распределения.

Для решения этих проблем автор использовал возможность опереться на уравнение Лиувилля, описывающее динамическое свойство систем в сочетании их с большим термостатом. В этом случае уравнение Лиувилля будет способно описывать широчайший круг динамических, газодинамических и статистических процессов.

Если в начальный момент задана функция распределения вероятностей пребывания частиц в шестимерном фазовом пространстве, то математически уравнение Лиувилля в точности будет эквивалентно исходным уравнениям Гамильтона.

Гиббс также использовал сочетание динамической системы с термостатом и получил таким образом микроканоническое распределение.

Если динамическая система определенное время пребывает в большом термостате с заданным свойством, то в динамической системе реализуются соответствующие ему распределения.

Автор обращает внимание на то, что отправляясь от уравнения Лиувилля и используя соответствующие термостаты, пришел к описанию следующих динамических, кинетических и статистических систем: динамическая система Гамильтона, многопараметрическая система автора, кинетическая система Больцмана, статистическая система Гиббса.

Два предпоследних случая представляют собой предельные состояния кинетической теории, когда сохраняются еще наиболее устойчивые, двухчастичные и одночастичные функции распределения. Все остальные функции распределения уже диссипировали.

Динамическая система Гамильтона. Сначала рассмотрим чисто динамическую систему, состоящую из N различных частиц. Функции распределения их вероятностей в шестимерном фазовом пространстве запишем в виде

$$F_N = F_N(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) \tag{8}$$

Эти функции распределения вероятностей будут удовлетворять уравнению Лиувилля и отличаться друг от друга лишь начальными данными. Они будут несимметричными функциями относительно перестановки любой пары динамических координат (система Гамильтона).

Статистическая система Гиббса. Рассмотрим теперь другой предельный случай: ансамбль, состоящий из N тождественных частиц, функции распределения которого также удовлетворяют уравнению Лиувилля и отличаются друг от друга лишь начальными данными. Если эти ансамбли длительное время взаимодействовали с определенным термостатом, то они будут мало отличаться друг от друга и описываться симметричной функцией распределения:

$$F_N = F_N(0, t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) \tag{9}$$

На молекулярном уровне во всей системе, как показал Гиббс, функция распределения будет симметричной относительно перестановки динамических координат, она не зависит от времени и может в этом случае быть представлена в виде

$$F_N = F_N^{\circ} \exp(-E/(kT)) \tag{10}$$

где E – энергия системы, а изменение энтропии равно нулю.

Кинетическая система Больцмана. Рассмотрим теперь совокупность ансамблей из N тождественных частиц, которые описываются совокупностью несимметричных функций распределения (8), удовлетворяющих также уравнению Лиувилля и отличающихся друг от друга лишь начальными данными. Если этот ансамбль N частиц взаимодействовал с определенным термостатом по упругим законам и частицы могли сильно перемешаться друг с другом, то в системе сохранятся на макроскопическом уровне средние параметры потока (плотность, скорость и температура). На молекулярном уровне во всей системе установится упорядоченное распределение скоростей молекул. Функция распределения будет симметричной

$$F_N = \prod_{k=1}^{N} \varphi_k(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \tag{11}$$

Система будет иметь ровно N одночастичных функций распределения $f_s = (N/V)\varphi_1(x)$, где V – объем системы.

Этот случай был рассмотрен Больцманом. Одночастичные функции удовлетворяют кинетическому уравнению

$$\frac{df}{dt} = \iiint \left(f' f_1' - f f_1\right) q b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_1 \tag{12}$$

полученному скорректированным выше методом Больцмана.

Многопараметрическая система автора. Рассмотрим теперь совокупность ансамблей, состоящих из N тождественных частиц и описывающихся совокупностью несимметричных функций распределения (8), которые удовлетворяют уравнению Лиувилля и отличаются друг от друга лишь начальными данными. Если эти ансамбли частиц только некоторое время взаимодействовали с простым термостатом по упругим законам, то система слабо перемешалась и функции распределения будут лишь частично симметричными. На макроскопическом уровне у системы могут сохраниться определенные количества средних параметров (плотности, скорости и температуры). Функция распределения будет иметь вид

$$F_N = \prod_{s=1}^{l} \varphi_1(\mathbf{x}_s) \prod_{k=1}^{p} \varphi_2(\mathbf{x}_k) \ldots \prod_{t=1}^{\tau} \varphi_r(\mathbf{x}_t) \ldots \tag{13}$$

где $l + p + \ldots + \tau + \ldots = M < N$.

Многочастичные, но одинаковые функции образуют группы

$$f_\tau = n_\tau \varphi_\tau(\mathbf{x}_1)$$

Данная динамическая система характеризуется следующим набором частичных функций. Число M на этом уровне рассмотрения остается неизвестным. Оно определяется при физической постановке самой задачи. Частичные функции удовлетворяют системе кинетических уравнений, полученных выше скорректированным методом Больцмана. Метод Боголюбова для многокомпонентных систем пока не разработан.

Частичные функции $f_s(t, r)$, как и для многокомпонентных газовых систем, будут удовлетворять многопараметрической системе кинетических уравнений

$$\frac{df_s}{dt} = \sum_{\tau=1}^{M} \iiint \left(f_\tau' f_s' - f_\tau f_s\right) q_{\tau s} b\, db\, d\varepsilon\, d\mathbf{v}_\tau \tag{14}$$

По внешнему виду и математическому содержанию эта система подобна системе кинетических уравнений для газовых смесей из M потоков. Однако по физической сущности между системами нет ничего общего. Впервые эта система уравнений была получена в работах автора до 1980 г. при формировании функции распределения из групп молекул [21] и уже довольно часто встречается в публикациях других ученых.

В задачах о газовых смесях значения ρ_s° известны. Известно также и число M. В рассматриваемых задачах значения ρ_s° и M неизвестны и должны определяться при физической постановке задачи. Решая многопараметрическую систему кинетических уравнений методом автора [15], получим следующую многопараметрическую систему газодинамических уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_s^\alpha}{\partial t} + v_s^\beta \frac{\partial v_s^\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{1}{\rho_s^\circ}\frac{\partial p_s}{\partial r_\alpha} = \frac{16}{3\rho_s} \sum_{\tau \neq s}^{M} \frac{\rho_\tau^\circ \rho_s^\circ \Omega_{\tau s}^{(11)}}{m_\tau + m_s}\left(v_\tau^\alpha - v_s^\alpha\right) \\
\frac{\partial T_s}{\partial t} + v_s^\alpha \frac{\partial T_s}{\partial r_\alpha} + \frac{2}{3} T_s \frac{\partial v_s^\alpha}{\partial r_\alpha} = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{2\pi k T_s}{m_s}} \sum_{\tau \neq s}^{M} n_s \Omega_{\tau s}^{(11)} \left\{\frac{3k}{2m}\left(T_\alpha - T_s\right) + q_{\tau s}\left(v_\tau - v_s\right)^2\right\} \\
\frac{\partial \rho_s^\circ}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s^\circ v_s^\alpha}{\partial r_\alpha} = 0; \quad q_{\tau s} = \frac{m_s T_s}{T_\tau - T_s}
\end{gathered} \tag{15}$$

Так выглядит система из M уравнений обобщенной многопараметрической газодинамической теории материи XX века.

Как видим, получена система из M взаимно связанных дифференциальных уравнений в частных производных, где ρ_s° и число M в общем случае неизвестны. Оно определяется при физической постановке задачи [20, 21].

7°. Многопараметрические гидрогазодинамические уравнения применим к описанию структуры стационарной ударной волны. В данной задаче будем иметь две группы молекул. Индекс 1 будем относить к группе молекул перед ударной волной, 2 – за ударной волной.

Если вместо кинетического уравнения (14) или вместо системы дифференциальных уравнений (15) можно воспользоваться их интегралами сохранения, то это будет важнейшим достижением.

Из системы уравнения (15) получим для одномерной стационарной волны следующие уравнения: сохранения массы, количества движения, полной энергии и уравнение для тепловой энергии всей системы.

$$\frac{d}{dx}\left(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2\right) = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\rho_1 v_1^2 + p_1 + \rho_2 v_2^2 + p_2\right) = 0 \tag{16}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho_1 v_1^2}{2} + \frac{5}{3} p_1 v_1 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2} + \frac{5}{3} p_2 v_2\right) = 0$$

$$\frac{2}{3}\frac{d}{dx}\left(\left(\rho_1 v_1 T_1 + \rho_2 v_2 T_2\right) + p_1 k T_1 \frac{dv_1}{dx} + p_2 k T_2 \frac{dv_2}{dx}\right) = \frac{8}{3}\rho_1 \rho_2 \Omega_{12}^{(11)} \left(v_1 - v_2\right)^2 \Psi$$

где Ψ – некоторая функция параметров потока.

Система содержит переменные, относящиеся к различным группам молекул ρ_1, ρ_2, v_1, v_2, T_1, T_2, где ρ – плотность, v – скорость, T – температура.

В данной теории поток образуется из групп молекул. Первая группа существует перед скачком уплотнения, ее плотность задается, а за скачком $\rho_1(x) = 0$, а для второй группы $\rho_2(x) = 0$ перед скачком. Эти величины являются граничными условиями для рассматриваемой задачи о структуре сильных ударных волн.

В задачах о скачках уплотнения, как известно, плотность и другие параметры потока задаются перед скачком уплотнения, а все параметры за скачком вычисляются по соотношениям Рэнкина – Гюгонио.

В рассматриваемой здесь задаче о структуре сильных ударных волн граничные условия позволяют определить по уравнениям (16) изменение плотности газа. Величины v_1, v_2, T_1, T_2 принимаются постоянными.

Отношения v_2/v_1, T_2/T_1 могут быть определены из условия совместности первых трех уравнений (16) по формулам

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M^2 + 3}{4M^2}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(M^2 + 3\right)\left(5M^2 - 1\right)}{16M^2}$$

Введем теперь средние параметры потока, которые характеризуют систему в целом:

$$\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x), \quad v(x) = \frac{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad T(x) = \frac{\rho_1(x) T_1 + \rho_2(x) T_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Для определения $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ будем иметь

$$v_1 \rho_1(x) + v_2 \rho_2(x) = c_1, \quad \frac{d}{dx}\left(\rho_1 v_1 k T_1 + \rho_2 v_2 k T_2\right) = \frac{16}{9}\rho_1 \rho_2 \Omega_{12}^{(11)} \left(v_1 - v_2\right)^2 \Psi \tag{17}$$

Полагая $y_1 = \dfrac{\rho_1(x)}{\rho_{-\infty}}$, $y_2 = \dfrac{\rho_2(x)}{\rho_{-\infty}}$, получим

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 = v_1, \quad -\frac{dy_1}{y_1(1 - y_1)} = A dx \tag{18}$$

где A и Ψ – сложные функции параметров потока, не зависящие от координат. Решая систему (18), получим

$$\rho_1(x) = -\frac{\rho_{-\infty}}{1 + e^{-Ax}}, \quad \rho_2(x) = \frac{\rho_{-\infty}}{1 + e^{+Ax}} \frac{v_1}{v_2} \tag{19}$$

Следуя Прандтлю, определим толщину ударной волны:

$$\delta = \frac{\rho_{+\infty} - \rho_{-\infty}}{(d\rho / dx)_{\max}}$$

Отношение длины свободного пробега λ к толщине ударной волны δ обозначим $f(M)$. Эту величину $\lambda/\delta = f(M)$ удается определить только в специально поставленных опытах.

Зависимость λ/δ от числа Маха приведена на фиг. 1 (см. также [22 – 24]).

Следуя работе Шмидта [25] и его обозначениям, приведем изменение нормализованной $\rho_N(x)$ плотности по ширине скачка (фиг. 2), где ρ_2 и ρ_1 – значения плотности при $\pm\infty$

$$\rho_N(x) = \frac{\rho(x) - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \tag{20}$$

При решении проблемы о структуре ударных волн не учитывалось влияние вязкости и теплопроводности. Прежде необходимо в должной мере учесть влияние этих членов в самих уравнениях (см. [15]).

8°. Применим многопараметрическую кинетическую теорию к описанию турбулентных течений в плоском канале. Запишем сначала уравнения (15) для установившегося одномерного течения несжимаемой вязкой жидкости в канале $y = \pm h$ между двумя параллельными плоскостями:

$$\begin{gathered}
\rho\left(\frac{\partial U_s U_s}{\partial x} + \frac{\partial U_s v_s}{\partial y}\right) + \frac{\partial p_s}{\partial x} = \sum_{\tau \neq s}^{M} Q_{\tau s}(U_\tau - U_s) + \mu \overline{V}^2 U_s \\
\rho\left(\frac{\partial U_s v_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s v_s}{\partial y}\right) + \frac{\partial p_s}{\partial y} = \sum_{\tau \neq s}^{M} Q_{\tau s}(v_\tau - v_s) + \mu \overline{V}^2 v_s \\
\frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y} = 0; \quad Q_{\tau s} = \frac{8n}{3}\Omega_{\tau s}^{(11)}
\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $\Omega_{\tau s}$ – табличные интегралы, приведенные в работах [2, 3] и частично затабулированные. Для однокомпонентных газов значения $\Omega_{\tau s}$ – постоянные величины. Поэтому будем пользоваться обычным среднеарифметическим законом осреднения параметров потока.

В данной работе вязкие члены в уравнениях (21), так же как в работе [21], записаны в классическом виде, пока без учета громоздкой поправки (см. [15] и другие работы автора по этой тематике).

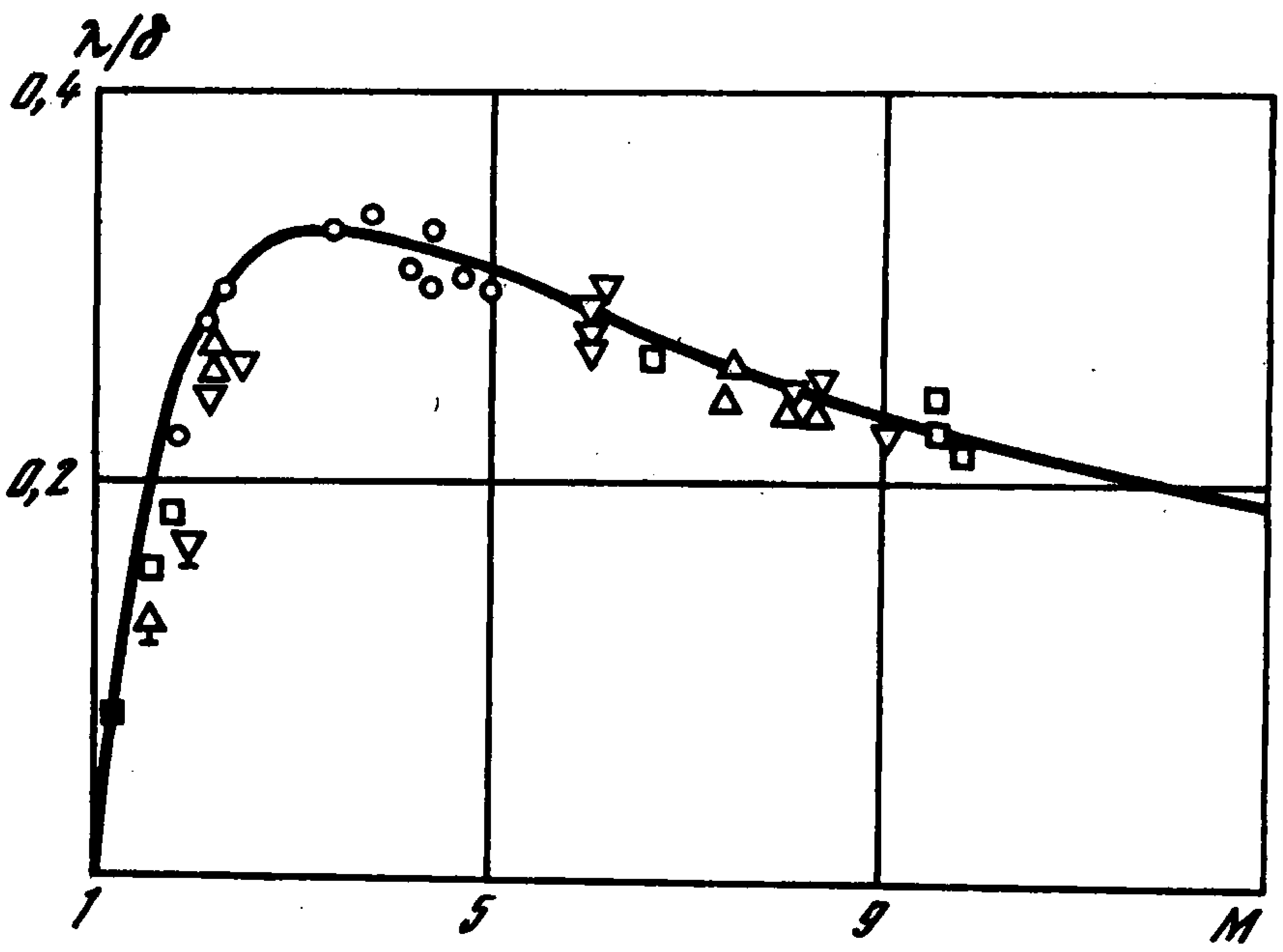
В итоге сравнения теории с экспериментальными данными стало ясно, что в турбулентном потоке трение у стенок канала больше, чем это предсказывает данная теория. Поэтому упомянутую громоздкую поправку к вязким членам, увеличивающим силы трения и роль [15], следует в дальнейшем суметь учесть в теории.

Введем осреднение параметров потока по совокупности возможных их значений

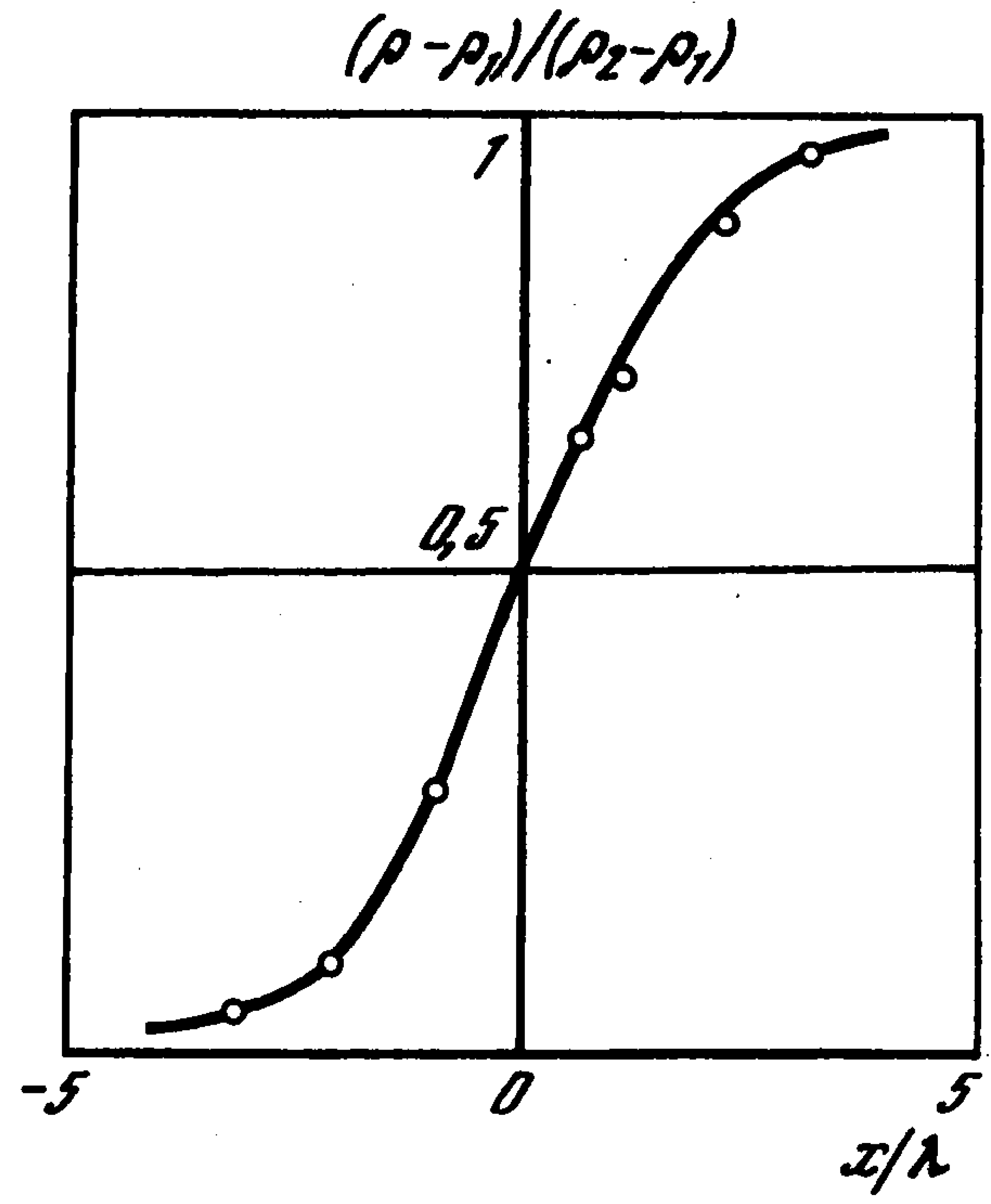
$$\overline{U} = \frac{1}{M}\sum_{\tau=1}^{M} U_\tau, \quad \overline{v} = \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{M} v_s, \quad \overline{p} = \frac{1}{M}\sum_{\tau=1}^{M} p_\tau \tag{22}$$

Тогда естественно можно ввести не совокупность пульсаций, как было со времен Рейнольдса, а набор уклонений от средних параметров потока (величины со звездочкой)

$$U_s = \overline{U} + U_s^*, \quad v_s = \overline{v} + v_s^*, \quad p_s = \overline{p} + p_s^* \tag{23}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Видно, что суммы в уравнениях (21) примут вид

$$\sum_{\tau \neq s}^{M} \{U\}_{\tau s} = -MU_s^*, \quad \sum_{\tau \neq s}^{M} \{v\}_{\tau s} = -Mv_s^* \tag{24}$$

Подставляя (24) в (21) и проводя осреднение, для средних параметров потока получим систему

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{U}\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}\bar{v}}{\partial y}\right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \mu \nabla \bar{U} - \rho\left(\frac{\partial \overline{U_s^* U_s^*}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U_s^* v_s^*}}{\partial y}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}\,\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\,\bar{v}}{\partial y}\right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \mu \nabla \bar{v} - \rho\left(\frac{\partial \overline{U_s^* U_s^*}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_s^* v_s^*}}{\partial y}\right) \tag{25}$$

$$\partial \bar{U} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y = 0$$

Для рассматриваемой одномерной задачи эта система может быть существенно упрощена:

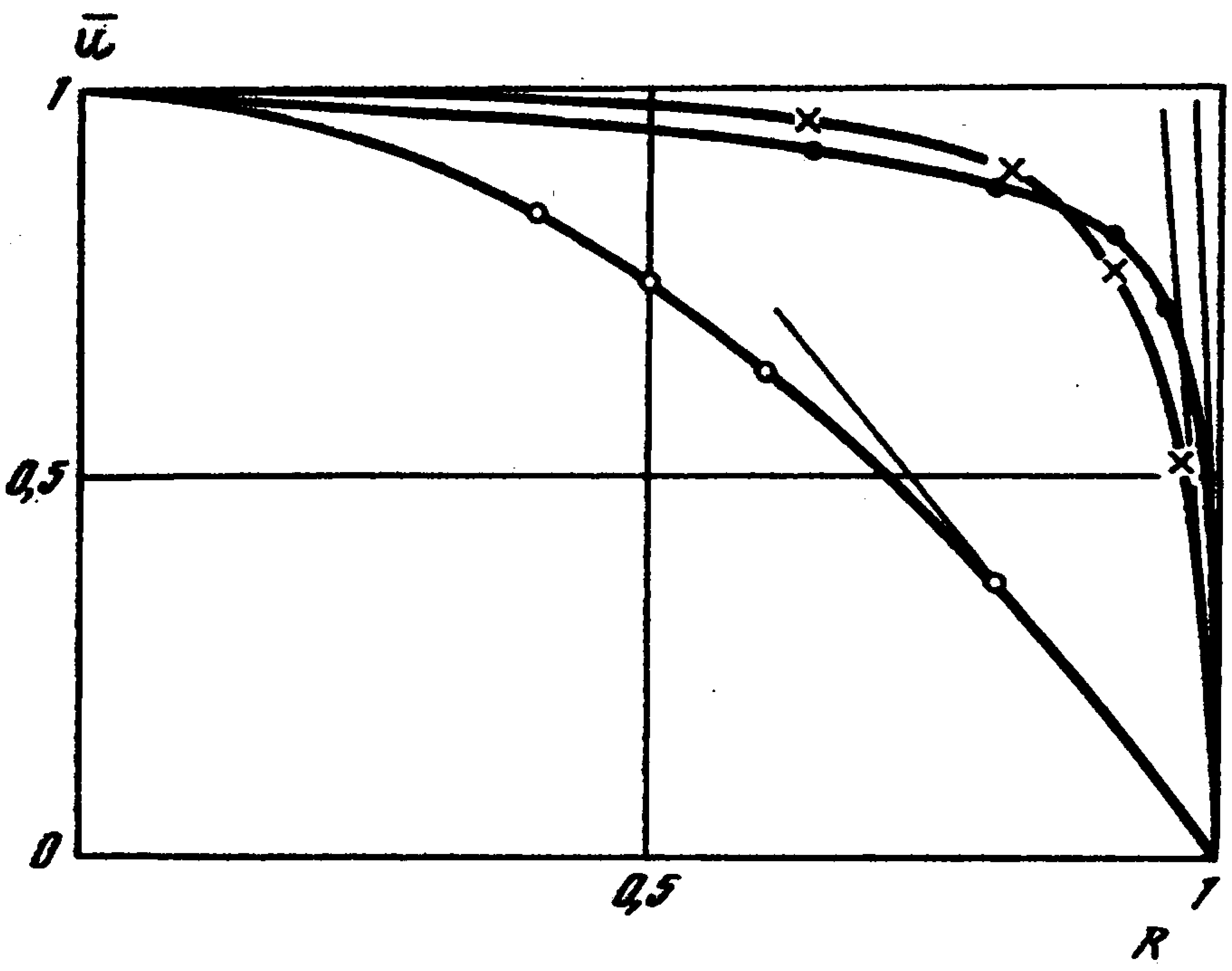
$$\frac{d^2 \bar{U}}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\rho}{\mu}\left(\frac{\partial \overline{U_s^* U_s^*}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U_s^* v_s^*}}{\partial y}\right) \tag{26}$$

Система уравнения для отклонений средних параметров потока имеет по сравнению с (25) еще более сложный вид. Однако для упрощений одномерной задачи ее можно привести к виду

$$\frac{d^2 U_s^*}{dy^2} - k^2 U_s^* = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad \frac{d^2 v_s^*}{dy^2} - k^2 v_s^* = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad \frac{dU_s^*}{dx} + \frac{dv_s^*}{dy} = 0 \tag{27}$$

где $k^2 = M/\mu$ определяется при сравнении серии теоретических расчетов с опытными данными.

Система уравнений (27) оказалась все же еще довольно сложной. Поэтому величины уклонений параметров потока определяются приближенно. На их основе вычисляют среднюю турбулентную скорость потока в канале по уравнению (26).



Фиг. 3

Таким образом, в работе в общем виде рассмотрен ряд динамических и статистических систем и показано, что можно построить сильно неоднородную кинетическую теорию, которая теперь должна оперировать набором из M одночастичных функций распределения, удовлетворяющих многопараметрической системе из M кинетических уравнений (14). Эта система кинетических уравнений методом, аналогичным указанному ранее [15], была сведена к многопараметрической системе из M обыкновенных дифференциальных уравнений в частных производных (15).

Новая теория была применена к расчету структуры ударных волн.

Сравнение теории с экспериментом превзошли все ожидания. Как видно, толщина ударной волны в широком диапазоне чисел Маха с поразительной точностью совпадает с экспериментом (фиг. 1). Это подтверждается также и сравнением теории с опытом для распределения плотности по ширине канала (фиг. 2).

Расчеты распределения турбулентных скоростей в плоском канале хорошо совпадают с опытными данными для осевого сечения круглой трубы (фиг. 3), где кривая с темными точками – эксперимент Никурадзе [19], с крестиками – расчет турбулентного потока, со светлыми точками – ламинарный поток.

Вязкое трение по опытным данным оказывается несколько больше, чем в теории. Поэтому поправки к вязким членам в уравнениях (15) следует в дальнейшем сделать.

В то же время можно лишь удивляться, что теория одновременно правильно описывает как структуру турбулентного ядра в центре канала, так и довольно правильно, ламинарный подслой у стенки канала.

На фиг. 3 приведены изменения относительной величины турбулентной скорости потока по отношению к его значению в центре трубы. Для определения истинных значений параметров турбулентного потока надо исходить из уравнений (21), в которые должны быть введены громоздкие величины вязкого трения, вычисленные в работе [15] или других работах автора по этой тематике.

Для определения зоны перехода от ламинарного течения к турбулентному надо исходить из многопараметрической системы газодинамических уравнений (15), добавив к ним вязкие члены, вычисленные в работе [15] и других работах автора.

Несомненно, новая теория турбулентности должна быть апробирована еще на других более сложных аэродинамических процессах и применена к решению принципиально важных фундаментальных проблем науки и техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hilbert D.* Grunszuge einer allgemeiner Theorie der linearen Integralgleichungen // Forsch. math. Wissensch. in Monograph. 1912. Bd. 26. 282 S.
2. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
3. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.
4. *Grad H.* Principles of the kinetic theory of gases // Handbuch der Physik / Hrsg. S. Flugge. Berlin: Springer-Verlag, 1958. Bd. 12. S. 205–294.
5. *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 119 с.
6. *Born M., Green H.S.* A general kinetic theory of liquids. Cambridge: Univ. press. 1949. 98 p.
7. *Kirkwood J.G.* The statistical mechanical theory of transport processes. I. General theory // J. Chem. Phys. 1946. V. 14. № 1. P. 108–210.
8. *Струминский В.В.* О структуре решений цепочки уравнений кинетической теории газов // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. № 2. С. 293–296.
9. *Струминский В.В.* О решении цепочки уравнений кинетической теории газов // Докл. АН СССР. 1966. Т. 196. № 1. С. 58–61.
10. *Струминский В.В.* О методе Гильберта решения кинетического уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. № 1. С. 70–73.
11. *Струминский В.В.* О одном методе решения кинетического уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. № 2. С. 298–301.
12. *Struminski V.V.* On the theory of Boltzmann's kinetic equation // Rarefied Gas Dynamics. N.Y.: Acad. press, 1969. V. 1. P. 139–143.
13. *Poincare H.* Les methodes nouvelles de la mechanique celeste. V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1892. 385 p.
14. *Струминский В.В.* Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей // Сб. аннот. 13-го Междунар. конгр. по теорет. и прикл. механике. М.: Наука, 1972. С. 104–105.
15. *Струминский В.В.* Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 203–210.
16. *Струминский В.В.* Методы кинетической теории газов и основы теории дисперсных сред // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 3. С. 556–559.
17. *Галкин В.С.* Применение метода Чепмена – Энскога к случаю двухтемпературной бинарной смеси газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 6. С. 58–63.
18. *Рейнольдс О.* Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия // Проблемы турбулентности. М.; Л.: ОНТИ, 1936. С. 185–227.
19. *Никурадзе И.* Закономерности турбулентного движения жидкостей в гладких трубах // Проблемы турбулентности. М.; Л.; ОНТИ НКНК СССР. 1936. С. 75–150.
20. *Струминский В.В.* К теории систем одинаковых частиц // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 6. С. 1345–1349.
21. *Струминский В.В.* Единая кинетическая теория неоднородных газов и газовых смесей // Докл. АН СССР. 1993. Т. 330. № 5. С. 579–581.
22. *Корольков Г.А., Великодный В.Ю., Марченко А.А., Орлов А.В.* Некоторые вопросы механики неоднородных сред: Препринт № 6. М.: Сектор механики неоднородных сред АН СССР. 1982. 65 с.
23. *Струминский В.В.* Кинетическая теория неоднородных и неравновесных потоков // Молекулярная газодинамика. М.: Наука, 1982. С. 209–237.
24. *Alsmeyer H.* Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electrone beam // J. Fluid. Mech. 1976. V. 74. № 3. P. 497–513.
25. *Schmid B.* Electron beam density measurements in shock waves in argon // J. Fluid Mechanics. V. 39. № 2. P. 361–373.
26. *Струминский В.В.* Новая постановка проблемы турбулентности // Научные основы турбулентных явлений. М.: Наука, 1992. С. 5–14.

Москва

Поступила в редакцию
30.VIII.1995