УДК 531.36;521.135

© 1996 г. В.Н. Тхай

НЕПОДВИЖНЫЕ МНОЖЕСТВА И СИММЕТРИЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ОБРАТИМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предложен метод построения и классификации всех симметричных периодических движений обратимых механических систем. Дано принципиальное решение указанной проблемы для задачи Хилла, ограниченной задачи трех тел (в том числе фотогравитационной), тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, тяжелого твердого тела на шероховатой плоскости. Тем самым, в частности, поставлены задачи для систематического численного исследования.

1. О построении симметричных периодических движений обратимых систем. Механические системы образуют [1] класс линейно обратимых систем вида

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v}),\quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v});\quad \mathbf{u}\in\mathbf{R}^l,\quad \mathbf{v}\in\mathbf{R}^n\quad (l\geqslant n) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{u},-\mathbf{v}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{v}),\quad \mathbf{V}(\mathbf{u},-\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{1.2}$$

Условие (1.2) означает инвариантность системы (1.1) относительно отображения $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to (\mathbf{u}, -\mathbf{v})$ при одновременном обращении времени t. Множество $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}: \mathbf{v} = 0\}$ является неподвижным для данного отображения.

Система (1.1) вместе с решением $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ имеет также решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(-t)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{v}(-t)$ (фиг. 1,*а*), и эти решения совпадают, если $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ (фиг. 1,*б*). В случае двукратного пересечения траекторией множества $\mathbf{M}$ (фиг. 1,*в*) имеем симметричное относительно $\mathbf{M}$ периодическое движение, определяемое теоремой Хейнбокела–Страбла [2].

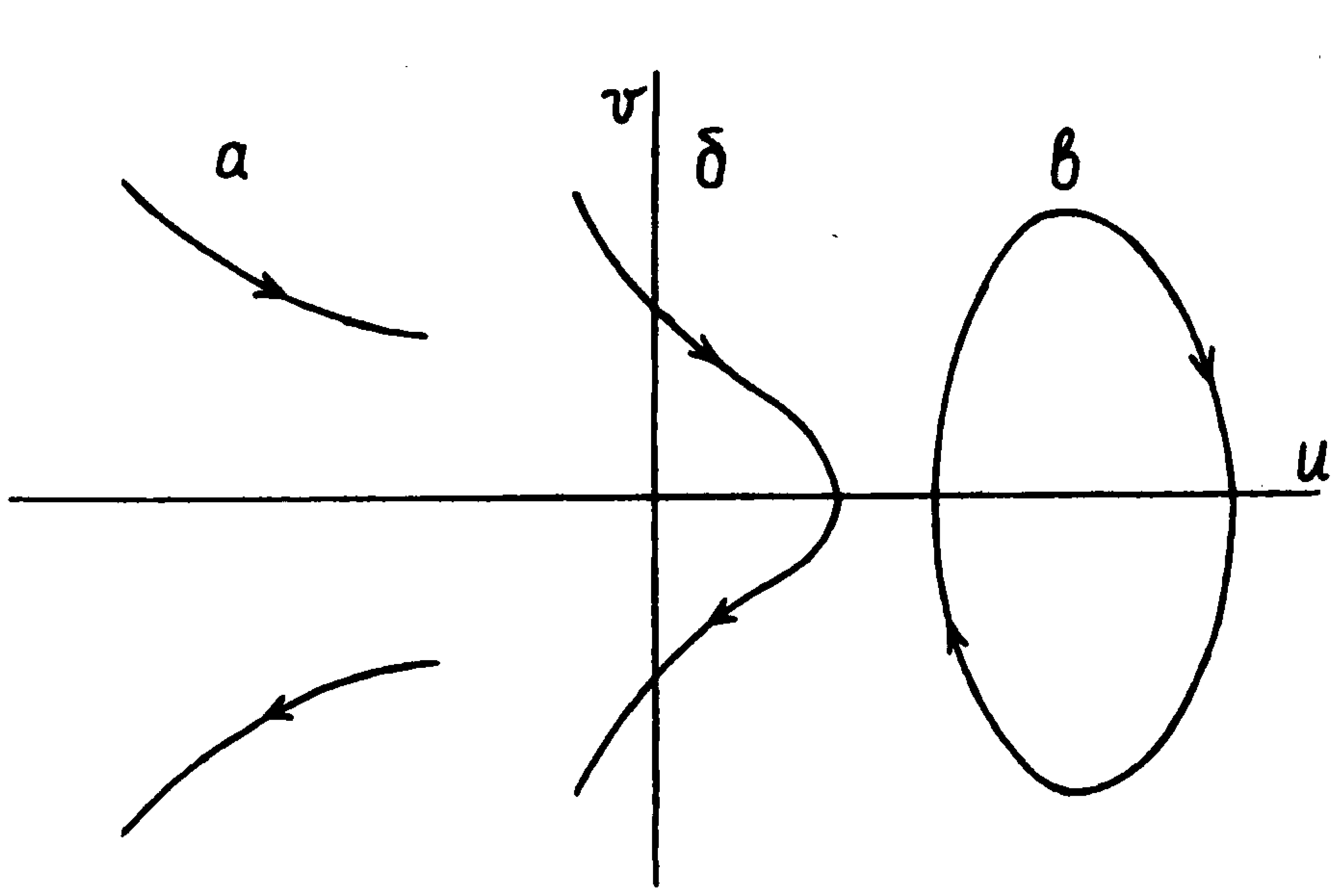
Отметим, что здесь определенно прослеживается связь с методом фазовой плоскости для консервативной системы с одной степенью свободы, которая, очевидно, является системой вида (1.1), (1.2). В указанной консервативной системе все периодические движения симметричны относительно оси абсцисс.

В обратимой системе (1.1), (1.2) могут существовать [3] и несимметричные периодические движения. Более того, "типичным" является наличие у системы областей диссипативного и консервативного поведения.

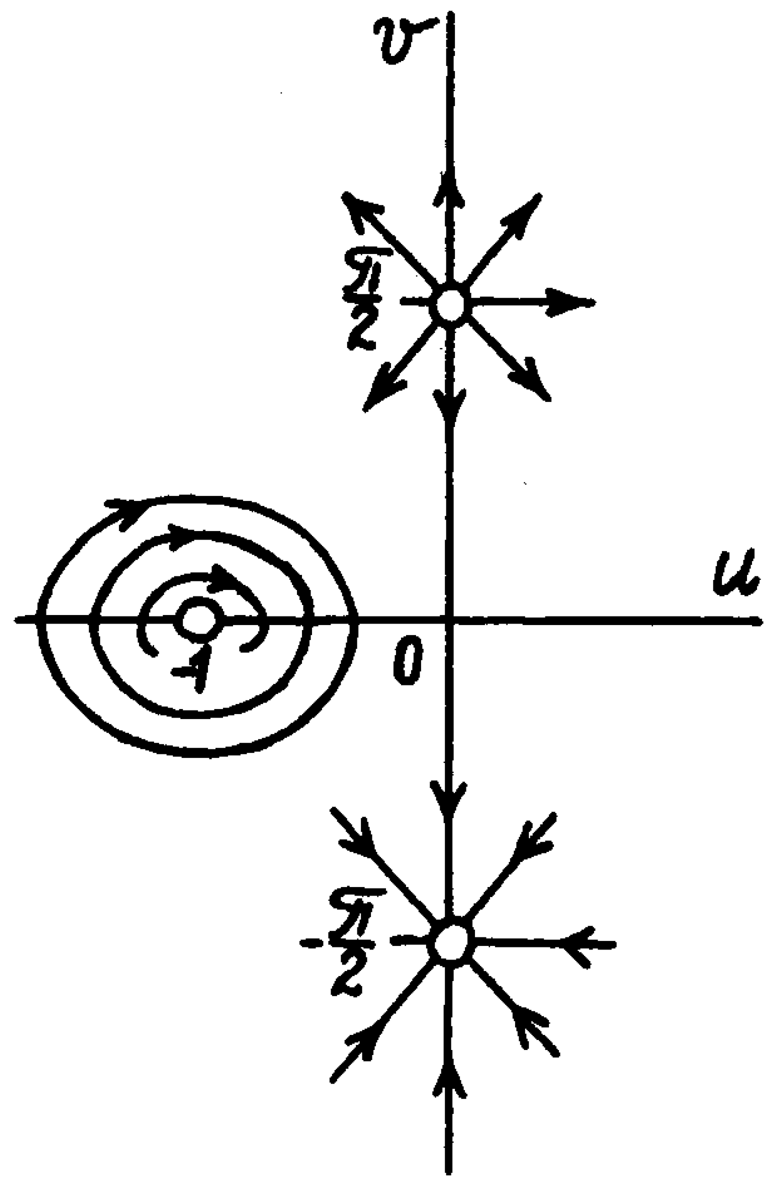
Простейшая обратимая система на плоскости

$$u^{\cdot} = uv,\quad v^{\cdot} = u + \cos v\quad (-\pi < v \leqslant \pi)$$

имеет три особые точки: $(-1, 0)$, $(0, \pm\pi/2)$, первая из которых принадлежит неподвижному множеству, а две остальные расположены симметрично относительно оси u (фиг. 2). При этом особая точка на оси абсцисс устойчива по Ляпунову и окружена периодическими решениями (центр), точка в верхней полуплоскости неустойчива, а все траектории в ее окрестности – уходящие; особая точка в нижней полуплоскости асимптотически устойчива. Другой пример асимптотической устойчивости (по части переменных) в механической системе вида (1.1), (1.2) дает [4] задача о кельтском камне.



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ системы (1.1), (1.2) симметрично относительно **M**, если множества $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)\}$ и $\{\mathbf{u}(-t), -\mathbf{v}(-t)\}$ совпадают. Поэтому такое решение в момент времени $t = 0$ пересекает неподвижное множество, а в случае T-периодического симметричного решения пересекает **M** также в момент $t = T/2$.

Таким образом, теорема Хайнбокела–Страбла дает необходимые и достаточные условия существования симметричного периодического решения. Утверждение носит нелокальный характер. Локальные симметричные периодические движения образуют [5–7] ляпуновское семейство. Обобщение теоремы Хейнбокела – Страбла на случай тора дано в [8].

Пусть $\mathbf{M}^\tau$ – образ неподвижного множества **M** в момент времени τ, полученный посредством уравнений (1.1). Тогда пересечение $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\tau$ содержит все точки неподвижного множества, которые принадлежат симметричным периодическим движениям периода $2\tau/k$ ($k = 1, 2, 3,...$). Изменяя параметр τ, таким образом можно построить все симметричные периодические движения конкретной системы вида (1.1), (1.2).

Теорема 1. Пусть $\mathbf{\Omega}^\tau$ – множество всех симметричных $(2\tau/k)$-периодических движений ($k = 1, 2, 3...$) обратимой системы (1.1), (1.2). Тогда $\mathbf{\Omega}^\tau \cap \mathbf{M} \subset \mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\tau$.

Утверждение носит принципиальный характер. Все начальные точки для симметричных периодических движений содержатся в множестве $\bigcup\limits_{0<\tau<+\infty} (\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\tau)$. Тем самым решается задача построения и классификации всех таких движений. Множество $\bigcup\limits_{\tau}(\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\tau) \setminus \bigcup\limits_{\tau}(\mathbf{\Omega}^\tau \cap \mathbf{M})$ состоит из инвариантных многообразий, принадлежащих неподвижному множеству.

Построение $\mathbf{\Omega}^\tau$ можно проводить численно. Возникают две задачи: а) построение множества $\mathbf{M}^\tau$, б) нахождение точек, принадлежащих $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\tau$. Первая из этих задач решается стандартным способом с использованием численного интегрирования. Задача определения точек пересечения множеств точек **M** и $\mathbf{M}^\tau$ при условии, что $\mathbf{M}^\tau$ построено приближенно с некоторой точностью, которую гарантирует компьютер, представляет сложную проблему. В случае $n = 1$ проблема решается корректно с использованием теоремы Коши о промежуточном значении непрерывной функции. При $n > 1$ корректное решение возможно при наличии первых интегралов.

Данный подход свободен от недостатка, присущего численному определению неподвижных точек соответствующего отображения, задаваемого дифференциальными уравнениями. Если в последнем методе неподвижная точка определена с некоторой (быть может, большой) точностью, то нет гарантии, что эта точка отвечает не тору, а периодическому движению. Значит, теряет смысл задача классификации периодических движений.

Многочисленные примеры построения и классификации симметричных периодических движений (орбит) находим в небесной механике [9–18]. Эйлер первый построил [12] такие орбиты (ляпуновское семейство) в окрестности одной из коллинеарных точек либрации во введенной им в рассмотрении ограниченной задачи трех тел. Хилл дал [13] пример орбит, симметричных одновременно относительно двух неподвижных множеств. Симметричными являются решения Пуанкаре всех трех сортов в ограниченной задаче трех тел [14]. Для плоского варианта этой задачи Уиттекер предложил [9] критерий периодичности орбиты, близкий к сформулированному в теореме 1. В численных исследованиях копенгагенской обсерватории фактически использовалась [9] теорема 1. Ранее предлагался [15] близкий к рассмотренному выше подход, однако использованное [15] условие не является достаточным для периодичности орбиты.

Механическая система может быть [1, 7] одновременно инвариантна относительно нескольких преобразований $(t, \mathbf{x}) \to (-t, \mathbf{G}_j\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^T$ – вектор фазового пространства (T – транспортирование). Если теперь не ограничивать отображение $\mathbf{G}_j$ условием $\mathbf{G}_j^2 = id$ (тождественное отображение), то приходим к системе

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{G}_j\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}(\mathbf{G}_j\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \tag{1.3}$$

где $\mathbf{G}_j$ – невырожденное отображение.

Очевидно, система (1.3) обратима также с отображением

$$\mathbf{G}^s = \mathbf{G}_1^{s1} \odot \cdots \odot \mathbf{G}_k^{sk} \, (s_1 + \ldots + s_k = 2\alpha + 1; \; s_1, \ldots s_k, \; \alpha \in \mathbb{Z})$$

Поэтому неподвижное множество имеет вид

$$\mathbf{M} = \bigcup_s \mathbf{M}_s, \quad \mathbf{M}_s = \{\mathbf{x}: \; \mathbf{x} = \mathbf{G}^s\mathbf{x}\} \tag{1.4}$$

Теорема 2. Теорема 1 остается справедливой для системы (1.3) с заменой неподвижного множества $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}: \mathbf{v} = 0\}$ на множество (1.4).

Пусть теперь рассматривается 2π-периодическая по t обратимая система (1.1) или (1.3), инвариантная относительно преобразования $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \to (-t, \mathbf{u}, -\mathbf{v})$ или $(t, \mathbf{x}) \to$ $\to (-t, \mathbf{G}_j\mathbf{x})$. Тогда справедлива

Теорема 3. Множество $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\pi$ содержит начальные точки для всех симметричных $(2\pi/k)$-периодических движений ($k = 1, 2, 3...$).

2. Задача Хилла. Предельный вариант ограниченной задачи трех тел – задача Хилла представляет значительный интерес ввиду ее важности в теории движения Луны или естественного спутника любой другой планеты. С математической точки зрения это прекрасный пример простейшей неинтегрируемой обратимой системы с двумя неподвижными множествами. Основные исследования этой задачи связаны [13, 16, 17] с доказательством существования и построением симметричных периодических орбит.

Уравнения движения Луны с координатами (x, y) отнесем к вращающейся с угловой скоростью m (отношение средних движений Солнца и Луны вокруг Земли) системе координат, с началом в центре Земли и осью абсцисс, направленной на Солнце. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} + \frac{kx}{\rho^3} = 3m^2x \\ &\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} + \frac{ky}{\rho^3} = 0, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где τ – безразмерное время, k – постоянная. Для Луны имеем m = 0,08084893..., для восьмого спутника Юпитера m = –0,1461537... .

Система (2.1) допускает интеграл энергии

$$x'^2 + y'^2 = 3m^2x^2 + 2k/\rho + h \quad (h = \mathrm{const}) \tag{2.2}$$

где штрих означает дифференцирование по τ.

Система (2.1) является линейно обратимой системой вида (1.1), (1.2) с двумя неподвижными множествами: $\mathbf{M}_1 = \{x, y, x', y' : y = 0, x' = 0\}$, $\mathbf{M}_2 = \{x, y, x', y' : x = 0, y' = 0\}$. На множестве $\mathbf{M}_1$ имеем

$$y'^2 = 3m^2x^2 + 2k/|x| + h \tag{2.3}$$

С другой стороны, при выполнении в некоторый момент времени условия (2.3) из интеграла (2.2) и равенства (2.3) получим

$$x'^2 = 2k/\rho - 2k/|x| \leqslant 0$$

что возможно только при $x' = 0$, $y = 0$, т.е. условие (2.3) является необходимым и достаточным для принадлежности к неподвижному множеству $\mathbf{M}_1$.

Аналогично на неподвижном множестве $\mathbf{M}_2$ имеем

$$x'^2 = 2k/|y| + h \tag{2.4}$$

Отсюда с учетом (2.2) получим

$$y'^2 = [3m^2 - k/|y|^3]x^2 + |y|^{-1}o(x^2/y^2)$$

Следовательно, при $|y|^3 < k/(3m^2)$ выводим: $x = 0$, $y' = 0$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Для движений на заданном уровне энергии h равенство (2.3) является необходимым и достаточным условием принадлежности точки фазового пространства к неподвижному множеству $\mathbf{M}_1$, в то время как равенство (2.4) – к множеству $\mathbf{M}_2$ в области $|y|^3 < k/(3m^2)$.

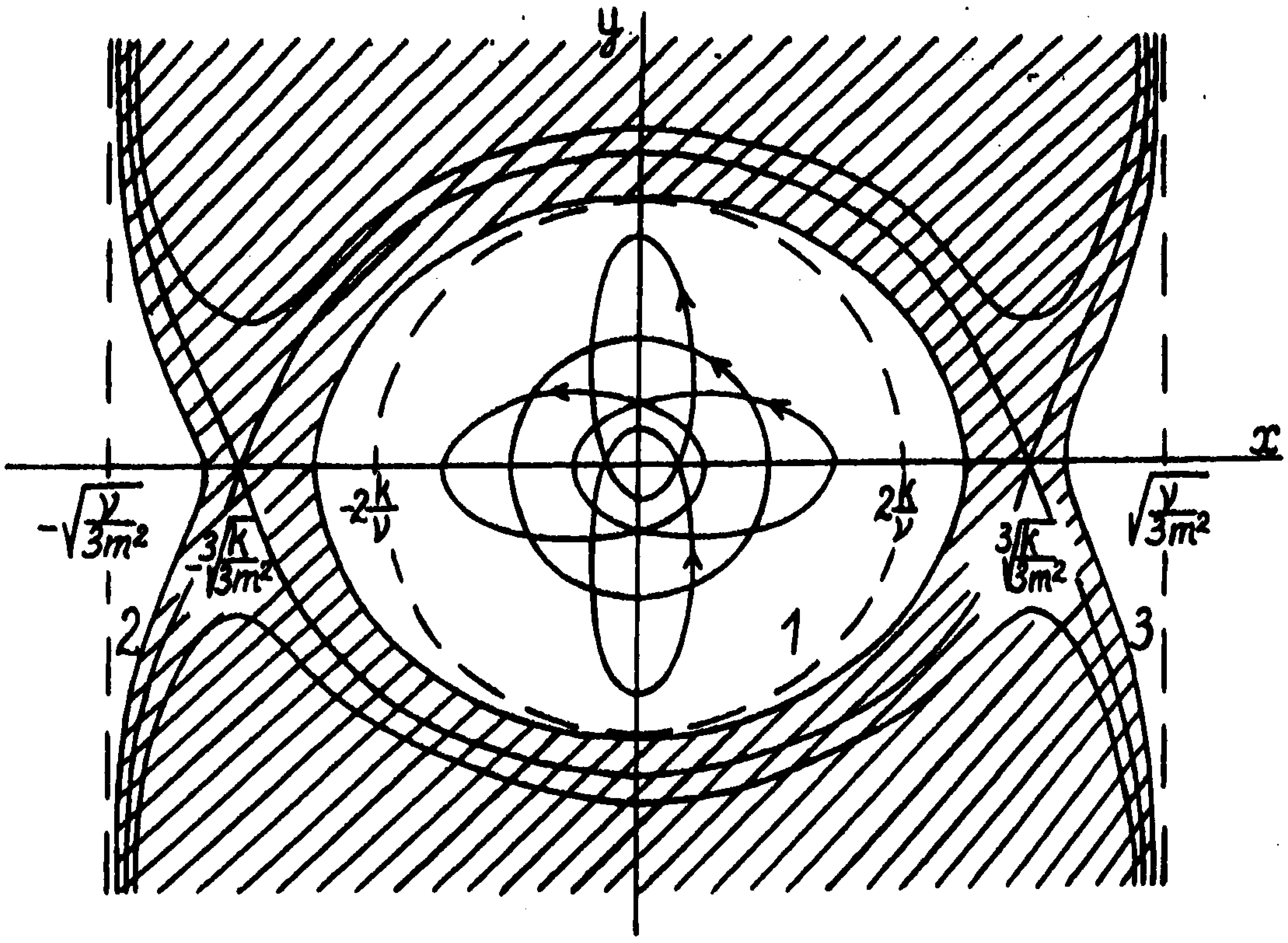
Таким образом, для построения всех симметричных относительно $\mathbf{M}_1$ или $\mathbf{M}_2$ на фиксированном уровне энергии 2τ-периодических движений необходимо рассмотреть множество (2.3) или (2.4) при $|y|^3 < k/(3m^2)$ (соответственно множества $\mathbf{M}_{1h}$ и $\mathbf{M}_{2h}$) построить $\mathbf{M}_{1h}^{\tau}$ ($\mathbf{M}_{2h}^{\tau}$) и определить точки, принадлежащие пересечению $\mathbf{M}_{1h} \cap \mathbf{M}_{1h}^{\tau}$ ($\mathbf{M}_{2h} \cap \mathbf{M}_{2h}^{\tau}$). Так как множества $\mathbf{M}_{1h}$, $\mathbf{M}_{2h}$ состоят из кривых, то задача отыскания точек пересечения имеет корректное решение и в том случае, когда $\mathbf{M}_{1h}^{\tau}$ и $\mathbf{M}_{2h}^{\tau}$ построены численно с заданной точностью.

Пусть $h = -\nu < 0$. Тогда метод Хилла дает на плоскости (x, y) область

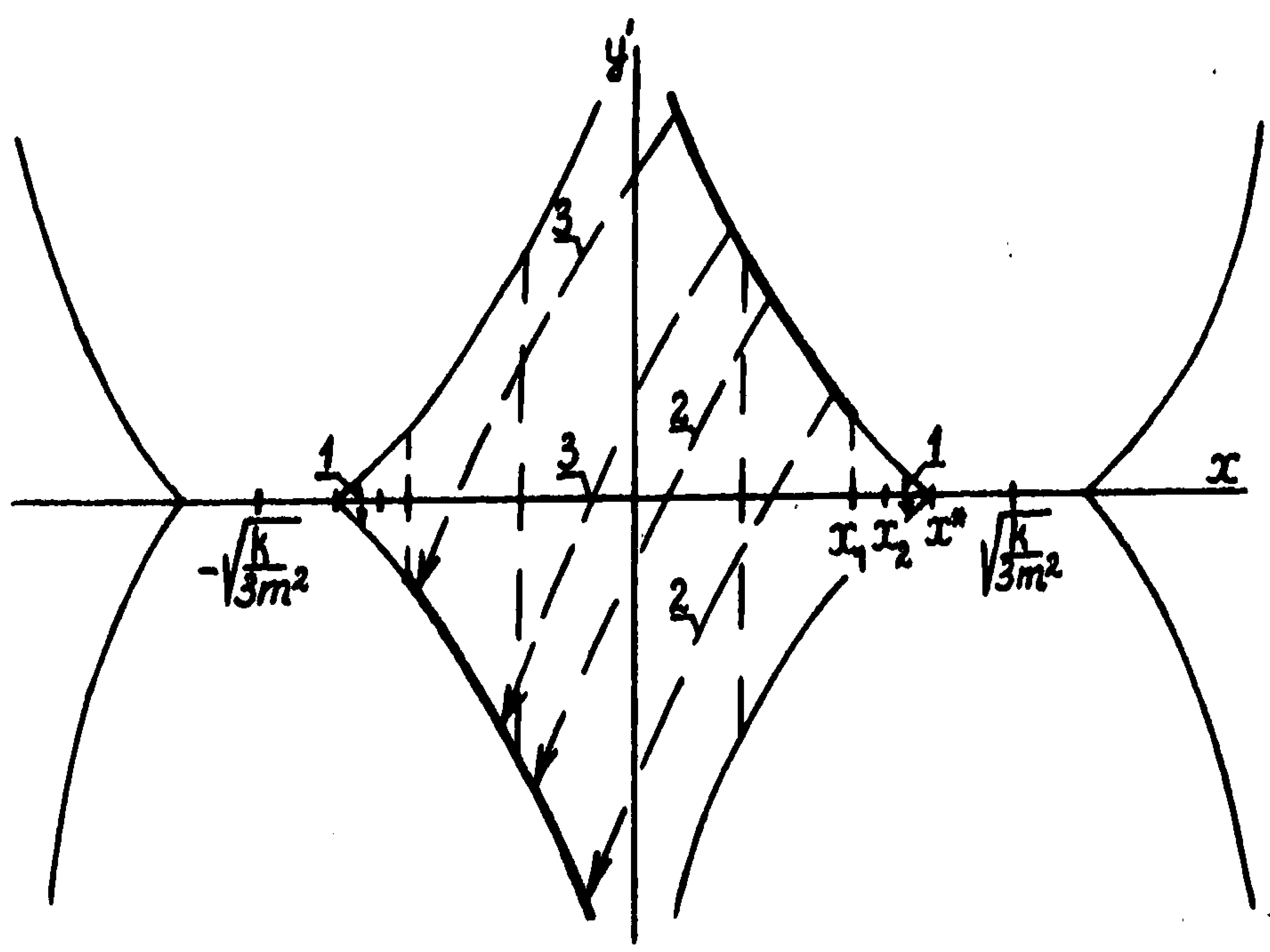
$$3m^2x^2 + 2k(x^2 + y^2)^{-1/2} \geqslant \nu \tag{2.5}$$

возможных движений (фиг. 3), которая не заштрихована. Отсюда следует, что рассмотрение (2.4) как условия принадлежности к $\mathbf{M}_2$ позволяет при $\nu > \nu^* = 3(3m^2k^2)^{1/3}$ строить все симметричные относительно $\mathbf{M}_2$ периодические движения, ибо вне незаштрихованного овала таких движений нет. Кроме того, движения, начавшись в одной из областей 1, 2 или 3, все время происходят в этой области.

В случае $\nu > \nu^*$ множество (2.3) приведено на фиг. 4. Уравнения (2.1) имеют два постоянных решения $x = \pm(k/(3m^2))^{1/2}$, $y = 0$, отвечающие положениям относительного равновесия. Характеристическое уравнение, составленное для этих решений, имеет два действительных корня $\pm(1 + \sqrt{28})^{1/2}m$ и пару чисто мнимых корней $\pm(1 - \sqrt{28})^{1/2}m$. В силу принадлежности относительных равновесий к неподвижному множеству $\mathbf{M}_1$, паре чисто мнимых корней отвечает ляпуновское семейство симметрич-



Фиг. 3



Фиг. 4

ных периодических орбит. Поэтому для значений ν, близких к ν^*, существуют переходы вида 1 (фиг. 4). Сохраняются ли такие переходы при увеличении ν^*, выяснится в результате численных исследований.

Рассмотрим теперь малые значения параметра m. При $m = 0$ имеем задачу двух тел и система допускает решение

$$x = \rho(\theta)\cos\theta, \quad y = \rho(\theta)\sin\theta$$

$$\rho(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}, \quad \rho^2(\theta)\frac{d\theta}{d\tau} = [ka(1-e^2)]^{1/2}, \quad a = \frac{k}{\nu} \tag{2.6}$$

где e – эксцентриситет, причем при $|e| < 1$ движение будет эллиптическим, в частности, круговым, если $e = 0$. При малых $m \neq 0$ решение на конечном интервале времени можно строить в виде ряда по m. Тогда, следуя [18], получим

$$x = \rho(\theta)\{(1-\xi)\cos\theta + \eta\sin\theta\}, \quad y = \rho(\theta)\{(1-\xi)\sin\theta - \eta\cos\theta\} \tag{2.7}$$

$$\xi = m\{c_1[f(\theta)e^{\varkappa\theta} + f(-\theta)e^{-\varkappa\theta}] + c_2[f(\theta)e^{\varkappa\theta} - f(-\theta)e^{\varkappa\theta}]\} + O(m^2)$$

$$\eta = \int_0^\theta \{-2\xi(\theta) + m[\rho^2(\theta)(ka(1-e^2))^{-1/2} + c_3]d\theta + mc_4\} + O(m^2)$$

где c_s – постоянные, $f(\theta)$ – некотрая 2π-периодическая функция θ, а $\pm\varkappa$ – характеристические показатели уравнения

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \left(4 - \frac{3}{1 + e\cos\theta}\right)\xi = 0$$

Из условия принадлежности этого решения при $\theta = 0$ множеству $\mathbf{M}_1$ получим $c_1 = c_4 = 0$. Решение (2.7) также принадлежит $\mathbf{M}_1$ при $\theta = \pi$, если

$$c_2 g(\pi)(e^{\varkappa\pi} - e^{-\varkappa\pi}) + O(m) = 0, \quad g(\theta) = f'(\theta) + \varkappa f(\theta)$$

$$\int_0^\pi \{-2c_2[f(\theta)e^{\varkappa\pi} - f(-\theta)e^{-\varkappa\pi}] + \rho^2(\theta)(ka(1-e^2))^{-1/2} + c_3\}d\theta + O(m) = 0$$

Так как при $0 < |e| < 1$ имеем [18] $g(\pi) \neq 0$, $\varkappa \neq is$ ($s \in \mathbb{Z}$), то для каждого из этих значений e существует единственный набор (c_1, c_2), гарантирующий переходы вида 2 ($-1 < e < 0$) и 3 ($0 < e < 1$) (фиг. 4). Значит, при достаточно малом m вся выделенная кривая из первого квадранта переходит в выделенную кривую в третьем квадранте, если отображение построено за время $\tau = \pi(a^3/k)^{1/2}$, что отвечает изменению θ от 0 до π. Отсюда следует продолжимость по m симметричных периодических орбит (2.6) для всех $|e| < 1$, включая случай $e = 0$. При малых $m \neq 0$ движения происходят внутри овала (фиг. 3).

Отметим, что из наличия неподвижного множества $\mathbf{M}_2$ следует также существование при малых $m \neq 0$ симметричных относительно y, близких к эллиптическим, орбит (фиг. 3).

При заданном ν каждому значению x отвечают на $\mathbf{M}_1$ вполне определенные два значения y'. При ν, близких к ν^*, и достаточно малых m существуют локальные периодические орбиты ($x_2 < x < x^*$) и близкие к эллиптическим орбиты ($x < x_1 = 2a + O(m)$). Для значений $x_1 < x < x_2$ вопрос существования симметричных периодических орбит остается открытым для численного исследования. Другую проблему представляет определение граничного значения параметра m, при котором все эллиптические орбиты остаются порождающими, а также изучение симметричных периодических орбит для закритических значений параметра m.

Для исследования вопроса о существовании периодических орбит, симметричных одновременно относительно $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, преобразуем [16] систему (2.1) к виду

$$\begin{gathered} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} - \frac{3}{2}m^2x + \frac{kx}{\rho^3} = \frac{3}{2}\lambda x \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} - \frac{3}{2}m^2y + \frac{ky}{\rho^3} = -\frac{3}{2}\lambda y \end{gathered} \tag{2.8}$$

с ляпуновским параметром $\lambda = m^2$. Тогда при $\lambda = 0$ система (2.8) допускает частное решение

$$x = a\cos\omega\tau, \quad y = a\sin\omega\tau, \quad k/a^3 = \omega^2 + 2m\omega + 1{,}5m^2 \tag{2.9}$$

которое описывает круговые орбиты радиуса a. При этом для заданного значения a движение в одном направлении ($\omega/m > 0$) происходит с меньшей по абсолютной величине угловой скоростью, чем движение в противоположном направлении. Так

$\omega/m = 1$ отвечает $\omega/m = -3$, а максимальному значению $a = (2k/m^2)^{1/3}$ соответствует $\omega/m = -1$.

Решение системы (2.8), совпадающее с (2.9) при $\lambda = 0$, имеет вид

$$x = a\{(1-\lambda\xi)\cos\omega\tau + \lambda\eta\sin\omega\tau\}, \quad y = a\{(1-\lambda\xi)\sin\omega\tau - \lambda\eta\cos\omega\tau\} \tag{2.10}$$

где в нулевом по λ приближении имеем

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\varkappa^2\,\xi + 2(\omega+m)\alpha..., \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -2(\omega+m)\xi + \alpha + ..., \quad \varkappa^2 = \omega^2 + 2m\omega - \frac{m^2}{2} + ...$$

(α – произвольная постоянная). Решение (2.10) при $\tau = 0$ принадлежит $\mathbf{M}_1$, если $\eta(0) = 0$, $\xi'(0) = 0$, а при $\tau = \pi/(2|\omega|)$ пересекает $\mathbf{M}_2$, если в этот момент времени η и ξ' также равны нулю. Эти условия удовлетворяются единственным значением $\xi(0)$, при $\alpha = 0$ и $\varkappa^2 \neq N^2\omega^2$ ($N = 0, 1, 2,...$).

Таким образом, при заданном значении h существует единственная точка на $\mathbf{M}_1$, из которой траектория в момент $\tau = \pi/(2|\omega|)$ достигает неподвижного множества $\mathbf{M}_2$. Следовательно, при таком выборе τ образ $\mathbf{M}_1^\tau$ пересекается с $\mathbf{M}_2$ в единственной точке, если рассматривать одну из ветвей $\mathbf{M}_1$ из одного квадранта.

Симметричные одновременно относительно $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ периодические орбиты могут иметь радиусы $a \leqslant [2k/(3m^2)]^{1/3}$. При $a < [k/(3m^2)]^{1/3}$ все такие орбиты можно построить с помощью теоремы 4. Для бóльших значений радиуса a необходимо непосредственно проверять выполнение на $\mathbf{M}_2$ условий $x = 0$, $y' = 0$.

3. Задача трех тел. В ограниченной задаче трех тел изучаются орбиты точки **P** пренебрежимо малой массы в гравитационном поле притяжения двух тел (точек) **S** и **J**, причем предполагается, что точка **P** не оказывает влияния на движение тел **S** и **J**. При надлежащем выборе масштаба и постоянных уравнения движения точки **P** в плоском варианте задачи имеют вид [9]

$$x^{\cdot\cdot} - 2y^{\cdot} = \partial U/\partial x, \quad y^{\cdot\cdot} + 2x^{\cdot} = \partial U/\partial y \tag{3.1}$$

$$U = (1-\mu)/R_1 + \mu/R_2 + (x^2+y^2)/2 \tag{3.2}$$

$$R_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad R_2^2 = (x+\mu-1)^2 + y^2$$

где $1-\mu$ и μ – безразмерные массы тел **S** и **J**, а R_1, R_2 – расстояния от точки **P** до тел **S** и **J** соответственно.

Ниже рассмотрим более общую задачу, когда точка **P** подвержена дополнительно силам светового давления от излучения одного или обоих тел **S** и **J**. В этом случае имеем фотогравитационную задачу трех тел, в которой силовая функция U имеет вид [19]

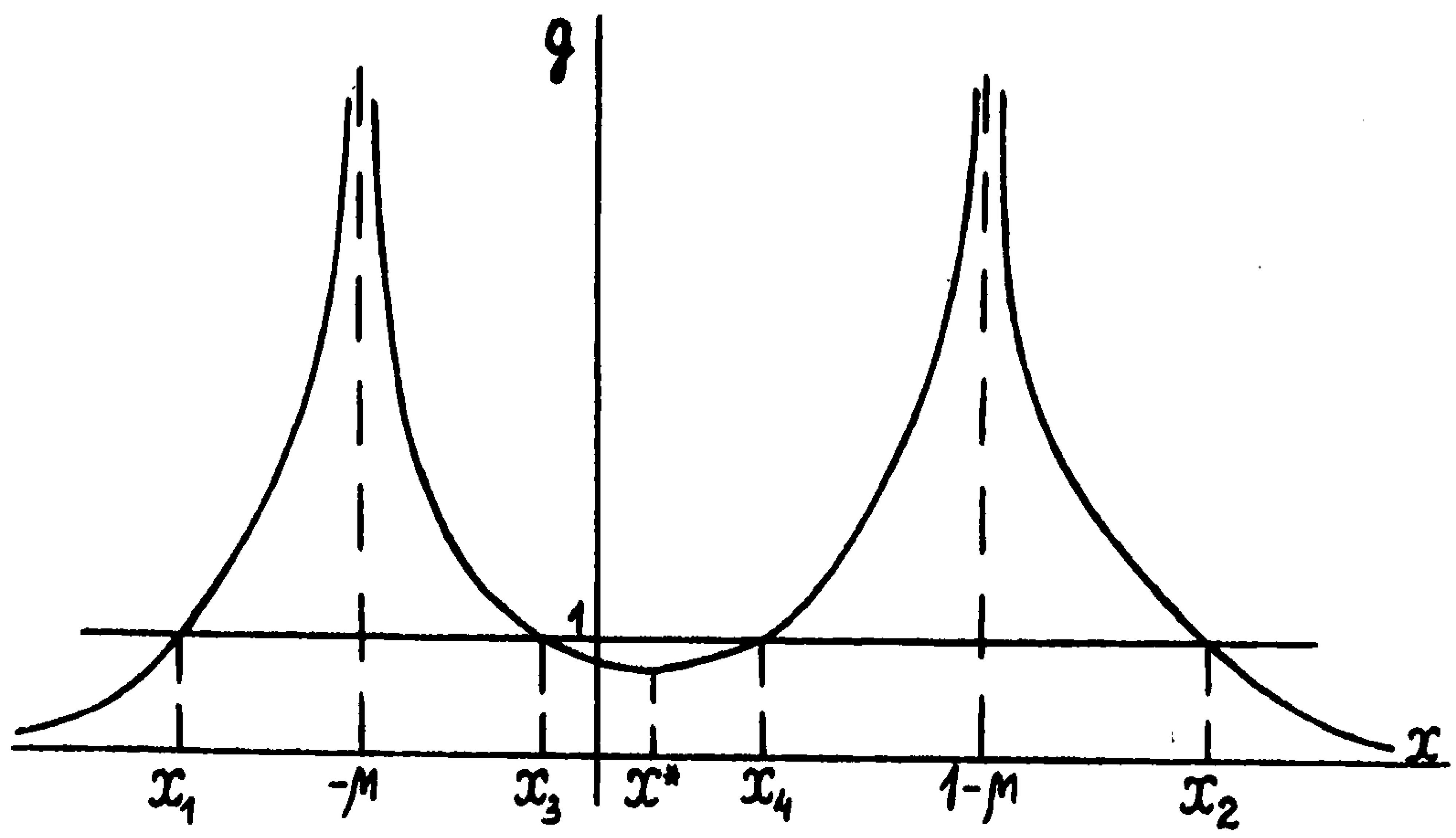
$$U = Q_1(1-\mu)/R_1 + Q_2\mu/R_2 + (x^2+y^2)/2 \tag{3.3}$$

причем физически допустимые значения параметров Q_1 и Q_2 принадлежат промежутку $(-\infty, 1]$. При $Q_1 = Q_2 = 1$ имеем классическую задачу (3.1), (3.2).

Система (3.1) с потенциалом (3.2) или в более общем случае, с потенциалом (3.3) является линейно обратимой системой вида (1.1), (1.2) с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{x, y, x', y' : y = 0, x' = 0\}$, причем $l = n = 2$. Однако наличие интеграла энергии

$$x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} = 2Q_1(1-\mu)/R_1 + 2Q_2\mu/R_2 + (x^2+y^2) + h \quad (h = \text{const}) \tag{3.4}$$

позволяет корректно применять метод разд. 1 для построения и классификации симметричных периодических орбит.



Фиг. 5

На неподвижном множестве **M** получим

$$y'^2 = 2Q_1(1-\mu)/|x+\mu| + 2Q_2\mu/|x+\mu-1| + x^2 + h \tag{3.5}$$

При выполнении этого равенства из интеграла (3.4) имеем

$$x'^2 = [1 - Q_1(1-\mu)/|x+\mu|^3 - Q_2\mu/|x+\mu-1|^3]y^2 + o(y^2)$$

Отсюда следует утверждение.

Теорема 5. Если $|y|$ достаточно мало по сравнению с $|x+\mu|$ и $|x+\mu+1|$, то условие (3.5) необходимо и достаточно для принадлежности к неподвижному множеству в той части фазового пространства, где

$$g(x) = Q_1(1-\mu)/|x+\mu|^3 + Q_2\mu/|x+\mu-1|^3 > 1 \tag{3.6}$$

Очевидно, условие (3.6) не выполняется ни при каких значениях x, если сила светового давления превалирует над силой гравитационного притяжения для каждого из основных тел ($Q_1 < 0$, $Q_2 < 0$), а также для вырожденного случая $Q_1 = Q_2 = 0$.

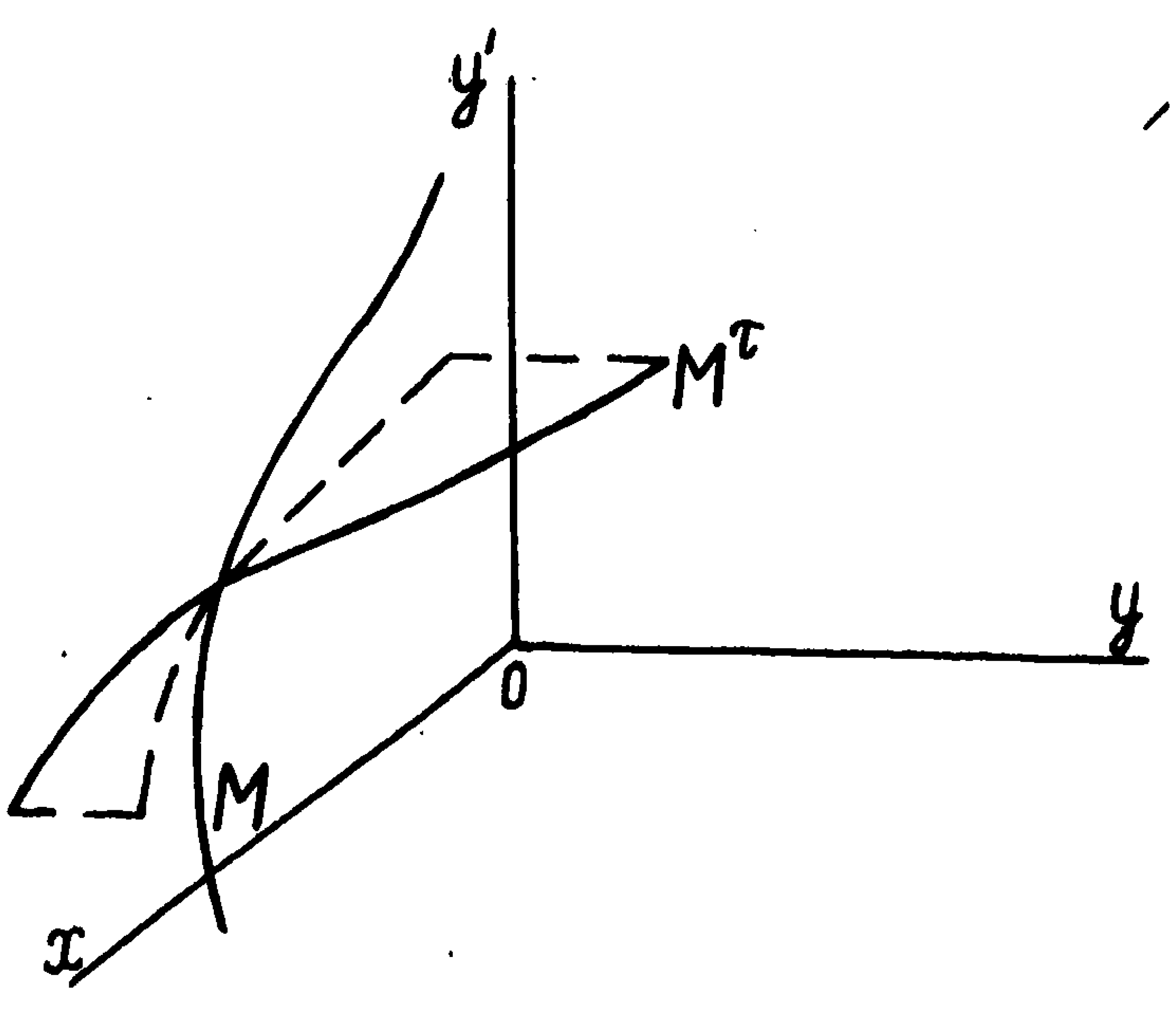
Рассмотрим случай $Q_1 \geqslant 0$, $Q_2 \geqslant 0$, причем $Q_1 + Q_2 > 0$, включающий случай классической задачи трех тел ($Q_1 = Q_2 = 1$). График функции $g(x)$ приведен на фиг. 5. Видно, что минимальное значение достигается в точке $x^* = 1/(1+\alpha) - \mu$, причем

$$g(x^*) = (1+\alpha)^3[Q_1(1-\mu) + Q_2\mu/\alpha^3]$$

$$\alpha = [Q_2\mu/(Q_1(1-\mu))]^{1/4}$$

Если $g(x^*) > 1$, то теорема 5 справедлива в области, где $x_1 < x < x_2$. В противном случае полоса $x_3 \leqslant x \leqslant x_4$ выпадает из рассмотрения.

Область возможных движений определяется из интеграла (3.4). Отсюда следует, что при $\nu > \nu^*$ ($\nu = -h$), где ν^* – некоторое положительное число, существует ограниченная инвариантная область на плоскости (x, y), для которой все симметричные периодические орбиты строятся на основе теоремы 5. Для этого необходимо при фиксированном



Фиг. 6

значении постоянной энергии рассмотреть многообразие (3.5) в области (3.6), построить образ $\mathbf{M}^\tau$ и определить точки пересечения $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^\tau$, принадлежащие области (3.6). Последняя задача решается корректно, также и при численном построении $\mathbf{M}^\tau$, ибо при этом малость $|y|$ гарантируется (фиг. 6).

Отметим, что в копенгагенском варианте [9] задачи трех тел ($Q_1 = Q_2 = 1$, $\mu = 1/2$) имеем $\alpha = 1$, $x^* = 0$, $g(x^*) = 8$, и условие (3.6) выполнено. Поэтому строятся симметричные периодические орбиты в области $x_1 < x < x_2$, причем $x_1 < -0{,}5$, а $x_2 > 0{,}5$.

4. Тяжелое твердое тело с неподвижной точкой. Сохраняя обычные обозначения [20], выпишем уравнения движения задачи

$$Adp/dt + (C-B)qr = P(\gamma_2 z_c - \gamma_3 y_c), \quad d\gamma_1/dt = r\gamma_2 - q\gamma_3 \tag{4.1}$$

$(pqr, ABC, xyz, 123)$

Система (4.1) допускает три интеграла – энергии, кинетического момента и геометрический

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_c\gamma_1 + y_c\gamma_2 + z_c\gamma_3) = 2h \quad (h = \text{const})$$

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \beta \quad (\beta = \text{const}), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{4.2}$$

Пусть $y_c = 0$. Тогда система (4.1), наряду с неподвижным множеством $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r: p = q = r = 0\}$, имеет неподвижное множество $\mathbf{M} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r: \gamma_2 = 0, q = 0\}$. Получаем систему вида (1.1), (1.2) с $l = 4$, $n = 2$.

Симметричные относительно $\mathbf{M}$ периодические движения представляют большой интерес. Так, к ним относятся регулярные прецессии Гриоли

$$p = n(x_c - z_c\cos\tau)/l, \quad q = n\sin\tau, \quad r = n(z_c + x_c\cos\tau)/l, \quad \tau = nt - \varepsilon + \pi/2$$

$$\gamma_1 = -\frac{n^2}{Pl^2}[Cz_c\cos\tau + (B-C)x_c\sin^2\tau]$$

$$\gamma_2 = \frac{n^2}{Pl^3}[(Ax_c^2 + Cz_c^2)\sin\tau - (A-C)x_c z_c \sin\tau\cos\tau]$$

$$\gamma_3 = \frac{n^2}{Pl^2}[Ax_c\cos\tau + (A-B)z_c\sin^2\tau]$$

$$l_2 = x_c^2 + z_c^2, \quad n^4 = \frac{P^2l^2}{(A-B)(B-C) + (A-B+C)^2}$$

(ε – постоянная), которые возможны [21] при $x_c\sqrt{B-C} = z_c\sqrt{A-B}$ $(A > B > C)$. Для этих движений ось прецессии не совпадает с вертикалью, образуя с ней угол δ, причем

$\cos\delta = n^2(A-B-C)/(Pl)$

На неподвижном множестве $\mathbf{M}$ имеем

$$\gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad Ap\gamma_1 + Cr\gamma_3 = \beta, \quad Ap^2 + Cr^2 + 2P(x_c\gamma_1 + z_c\gamma_3) = 2h \tag{4.3}$$

С другой стороны, при выполнении (4.3) из интегралов (4.2) выводим $\gamma_2 = 0$, $q = 0$.

Теорема 6. Условия (4.3) необходимы и достаточны для принадлежности к неподвижному множеству $\mathbf{M}$.

Таким образом, для построения всех симметричных периодических движений при фиксированных h, β определяем кривые $\mathbf{\Gamma}_* = \{\gamma_1 = \cos\alpha, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = \sin\alpha, p = p(\alpha), q = 0, r = r(\alpha)\}$, $\mathbf{\Gamma}_* \subset \mathbf{M}$, на плоскости (p, α) или (r, α) строим их проекции $\mathbf{\Gamma}_p = \{\alpha, p: p = p(\alpha)\}$ $(\mathbf{\Gamma}_r = \{\alpha, r: r = r(\alpha)\})$, находим образ $\mathbf{\Gamma}_*^\tau$ и его проекцию $\mathbf{\Gamma}_p^\tau$ или $\mathbf{\Gamma}_r^\tau$. Тогда значению α^* в точке пересечения Γ_p и Γ_p^τ (Γ_r и Γ_r^τ) отвечает симметричное $(2\tau/k)$-периодическое ($k \in \mathbb{N}$) движение (фиг. 7).

Существование значений α^* обосновывается и при численном построении Γ_*^τ, ибо каждой точке $\Gamma_p \cap \Gamma_p^\tau$ ($\Gamma_r \cap \Gamma_r^\tau$) отвечает точка $\Gamma_* \cap \Gamma_*^\tau$ и наоборот. Задача о пересечении $\Gamma_{p,r}$ и $\Gamma_{p,r}^\tau$ корректно решается теоремой Коши о промежуточном значении непрерывной функции.

5. Тяжелое твердое тело на абсолютно шероховатой плоскости. Задача описывается [3] замкнутой системой из шести уравнений первого порядка относительно проекций векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ (или $\mathbf{r}$)

$$\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}) = mg\mathbf{r}\times\boldsymbol{\gamma} - m\mathbf{r}\times[\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})],\quad \boldsymbol{\gamma}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

Здесь m – масса тела, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор мгновенной угловой скорости тела, g – ускорение свободного падения, $\boldsymbol{\theta}$ – центральный тензор инерции тела, $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ – радиус-вектор точки соприкосновения тела с плоскостью, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – направленный вверх единичный вектор вертикали в этой точке.

Связь между векторами $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ устанавливается с помощью уравнения поверхности тела; если это уравнение записано в виде $f(\mathbf{r}) = 0$, то

$$\boldsymbol{\gamma} = -\operatorname{grad} f(\mathbf{r})/|\operatorname{grad} f(\mathbf{r})| \tag{5.2}$$

Ниже рассматривается случай, когда оси связанной системы координат направлены по главным центральным осям инерции, а движение происходит без подскока. В этом случае $\mathbf{R}\boldsymbol{\gamma} > 0$, где

$$\mathbf{R} = mg\boldsymbol{\gamma} - m[\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]$$

– реакция опорной плоскости.

Система (5.1), (5.2) линейно обратима с неподвижным множеством $\mathbf{M}_* = \{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{\omega} = \mathbf{O}\}$.

Наличие двух первых интегралов – энергии и геометрического

$$m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2 + \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}) - 2mg(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}) = 2h \ \ (h = \text{const}),\quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

позволяет описать задачу системой из четырех уравнений, зависящих от параметра h, или неавтономной системой третьего порядка.

Выполним замену переменных

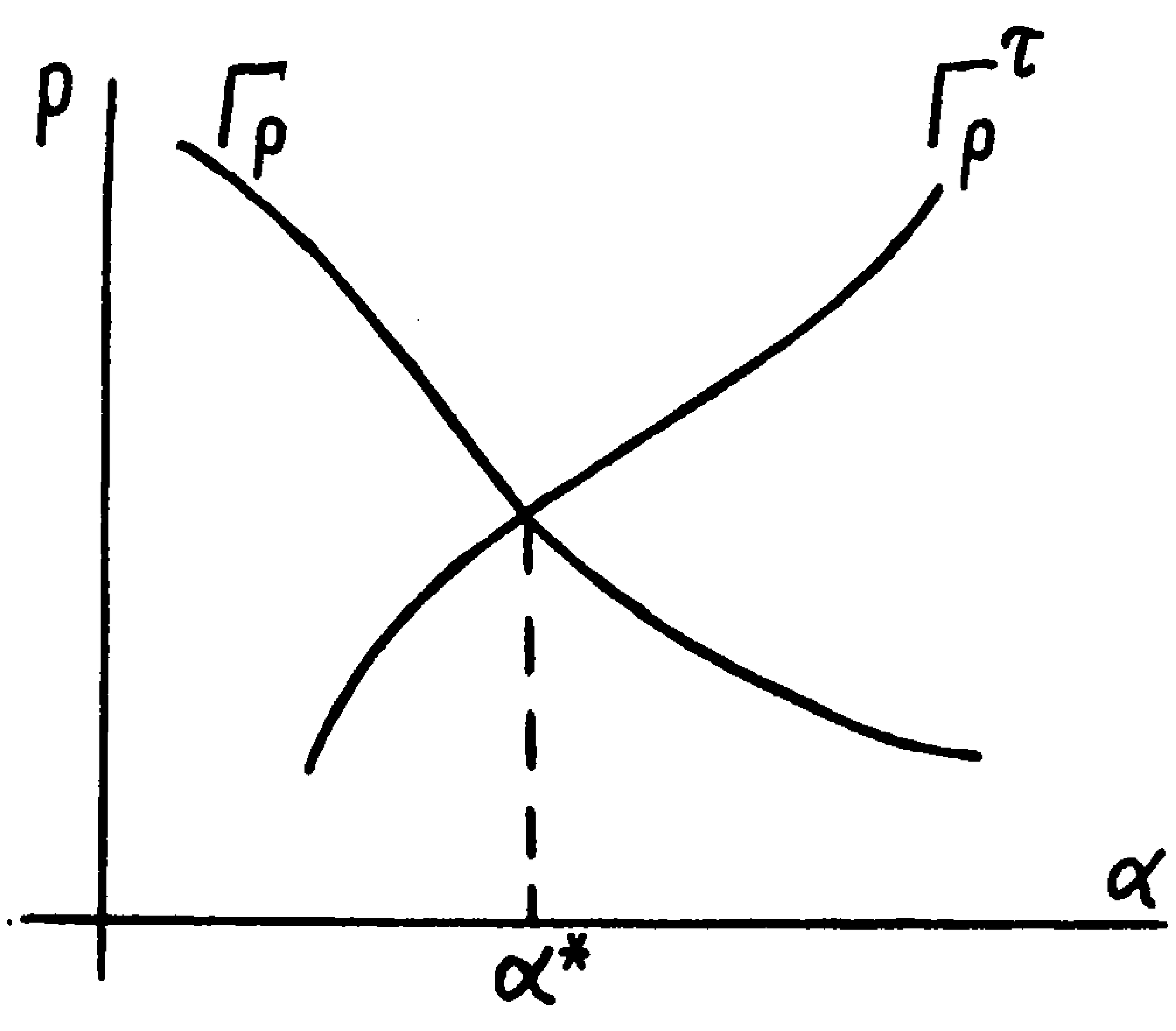
$$\gamma_1 = \sin\theta\cos\varphi,\quad \gamma_2 = \sin\theta\sin\varphi,\quad \gamma_3 = \cos\theta \ \ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \tag{5.3}$$

$$\omega_1 = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\quad \omega_2 = p\sin\varphi + q\cos\varphi,\quad \omega_3 = r$$

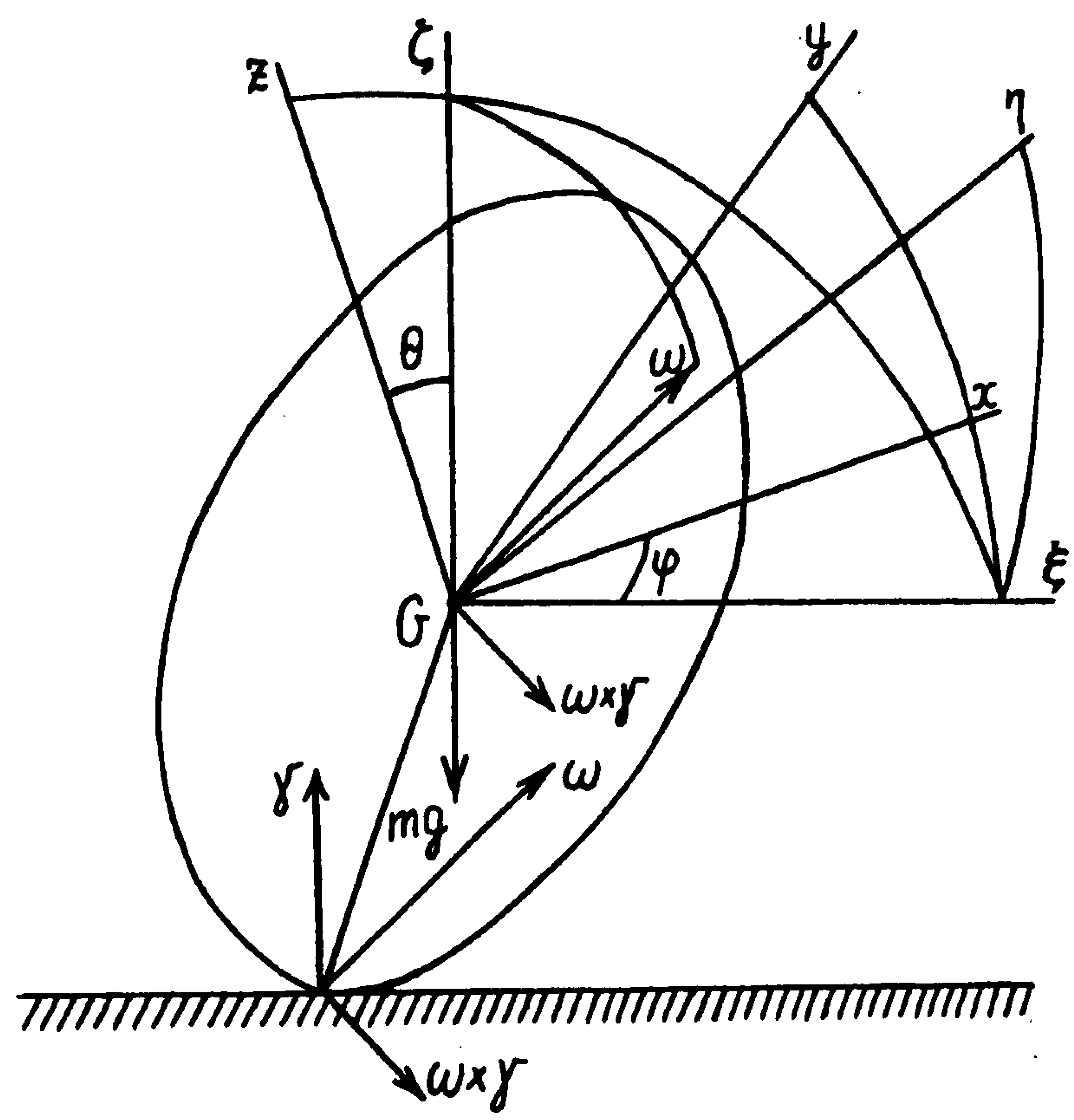
Тогда получим

$$\theta^{\cdot} = -q,\quad \varphi^{\cdot} = -r + p\operatorname{ctg}\theta \ \ (\sin\theta \neq 0)$$

Величина $\chi = -r\sin\theta + p\cos\theta$ – проекция вектора $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}$ на ось $G\eta$, перпендикулярную $G\xi$ в координатной плоскости xy; G – центр масс тела, $G\xi$ – линия пересечения плоскости xy с плоскостью, проходящей через ось Gz и вертикаль (фиг. 8). Поэтому $\chi = 0$, если $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ или, когда $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$, но вектор $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}$ принадлежит плоскости $G\xi z$. В случае $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ имеем или $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, или векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ коллинеарны. Если $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ все время, то имеем положение равновесия. Если $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ по крайней мере для двух моментов времени, то в силу принадлежности множества $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ неподвижному множеству $\mathbf{M}_*$ получим периодическое движение. Если $\boldsymbol{\omega}$ обращается в нуль на траектории только один раз при $t = t^*$, то при $t > t^*$ ($t < t^*$)



Фиг. 7



Фиг. 8

имеем общий случай, когда $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$. Если же $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, но $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, то в случае точки контакта с $\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$ имеем перманентные вращения вокруг вертикали.

Пусть вектор $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}$ принадлежит плоскости $G\xi z$. Тогда вектор мгновенной угловой скорости необходимо перпендикулярен этой плоскости. Такое положение $\boldsymbol{\omega}$ во все время движения означает качение в одном направлении в плоскости $G\xi z$. В частности, угол $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$, и имеем качение в главных плоскостях Gxz или Gyz при условии, конечно, что такие движения допустимы.

Возможность тех или иных движений определяется положениями векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, но также и формой поверхности тела. Если форма такова, что горизонтальному положению $\boldsymbol{\omega}$ отвечает целая полутраектория системы уравнений (5.1), (5.2), то описание всех остальных движений, исключая равновесие и перманентные вращения вокруг вертикали, можно проводить, вводя новое "время" φ.

Обратимся к формулам преобразования (5.3). В них углы φ и θ, а также новые проекции p, q, r входят неравноправно. Ниже это скажется в том, что при горизонтальном положении вектора $\boldsymbol{\omega}$, одновременно принадлежащем плоскости $G\xi z$, имеем $\chi \neq 0$. Иначе, качение, в котором одна из главных плоскостей параллельна вертикальной плоскости, также может быть описано с новым "временем" φ.

Лемма. Движение тяжелого твердого тела по абсолютно шероховатой плоскости может быть описано с новым "временем" φ; исключительными являются только положения равновесия ($\boldsymbol{\omega} = 0$) и перманентные вращения вокруг вертикали ($\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$).

Укажем, что исключительные движения достаточно хорошо изучены (см. например [4]).

В результате перехода к новой независимой переменной φ получм 2π-периодическую систему третьего порядка

$$\begin{aligned} dp/d\varphi &= q + (\varphi^{\cdot} S)^{-1}\{(X + mxzr^{\cdot})[(B + m(x^2 + z^2))\cos\varphi + mxy\sin\varphi] + \\ &+ (Y + myzr^{\cdot})[(A + m(y^2 + z^2))\sin\varphi + mxy\cos\varphi]\} \\ dq/d\varphi &= -p - (\varphi^{\cdot} S)^{-1}\{(X + mxzr^{\cdot})[(B + m(x^2 + z^2))\sin\varphi - mxy\cos\varphi] + \\ &+ (Y + myzr^{\cdot})[-(A + m(y^2 + z^2))\cos\varphi + mxy\sin\varphi]\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$d\theta / d\varphi = -q / \varphi^{\cdot}$$

$$X = (B-C)\omega_2\omega_3 + m\{g(\gamma_3 y - \gamma_2 z) - \omega_1(xx^{\cdot} + yy^{\cdot} + zz^{\cdot}) + x^{\cdot}(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) -$$

$$-\omega_3 y(\omega_1 x + \omega_2 y) + \omega_2 z(\omega_3 z + \omega_1 x) + yz(\omega_2^2 - \omega_3^2)\}$$

$$Y = (C-A)\omega_3\omega_1 + m\{g(\gamma_1 z - \gamma_3 x) - \omega_2(xx^{\cdot} + yy^{\cdot} + zz^{\cdot}) + y^{\cdot}(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) -$$

$$-\omega_1 z(\omega_2 y + \omega_3 z) + \omega_3 x(\omega_1 x + \omega_2 y) + zx(\omega_3^2 - \omega_1^2)$$

$$S = AB + Am(x^2 + z^2) + Bm(y^2 + z^2) + m^2 z^2(x^2 + y^2 + z^2), \quad \theta = \mathrm{diag}\{A, B, C\}$$

В правых частях этой системы необходимо выразить $\mathbf{r}$ через $\boldsymbol{\gamma}$ и перейти к новым переменным по формулам (5.3); проекция r и скорость $r^{\cdot}$ исключаются посредством интеграла энергии.

Пусть производная f_y' – нечетная функция y. Тогда система (5.1), (5.2) имеет еще одно неподвижное множество $\mathbf{M} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3\colon \gamma_2 = 0, \omega_2 = 0\}$. Это приводит к тому, что система (5.4) инвариантна относительно замены $(\varphi, p, q, \theta) \to (-\varphi, p, -q, \theta)$, т.е. является 2π-периодической линейно обратимой системой с неподвижным множеством $\mathbf{M}_h = \{p, q, \theta\colon q = 0\}$. Для такой системы теорема 3 позволяет строить все симметричные $(2\pi/k)$-периодические по φ движения ($k \in \mathbb{N}$). Понятно, что, подставляя вместо φ зависимость $\varphi(t)$, где

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{-r(\varphi) + \mathrm{ctg}\,\theta(\varphi)} \tag{5.5}$$

тем самым построим все симметричные периодические движения системы (5.1), (5.2).

Теорема 7. Пусть $\mathbf{\Omega}_h^{\pi}$ – множество всех симметричных $(2\pi/k)$-периодических ($k \in \mathbb{N}$) по θ движения системы (5.4) при заданном значении постоянной энергии h. Тогда $\mathbf{\Omega}_h^{\pi} \cap \mathbf{M}_h \subset \mathbf{M}_h \cap \mathbf{M}_h^{\pi}$, а начальные значения для всех симметричных периодических движений системы (5.1), (5.2) с $f_y'(x, -y, z) = -f_y'(x, y, z)$ на заданном уровне h определяются по формулам

$$\gamma_1 = \sin\theta_*, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \cos\theta_*, \quad \omega_1 = p_*, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = r_*$$

где $(p_*, q_*, \theta_*) \in \mathbf{M}_h \cap \mathbf{M}_h^{\pi}$.

Задача определения точек множества $\mathbf{M}_h \cap \mathbf{M}_h^{\pi}$ имеет корректное решение. В самом деле, выберем прямую $\mathbf{\Gamma}_h = \{p, q, \theta\colon q = 0, \theta = \theta_0\}$, где θ_0 – некоторое фиксированное число из промежутка $(0, \pi]$ и построим $\mathbf{\Gamma}_h^{\pi} \subset \mathbf{M}_h^{\pi}$. Тогда $\mathbf{\Gamma}_h^{\pi}$ содержит точку из $\mathbf{M}_h$, если на $\mathbf{\Gamma}_h^{\pi}$ переменная q меняет знак.

В заключение отметим, что задачи разд. 2–4 можно свести к исследованию 2π-периодической обратимой системы и исследовать так же, как и задачу разд. 5.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-010-1674а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
2. *Heinbockel J.H., Struble R.A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. N 2. P. 425–440.
3. *Карапетян А.В.* Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. N 2. С. 19–24.

4. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
5. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
6. *Devaney R.L.* Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 89–113.
7. *Тхай В.Н.* Периодические движения однородного эллипсоида на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. N 6. С. 24–30.
8. *Матвеев М.В., Тхай В.Н.* Устойчивость периодических обратимых систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 3–11.
9. *Себехей В.* Теория орбит. М.: Наука, 1982. 656 с.
10. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
11. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
12. *Эйлер Л.* Новая теория движения Луны. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. 208 с.
13. *Hill G.W.* Researches in the lunar theory // Amer. J. Math. 1878. V. 1. P. 5–26, 129–147, 245–260.
14. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Новые методы небесной механики. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
15. *Schanzle A.F.* Horseshoe-shaped orbits in Jupiter–Sun restricted problem // Astron. J. 1967. V. 72. N 2. P. 149–157.
16. *Ляпунов А.М.* О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1. С. 418–446.
17. *Аксенов Е.П.* Задача Хилла и ее периодические решения // Почти периодические орбиты в небесной механике. М.: Изд-во МГУ, 1990. С. 26–46.
18. *Тхай В.Н.* Симметрчные периодические орбиты задачи многих тел. Резонансность и парад планет // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 355–365.
19. *Kunitsyn A.L., Polyakhova E.N.* The restricted photogravitational three-body problem // Astron. Astroph. Trans. 1995. V. 6. P. 283–293.
20. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972. 332 с.
21. *Гуляев М.П.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку // Вест. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1955. N 3. С. 15–21.

Москва

Поступила в редакцию
15.I.1996