УДК 532.5

© 1996 г. П.Я. Кочина, Н.Н. Кочина

О КОНТУРЕ НЕФТЕНОСНОСТИ

Более детально, чем в прежних исследованиях, рассматривается задача о перемещении границы раздела между водой и нефтью такой начальной формы, что в некоторый момент времени на этой границе образуется точка возврата. Предполагается, что вязкость воды во много раз меньше вязкости нефти. Дается краткий обзор задач о перемещении аналогичных линий (при более общих предположениях).

Рассмотрим простейшую задачу. Пусть в горизонтальной плоскости (x, y) имеется окруженный водой замкнутый контур $\mathscr{L}$ (фиг. 1), внутри него в точке A находится точечный сток, аппроксимирующий скважину, из которой отбирается нефть. В действительных условиях, когда учитывается разница между вязкостями воды и нефти, прорыв воды в скважину произойдет в некоторый момент времени по линии BA, отвечающей кратчайшему расстоянию от контура нефтеносности до скважины. Однако если считать вязкость внешней жидкости (воды) равной нулю, то давление p на контуре $\mathscr{L}$ будет все время сохраняться постоянным $p = p_0$, откуда следует, что контуром области будет изменяющаяся с течением времени t линия, на которой потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ принимает постоянное значение [1, 2]

$$\varphi(x, y, t) = -\varkappa_0 p_0/\mu = \text{const} \qquad (1)$$

Здесь μ – динамический коэффициент вязкости нефти, $\varkappa_0$ – проницаемость грунта.

Дифференцируя уравнение (1) по t, получим нелинейное граничное условие, которое должно выполняться на неизвестной заранее линии

$$\sigma\partial\varphi/\partial t + (\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 = 0 \qquad (2)$$

Здесь σ – пористость грунта.

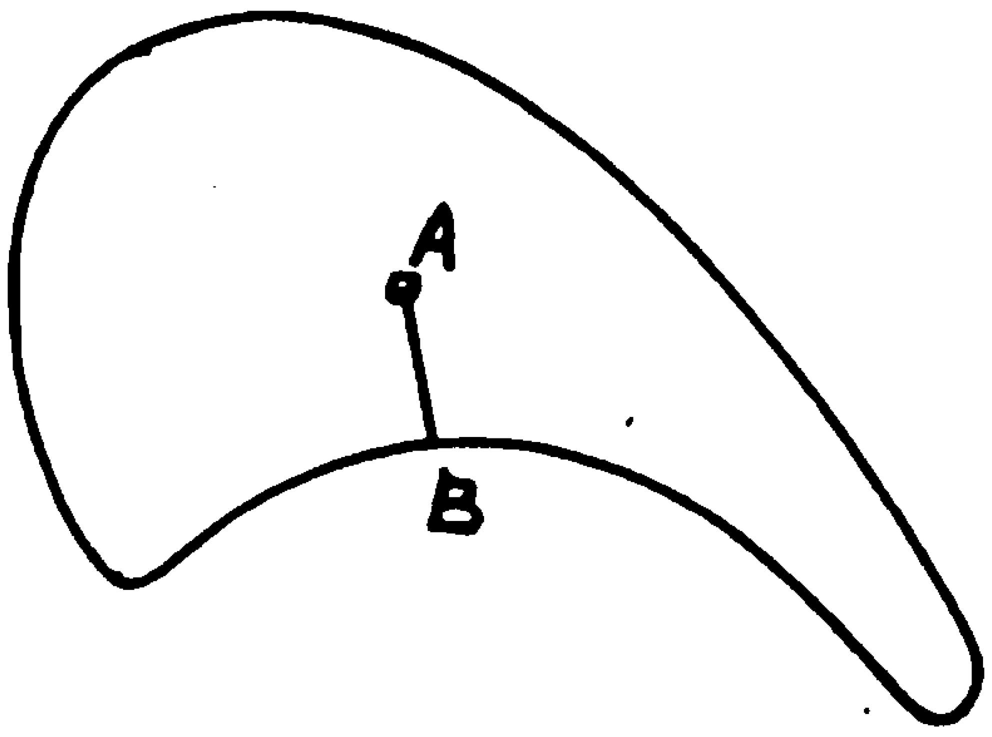
Таким образом, по такой упрощенной схеме [1–3] задача о передвижении нефти, окруженной водой, в напорном пласте сводится к нахождению гармонической функции $\varphi(x, y, t)$ с условием (2) на контуре $\mathscr{L}$, начальная форма которого задана.

Решение этой задачи с использованием формулы Дюпюи для расхода при притоке нефти к совершенной скважине ищется [2, 3] в виде ряда

$$z = A_1(t)\zeta + A_2(T)\zeta^2 + \ldots + A_n(t)\zeta^n + \ldots, \qquad (3)$$

$$\zeta = e^{i\theta}, \quad z = x + iy$$

где ζ – вспомогательная параметрическая область комплексного переменного $\zeta = \zeta + i\eta$, такая, что центру скважины – точке A – соответствует точка $\zeta = \zeta_0$, а контуру $\mathscr{L}$ – окружность $\zeta = e^{i\theta}$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; $A_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ – действительные функции времени t. Решения искомой задачи вида (3), полученные П.Я. Кочиной [2, 3], подробно описаны также в книге [4].



Фиг. 1

Был рассмотрен [2] случай, когда в начальный момент времени контур $\mathscr{L}$ – окружность единичного радиуса с эксцентрично расположенной скважиной, $\zeta_0 = c$ – действительное число. Решение задачи удается довести до конца. Ряд (3) состоит из бесконечного числа членов. Получилось хорошее совпадение с результатами экспериментов [5].

Был рассмотрен [3] другой пример. Уравнение начального контура нефтеносности задано в параметрической форме

$$z = \zeta + a\zeta^2 \tag{4}$$

$$\zeta = e^{i\theta} \tag{5}$$

где a – положительный вещественный параметр, причем $\zeta_0 = 0$, т.е. скважина A расположена в точке $z = \zeta = 0$.

Можно убедиться, что в этом случае ряд (3) превращается в полином второй степени

$$z = A_1(t)\zeta + A_2(t)\zeta^2 \tag{6}$$

Решения вида

$$z = A_1(t)\zeta + A_2(t)\zeta^2 + \ldots + A_n(t)\zeta^n \tag{7}$$

были впоследствии названы полиномиальными плоскими алгебраическими кривыми.

Рассмотрим начальные кривые (4), (5) при разных значениях параметра a более подробно.

При $a = 0$ получаем окружность, в центре которой расположена скважина.

Можно переписать уравнение (4) в развернутом виде

$$x = \cos\theta + a\cos 2\theta, \quad y = \sin\theta + a\sin 2\theta \tag{8}$$

Было показано [3], что кривая (4), (5) (или (8), (5)) при $a = {}^1\!/_2$ есть кардиоида.

Полагая в формулах (8) $x = x' - a$, $y = y'$, получим в координатах (x', y') уравнение улитки Паскаля в полярных координатах

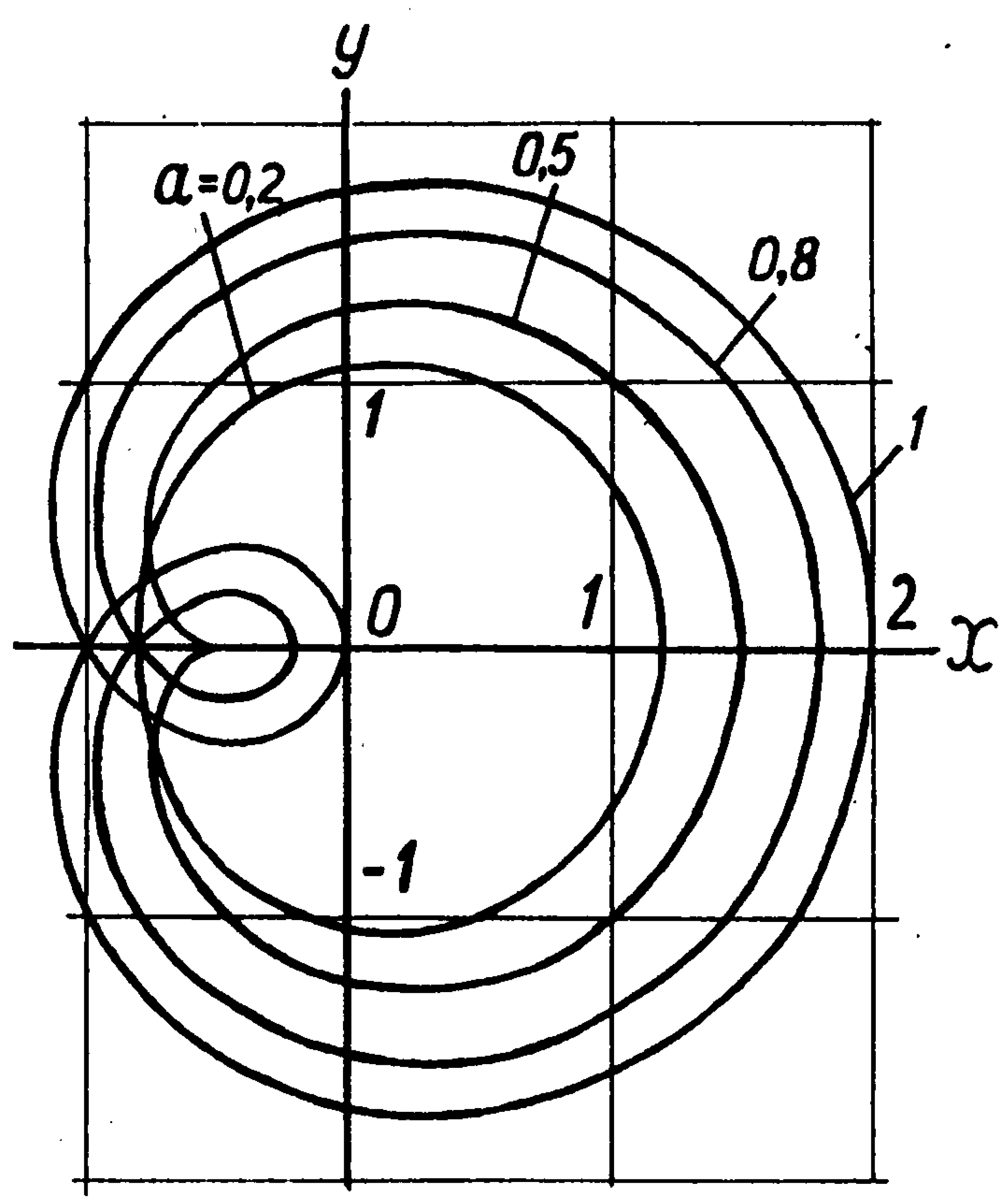
$$r = k\cos\varphi + l \tag{9}$$

где $k = 2a$, $l = 1$. При $a = {}^1\!/_2$ это кардиоида, кривая с угловой точкой.

Удобно выделить пять случаев: 1) $0 < a < 0{,}25$; 2) $a = 0{,}25$; 3) $0{,}25 < a < 0{,}5$; 4) $a = 0{,}5$; 5) $a > 0{,}5$.

Остановимся на пятом случае, когда имеется петля. Из (8) следует, что $y = 0$ при $\theta = 0, \pi$ и $\cos\theta_0 = -{}^1\!/_{2a}$, где $a > {}^1\!/_2$; причем $x = \cos\theta_0 + a\cos 2\theta_0 = -a$. Это начало петли. При $\theta = \pi$ имеем $x = a - 1$ – это конец петли.

На фиг. 2 изображены четыре кривые (в координатах x, y согласно формулам (8)): при $a = 0{,}2$ (первый случай), 0,5 (четвертый случай) и 0,8; 1 (пятый случай). В декартовых координатах x, y это плоские алгебраические кривые десятого порядка (при $a = 1$ – восьмого порядка), имеющие (дополнительно к имеющимся для улиток Паскаля и кардиоиды особым точкам) изолированную особую точку $x = y = 0$ (при $a = 1$ такой точки нет).



Фиг. 2

Решение задачи о перемещении контура нефтеносности – границы между водой и нефтью – при условии, что начальный контур имеет форму (4), (5), дано, как уже указывалось выше, в работе [3], описано также в книге [4] и имеет вид (6), где $A_i(t)$ ($i = 1, 2$) – некоторые функции, определяемые в процессе решения, и $z/A_1(t)$ имеет "как бы вид (4)" с растущим со временем параметром a.

Результаты этого решения таковы: если $a \leqslant {}^1/_2$, то в некоторый момент времени $t_1 \geqslant 0$ на контуре образуется точка возврата $x = -(a/4)^{1/3}$, $y = 0$; при $a = {}^1/_2$, имеем $x = -{}^1/_2$, $y = 0$ (в этом случае точка возврата $x = -{}^1/_2, y = 0$ уже имеется на начальном контуре). При $a > {}^1/_2$ на контуре (8), (5) имеется петля, и контур не может быть взят в качестве начального.

Таким образом, решение задачи перестает быть однолистным до момента прихода воды в скважину (начиная с момента времени t_1).

Задачами, связанными с вопросом о перемещении контура нефтеносности, занимались многие исследователи. Остановимся на некоторых из полученных ими результатов.

Л.А. Галин [6] показал, что при полиномиальных начальных условиях в некоторый момент времени, до прихода жидкости в скважину, произойдет потеря однолистности решения; этот результат вполне согласуется с рассмотренными выше примерами [2, 3]. Для начального контура в виде окружности такое явление не происходит (в отличие от начального контура вида (4), (5)).

В ряде работ рассматривается также и случай нагнетания флюида в скважину. Область движения при этом с течением времени не сужается, а расширяется, угловая точка не образуется. В формуле Дюпюи нужно теперь считать расход положительным, а не отрицательным.

Были рассмотрены [7] полиномиальные отображения третьего порядка

$$z = A_1(t)\xi + A_2(t)\xi^2 + A_3(t)\xi^3$$

Особое внимание уделено появлению угловых точек в таких движениях. В общем случае особенность такая же, как и в описанной выше задаче с полиномом второго порядка; при специально же подобранных начальных данных вместо этой особенности порядка ${}^3/_2$ получается особенность порядка ${}^5/_2$.

В такого рода задачах с отбором нефти из области потеря однолистности решения также происходит раньше момента начала поступления воды в скважину.

Математически аналогичные задачи – с образованием точек заострения на окружности – рассмотрены в статье [8], где авторы следуют методу Ричардсона [9, 10]; решения задач также не продолжимы после образования заострений. Близким проблемам посвящены статьи [11–14].

В.Л.Даниловым [15] высказано соображение о недоучете в рассматриваемой задаче капиллярных сил и о том, что в данном случае нельзя отбрасывать инерционные члены в уравнениях движения, сохраняя квадратичные члены в условии (2). Он показал, что если учесть действие сил поверхностного натяжения, то на границе раздела несмешивающихся жидкостей точка возврата не возникает. Правда, расчет произведен только для случая начального контура в виде окружности с эксцентрично расположенной скважиной.

До сих пор предполагалось, что вязкостью воды μ_* можно пренебречь по сравнению с вязкостью нефти μ. Отбросим теперь это предположение.

В Институте механики АН СССР был проделан ряд опытов, представлявших модель стягивания "контура нефтеносности" [5] на горизонтальном щелевом лотке. Аналогичные опыты проводились под руководством В.Л. Данилова [15].

В этих экспериментах при начальной круговой форме области, теоретически рассмотренной выше, получалась довольно правильная форма дальнейших контуров. В области, наиболее близкой к "скважине", контур получался все время с плавными очертаниями, не образуя острия вплоть до прихода к самой скважине. Однако при больших местных скоростях могут быть резкие изменения формы контура; вхождение менее плотной жидкости в более плотную является неустойчивым.

Отметим, что в тесной связи с задачей о продвижении подобного контура находится проблема устойчивости его перемещения относительно бесконечно малых возмущений. Такие задачи исследовались в работах [16–18].

Неустойчивость вытеснения оказывает влияние на разработку месторождений высоковязкой нефти при водонапорном режиме. Опытное исследование такой неустойчивости при вытеснении нефти водой было проведено на прозрачных горизонтальных моделях несцементированного пласта [19]. Показано, что если отношение $\mu/\mu_* \leq 10$–13, то даже при сравнительно больших скоростях течение под действием капиллярных сил становится устойчивым; если же $\mu/\mu_* > 13$, то для устойчивости течения нужно снижение скорости до чрезвычайно малых значений.

Группа зарубежных ученых [20] дала теоретическое исследование влияния капиллярных сил на устойчивость границы раздела. Оказалось, что при достаточно малых скоростях движение фронта может стать устойчивым за счет капиллярных сил даже при неблагоприятном соотношении вязкостей. Но для количественного согласия с экспериментом авторам пришлось ввести понятие "эффективное" поверхностное натяжение, превышающее истинное примерно в 40 раз. Такое расхождение вызвано тем, что авторы предполагают границу раздела фаз бесконечно тонкой и выравнивающейся за счет капиллярного давления P. В действительности же выравнивание происходит за счет диссипативного действия истинного капиллярного давления в пористой среде P_1, причем отношение величин P/P_1 имеет порядок r/R, где r – кривизна менисков, а R – кривизна границы раздела.

В общем случае в предположении, что пласт горизонтален, расположен между двумя непроницаемыми пластами и внутри контура нефтеносности имеется одна совершенная скважина, причем $\mu_* \neq 0$, движение как воды, так и нефти будет происходить в двусвязных областях [21, 22].

Будем считать, что $\mu = \mu_*$ и в начальный момент времени контур нефтеносности – окружность радиуса a; контур области питания пласта представляет собой также окружность значительно большего радиуса, на которой давление постоянно ($p = p_0$) и в центре которой расположена скважина; при этом скважина находится либо в центре начального контура нефтеносности, либо в другой точке внутри этого контура; скважина имеет форму окружности малого радиуса r_A, на которой давление постоянно ($p = p_1 < p_0$).

В таком случае комплексный потенциал установившегося движения в скважине имеет вид

$$w = -\frac{Q}{2\pi}\ln z$$

где Q – дебит скважины на единицу мощности пласта. Зависимость от времени t радиуса "контура нефтеносности" принимает форму [21–23]

$$r = \sqrt{r_0^2 - Qt/(\pi\sigma)} \tag{10}$$

Здесь $r_0 = r_0(\theta)$ – радиус-вектор начального контура нефтеносности, θ – полярный угол.

Из формулы (10) ясно, что в момент времени

$$t_A = \pi\sigma(r_0^2 - r_A^2)/Q \tag{11}$$

вся нефть будет отобрана скважиной и при $t > t_A$ в скважину будет поступать только вода, если скважина расположена в центре начального контура нефтеносности ($r_0 =$ $= a$); в противном случае при $t \geq t_A$ в скважину будет поступать смесь нефти и воды, причем с течением времени форма контура будет меняться в зависимости от θ и t. В формуле (11) нужно заменить r_0 на $r_{0\,\min}$. В некоторый момент времени $t_1 > t_A$ станет невыгодным отбирать нефть вместе с водой и скважина будет выключена, причем в пласте останется целик нефти.

Если скважина расположена на самой окружности и $r_A = 0$, то $t = 4\pi\sigma a^2\cos^2\theta/Q$ и вода начнет поступать в скважину уже в начальный момент времени $t = 0$, при $\theta = \pi/2$, а в момент $t_A = 4\pi\sigma a^2/Q$ вся нефть будет отобрана скважиной.

При этом уравнение кривой (10) в декартовых координатах может быть записано в форме ($\tau = Qt/(\pi\sigma)$)

$$(x^2 + y^2 + \tau)y^2 = x^2(4a^2 - x^2 - y^2 - \tau) \tag{12}$$

Это плоская алгебраическая кривая четвертого порядка; $x = y = 0$ – узловая точка.

Кривые (12) (где τ – параметр) представляют собой частный случай кривых Персея – линий пересечения поверхности тора плоскостью, параллельной оси тора и касающейся внутренней части его поверхности (при $\tau = 2a^2$ кривая (12) – лемниската Бернулли).

Переходя в формулах (10) к декартовым координатам x, y, получим плоские алгебраические кривые шестого порядка (центр скважины (точка $x = y = 0$) до момента прихода воды в скважину – изолированная особая точка, а после прихода – узловая точка).

В общем случае задачи о совместной фильтрации двух и более жидкостей с различными физическими свойствами, в том числе и задачи о контуре нефтеносности без рассмотренных здесь упрощающих предположений, являются очень сложными. Ряд подобных плоских и пространственных задач описан в книгах [21, 24].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-02860б).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л.С.* Руководство по нефтепромысловой механике. Ч. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 351 с.
2. *Полубаринова-Кочина П.Я.* О неустановившихся движениях в теории фильтрации. I. О перемещении контура нефтеносности // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 1. С. 79–90.
3. *Полубаринова-Кочина П.Я.* К вопросу о перемещении контура нефтеносности // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 254–257.
4. *Кочина П.Я.* Гидродинамика и теория фильтрации. Избранные труды. М.: Наука, 1991. 351 с.
5. *Полубаринова-Кочина П.Я., Шкирич А.Р.* К вопросу о перемещении контура нефтеносности // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 11. С. 105–107.
6. *Галин Л.А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 250–253.
7. *Ховисон С.Д., Хохлов Ю.Е.* О классификации решений в задаче о течениях Хеле-Шоу с неизвестной границей // Докл. РАН. 1992. Т. 325. № 6. С. 1161–1166.
8. *Ентов В.М., Клейнбок Д.Я., Этингоф П.И.* Течения Хеле-Шоу со свободной границей, создаваемые мультиполями // Изв. РАН. МЖГ. № 5. С. 121–127.
9. *Richardson S.* Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into narrow channel // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. N 4. P. 609–618.
10. *Richardson S.* Some Hele-Shaw flows with time-dependent free boundaries // J. Fluid Mech. 1981. V. 102. P. 263–278.
11. *Howison S.D., King J.R.* Explicit solutions to six free-boundary problems in fluid flow and diffusion // IMA J. Appl. Math. 1989. V. 42. N 2. P. 155–175.
12. *Howison S.D., Richardson S.* Cusp development in free boundaries, and two-dimensional slow viscous flows // Europ. J. Appl. Math. 1995. V. 6. N 5. P. 441–454.
13. *Hohlov Y.E., Howison S.D., Huntengford C., Ockendon J.R., Lacey A.A.* A model for non-smooth free boundaries in Hele – Shaw flows // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1994. V. 47. N 1. P. 107–128.
14. *King J.R., Lacey A.A., Vazquez J.L.* Persistence of corners in free boundaries in Hele-Shaw flow // Europ. J. Appl. Math. 1995. V. 6. N 5. P. 455–490.

15. *Данилов В.Л.* О движении границы раздела вязких жидкостей в узкой щели // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 299–302.
16. *Пилатовский В.Н.* Постановка и исследование задач об устойчивости перемещения границы раздела жидкостей в неоднородном фильтрационном потоке // Укр. мат. журнал. 1958. Т. 10. № 2. С. 160–177.
17. *Чарный И.А.* Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 4. С. 107–120.
18. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
19. *Кисиленко Б.Е.* Экспериментальное изучение характера продвижения водонефтяного контакта в пористой среде // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 80–84.
20. *Chuoke R.L., Meurs P. van, Poel C. van der.* The instability of slow immiscible, viscous liquid displacement in permeable media // Trans. AIME. 1959. V. 216. P. 188–194.
21. *Щелкачев В.Н.* Избранные труды. Т. 1. Ч. 2. М.: Недра, 1990. 230 с.
22. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.; Л.: Гостоптехиздат, 1949. 628 с.
23. *Кочина Н.Н., Кочина П.Я., Николаевский В.Н.* Мир подземных жидкостей. М.: Объедин. ин-т физики Земли РАН, 1994. 112 с.
24. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969. 545 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.II.1996