УДК 531.36, 531.314.3

© 1996 г. Э.Э. Шноль

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К ГАМИЛЬТОНОВЫМ

Рассматривается малое "диссипативное" возмущение линейной гамильтоновой системы с периодическими коэффициентами, превращающее ее в асимптотически устойчивую систему. Обсуждаются условия, при которых это возмущение остается диссипативным для всех гамильтоновых систем, достаточно близких к исходной.

1. Постановка задачи и основные результаты. Пусть линейная гамильтонова система дифференциальных уравнений $\langle H_0 \rangle$ с периодическими коэффициентами устойчива – каждое ее решение ограничено. Всякая устойчивая система сильно устойчива, если среди ее мультипликаторов нет кратных[1]. Если есть кратные мультипликаторы, то для сильной устойчивости нужны дополнительные условия. Такие условия – необходимые и достаточные – были найдены М.Г. Крейном, И.М. Гельфандом и В.Б. Лидским (см. [1, гл. 3], [2, § 42] и п. 2В ниже).

Предположим теперь, что устойчивая система $\langle H_0 \rangle$ возмущена малыми ($\sim \varepsilon$) слагаемыми, сохраняющими линейность и периодичность. Назовем такое возмущение диссипативным для системы $\langle H_0 \rangle$, если оно превращает ее в асимптотически устойчивую систему. Назовем возмущение усиленно диссипативным, если то же свойство сохраняется для некоторой окрестности исходной гамильтоновой системы. Если все мультипликаторы системы $\langle H_0 \rangle$ различны, то из диссипативности (при некотором уточнении определения) следует усиленная диссипативность. При кратных мультипликаторах нужны дополнительные условия. Достаточное условие указано в работе [3], где малыми, порядка ε, считаются и гамильтоновы и негамильтоновы возмущения (см. разд. 7 ниже).

Основная цель этой заметки – показать, что это условие является также и необходимым. Более точно, оно близко к необходимому и достаточному настолько, насколько это обычно возможно для условий устойчивости: если строгие неравенства (типа $<$) достаточны, то нестрогие (типа $\leqslant$) необходимы для устойчивости. Это утверждение справедливо для обоих вариантов определений – принятого в работе [3] и используемого ниже. Перейдем к точным формулировкам.

Запишем исходную гамильтонову систему $\langle H_0 \rangle$ в виде

$$\frac{dx}{dt} = JH_0(t)\mathbf{x}; \quad H_0(t) \equiv H_0(t+T), \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.1}$$

Здесь (при каждом t) $H_0(t)$ – симметрическая матрица, I_n – единичная $(n \times n)$-матрица, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Пусть $\Phi_0(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (1.1), для которой $\Phi_0(0) = I_{2n}$. Обозначим через $\Phi_0 = \Phi_0(T)$ оператор отображения за период (оператор

[1] Определения напоминаются ниже.

монодромии) и через μ_k его собственные значения – мультипликаторы системы (1.1). Система (1.1) устойчива, если все $|\mu_k| = 1$ и Φ_0 имеет полный набор собственных векторов – матрица Φ_0 приводится к диагональному виду. (Ниже используются стандартные базисы в пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ и потому не различаются в обозначениях линейные операторы и их матрицы.)

Будем называть δ-окрестностью системы (1.1) множество всех гамильтоновых систем $\dot{\mathbf{x}} = JH(t)\mathbf{x}$, для которых $\|H(t) - H_0(t)\| < \delta$ $(0 \leqslant t \leqslant T, H(t) \equiv H(t+T))$. Здесь $\|\ \|$ – какая-то норма матрицы. (Вместо равномерной близости H и H_0 можно потребовать близости в среднем: малости интеграла от $\|H(t) - H_0(t)\|$ по периоду.)

Система (1.1) называется сильно устойчивой, если для некоторого $\delta > 0$ устойчивы все системы из ее δ-окрестности.

Рассмотрим "возмущенную" систему с тем же периодом

$$\dot{\mathbf{x}} = JH_0(t)\mathbf{x} + D(t,\varepsilon)\mathbf{x}; \quad D(t,\varepsilon) = \varepsilon D(t) + o(\varepsilon) \tag{1.2}$$

Определение 1. Возмущение $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$ называется диссипативным для системы (1.1), если система (1.2) асимптотически устойчива при всех ε из интервала $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ (все ее мультипликаторы лежат внутри единичного круга).

Если система (1.1) допускает диссипативное возмущение, то все $|\mu_k| = 1$, но она не обязана быть устойчивой (слабый, линейный по t рост решений возможен). "Нормально" при диссипативном возмущении расстояние $\mu_k(\varepsilon)$ от окружности $|\mu| = 1$ будет порядка ε. Чтобы исключить вырожденные случаи, когда ответ может зависеть от (невыписанных) членов $o(\varepsilon)$, введем соответствующее требование в определение.

Определение 1а. Возмущение $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$ диссипативно по первому приближению, если для всех мультипликаторов системы (1.2) выполнено неравенство: $|\mu_k(\varepsilon)| < 1 - c\varepsilon$ ($c > 0$ и не зависит от ε).

Определение 2. Возмущение $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$ усиленно диссипативно для системы (1.1), если оно диссипативно для любой системы из некоторой δ-окрестности (1.1).

Замечание 1. Чтобы система (1.1) допускала усиленно диссипативное возмущение, она должна быть сильно устойчива. Действительно, если сильной (гамильтоновой) устойчивости нет, то в любой δ-окрестности (1.1) есть экспоненциально неустойчивая система (имеющая мультипликаторы вне единичного круга). При достаточно малом ε неустойчивость сохранится.

Чтобы получить условия диссипативности, выясним, как изменяются собственные значения оператора монодромии Φ из-за малого возмущения. Для простоты предположим, что $D(t, \varepsilon)$ аналитически зависит от ε. Не оговаривая каждый раз, будем считать, что матричные функции $H(t)$ и $D(t, \varepsilon)$ имеют по t период T (и непрерывны или кусочно-непрерывны).

2. Вспомогательные сведения. *A. Выход в комплексную область* (см. [1]). Переходя от $\mathbb{R}^m$ к $\mathbb{C}^m$ $(m = 2n)$, доопределим линейные операторы A обычным образом: $A\mathbf{z} = A\mathbf{x} + iA\mathbf{y}$ для $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m)$. При этом $A\bar{\mathbf{z}} = \overline{A\mathbf{z}}$, $(\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{x}} - i\bar{\mathbf{y}})$. Пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Положим в $\mathbb{C}^m$

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^{m} z^k \overline{w^k}; \ \mathbf{z} = (z^1,...,z^m); \ \mathbf{w} = (w^1,...,w^m) \tag{2.1}$$

Антисимметричная билинейная форма $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = (J\mathbf{x}, \mathbf{y})$, сохраняющаяся при изменении $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в силу гамильтоновой системы, перейдет в $[\mathbf{z}, \mathbf{w}] = (J\mathbf{z}, \mathbf{w})$; при этом значения $[\mathbf{z}, \mathbf{z}]$ чисто мнимы. Положим

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = i[\mathbf{z}, \mathbf{w}] = i(J\mathbf{z}, \mathbf{w}) \tag{2.2}$$

Квадратичная (эрмитова) форма $\nu(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$ вещественна и не вырождена, но знакопеременна. Будем обозначать A^+ – оператор, сопряженный к A в смысле (2.2): $\langle A\mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{z}, A^+\mathbf{w}\rangle$. Если матрица A вещественна, то $A^+ = -JA^*J$, где A^* – транспонированная матрица.

Оператор монодромии Φ для гамильтоновой системы сохраняет $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ (матрица Φ – симплектическая). В $\mathbb{C}^m$ получим: $\langle \Phi\mathbf{z}, \Phi\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle$, т. е. оператор Φ унитарен в смысле (2.2), $\Phi^+ = \Phi^{-1}$. Если $\mathbf{e}$ – собственный вектор, $\Phi\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$, то $\langle \Phi\mathbf{e}, \Phi\mathbf{e}\rangle = |\mu|^2 \langle \mathbf{e}, \mathbf{e}\rangle$. Отсюда следует: или $|\mu| = 1$ или $\nu(\mathbf{e}) = 0$. Если $|\mu| = 1$, но μ – кратное собственное значение, которому отвечает жорданова клетка, то также $\nu(\mathbf{e}) = 0$. Действительно, в этом случае есть вектор $\mathbf{f}$, такой, что $\Phi\mathbf{f} - \mu\mathbf{f} = \mathbf{e}$. Тогда $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}\rangle = (\bar{\mu}^{-1} - \mu)\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}\rangle = 0$. Если $|\mu| = 1$ и μ – простое собственное значение, то $\nu(\mathbf{e}) \neq 0$. Пусть $\Phi\mathbf{e}_k = \mu_k\mathbf{e}_k$, тогда $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = 0$, если $\mu^1\bar{\mu}^2 \neq 1$.

Б. Леммы из теории возмущений линейных операторов в $\mathbb{C}^m$ [4].

Лемма 1. Пусть E_0 – s-мерное инвариантное подпространство оператора A_0, отвечающее собственному значению λ кратности s. Пусть $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon B$. Тогда при $|\varepsilon| < \varepsilon_*$ оператор $A(\varepsilon)$ имеет инвариантное подпространство E_ε, близкое к E_0: если P_ε – оператор проектирования на E_ε ($P_\varepsilon A(\varepsilon) = A(\varepsilon)P_\varepsilon$), то $\|P_\varepsilon - P_0\| \leqslant C\varepsilon$.

Если все собственные значения A_0 различны, то $\lambda_k(\varepsilon)$ в окрестности $\varepsilon = 0$ – аналитические функции ε. При наличии кратных $\lambda_k(0)$ это не так. Но если матрица A_0 не имеет жордановых клеток, то в первом порядке по ε формулы теории возмущений выглядят так, как будто бы кратности нет.

Лемма 2. Пусть A_0 имеет s-кратное собственное значение λ, которому отвечает s-мерное инвариантное подпространство E_0, состоящее из собственных векторов. Тогда $A(\varepsilon)$ имеет при $|\varepsilon| \ll 1$ собственные значения $\lambda_k(\varepsilon)$, для которых

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon\gamma_k + o(\varepsilon), \quad k = 1,\dots,s \tag{2.3}$$

Здесь γ_k – собственные значения оператора $B_1 = PB$ на (инвариантном для него) подпространстве E_0, P – проектор на E_0. Каждое γ_k в формуле (2.3) повторяется столько раз, какова его кратность.

Уточнения. 1°. Некоторые из $\lambda_k(\varepsilon)$ могут быть тождественно кратными: $\lambda_i(\varepsilon) \equiv \lambda_j(\varepsilon)$ – возмущение не обязательно полностью снимает вырождение.

2°. Леммы остаются справедливыми при замене B на $B(\varepsilon)$, если зависимость от ε аналитическая; при этом $B_1 = P_0B(0)$.

В. Условия сильной устойчивости для гамильтоновых систем [1]. Пусть Φ_0 – оператор монодромии системы (1.1); $\mu_1,\dots,\mu_l$ – совокупность (попарно различных) мультипликаторов ($l \leq 2n$). Пусть E_j – инвариантное подпространство, отвечающее μ_j.

Теорема (Крейна–Гельфанда–Лидского). Для сильной устойчивости системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы форма $\nu(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle$ была дефинитна на каждом из подпространств E_j.

Замечание 2. Из условия теоремы следует (см. А), что все $|\mu_j| = 1$ и Φ_0 не имеет жордановых клеток. Если условие теоремы выполнено для Φ_0, то оно верно и для близких к Φ_0 симплектических матриц. Отсюда ясна достаточность условий теоремы. Заметим, что условия теоремы исключают вещественные μ_j.

3. Диссипативные возмущения при простых мультипликаторах. Пусть все мультипликаторы системы (1.1) простые и система устойчива: $\Phi_0\mathbf{e}_k = \mu_k\mathbf{e}_k$; $k = 1,\dots,2n$; $|\mu_k| = 1$. Мультипликаторы системы (1.2) имеют вид

$$\mu_k(\varepsilon) = \mu_k + \varepsilon\gamma_k + O(\varepsilon^2)$$

Обозначим $r_k = \mathrm{Re}(\bar{\mu}_k\gamma_k)$. Если $r_j < 0$, то (при малых ε) $|\mu_j(\varepsilon)| < 1$. Для диссипативности $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$ достаточно, чтобы при всех j было $r_j < 0$ и необходимо выполнение каждого из неравенств $r_j \leqslant 0$. Если неравенства $r_j < 0$ выполнены для $H_0(t)$, то они сохранятся для близких функций $H(t)$.

Итак: если возмущение $D(t, \varepsilon)x$ для системы (1.1) диссипативно по первому приближению, то оно усиленно диссипативно (см. определения в разд. 1).

Выпишем формулы более явно. Пусть оператор монодромии системы (1.2) имеет вид: $\Phi_\varepsilon = \Phi_0 + \varepsilon\Psi_0 + o(\varepsilon)$. Для γ_k справедливы обычные выражения $\gamma_k = \langle\Psi_0\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\rangle / \langle\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\rangle$ (напомним, что здесь все $\langle\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\rangle \neq 0$). Заметим, что $\bar{\mu}_k\left\langle\Psi_0\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_k\right\rangle = \left\langle\Phi_0^{-1}\Psi_0\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_k\right\rangle$, и перепишем условия $r_k < 0$ $(k = 1,\dots,2n)$ в виде:

$$Q_\nu(\mathbf{e}_k) < 0; \quad Q_\nu(\mathbf{z}) = \langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle\mathrm{Re}\left\langle\Phi_0^{-1}\Psi_0\mathbf{z},\mathbf{z}\right\rangle \tag{3.1}$$

Считая известной фундаментальную матрицу $\Phi_0(t)$, напишем формулу для $V_0 = \Phi_0^{-1}\Psi_0$

$$\Phi_\varepsilon = \Phi_0 + \varepsilon\Psi_0 + o(\varepsilon); \quad V_0 = \int_0^T \Phi_0^{-1}(t)D(t)\Phi_0(t)dt \tag{3.2}$$

Итак, при простых мультипликаторах все просто. Перейдем теперь к основной задаче – рассмотрению случая кратных мультипликаторов.

Замечание 3. Если есть простой мультипликатор μ_j (а про остальные ничего не известно), то условие $Q_\nu(\mathbf{e}_j) \leqslant 0$, очевидно, необходимо для диссипативности $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$.

4. Достаточные условия усиленной диссипативности. Пусть система (1.1) сильно устойчива (см. разд. 1 и 2В). Тогда каждый мультипликатор $\mu_k(\varepsilon)$ системы (1.2) "порождается" неким мультипликатором μ_j системы (1.1) (см. лемму 2):

$$\mu_k(\varepsilon) = \mu_j + \varepsilon\gamma_k + o(\varepsilon), \quad j = j(k)$$

Фиксируем j и рассмотрим группу мультипликаторов $\mu_k(\varepsilon)$, порождаемых одним $\mu = \mu_j$. Пусть $E = E_j$ – соответствующее инвариантное подпространство Φ_0 и $P = P_j$ – проектор на E_j, $P\Phi_0 = \Phi_0 P$. Числа γ_k – собственные значения $P\Psi_0$ на E (Ψ_0 см. (3.2)). Все $\mu_k(\varepsilon)$ из этой группы будут внутри единичного круга, если все $\mathrm{Re}(\bar{\mu}\gamma_k) < 0$, т.е. все собственные значения оператора $K = \bar{\mu}P\Psi_0$ (рассматриваемого на E) лежат в левой полуплоскости. Достаточное условие для этого: $\mathrm{Re}\langle K\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle < 0$, если $\nu(\mathbf{z}) = \langle\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle > 0$ на E (при $\mathbf{z} \neq 0$); при $\nu(\mathbf{z}) < 0$ на E меняется знак требуемого неравенства. Заметим теперь, что для "унитарного" оператора Φ_0 проекторы P "самосопряженные": $\langle P\mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{z}, P\mathbf{w}\rangle$. Поэтому для $\mathbf{z} \in E$, $V_0 = \Phi_0^{-1}\Psi_0$

$$\langle K\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle = \bar{\mu}\left\langle\Psi_0\mathbf{z},\mathbf{z}\right\rangle = \left\langle\Psi_0\mathbf{z},\Phi_0\mathbf{z}\right\rangle = \left\langle V_0\mathbf{z},\mathbf{z}\right\rangle \tag{4.1}$$

Перебирая все E_j, получим: все $|\mu_k(\varepsilon)| < 1$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$, если для любого j выполнены неравенства

$$\nu(\mathbf{z}) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{z} \in E_j(\mathbf{z} \neq 0); \quad \nu(\mathbf{z}) = \langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \tag{4.2}$$

$$Q_\nu(\mathbf{z}) \equiv \nu(\mathbf{z})Q(\mathbf{z}) < 0 \quad \text{для тех же} \quad \mathbf{z}; \quad Q(\mathbf{z}) = \mathrm{Re}\left\langle V_0\mathbf{z},\mathbf{z}\right\rangle \tag{4.3}$$

Условия (4.2), (4.3) достаточны и для усиленной диссипативности. Если заменить $H_0(t)$ на близкую функцию $H(t)(\|H(t) - H_0(t)\| < \delta)$, то Φ_0, Ψ_0 и V_0 изменятся на величину $\leqslant C\delta(\Phi_0 \to \Phi, \; V_0 \to V)$. Подпространства E_j перейдут в близкие к ним инвариантные подпространства E'_j оператора Φ (см. лемму 1). При достаточно малом δ неравенства (4.2), (4.3) сохранятся для V и E'_j.

Замечание 4. Каждое собственное подпространство $E_k(\Phi)$ оператора Φ содержится в одном из E'_j. Неравенства (4.2), (4.3) обеспечивают диссипативность $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$ по отношению к $H(t)$ "с запасом": достаточно их выполнения для каждого $E_k(\Phi)$ в отдельности.

Замечание 5. Достаточные условия устойчивости можно получить проще, построив "функцию Ляпунова" L для отображения Φ_ε ($L(\Phi_\varepsilon \mathbf{z}) < L(\mathbf{z})$, см. [3]). Приведенное доказательство содержит "заготовки" для анализа необходимых условий.

5. Необходимые условия усиленной диссипативности. Для диссипативности $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$ при данном $H_0(t)$ условия (4.2), (4.3) не являются необходимыми. Действительно, набор неравенств $\mathrm{Re}(\bar{\mu}_j\gamma_k) < 0$ при всех k и $j = j(k)$ равносилен требованию: $Q_\nu(\mathbf{f}) < 0$ для всех собственных векторов $\mathbf{f}$ операторов $P_j\Psi_0$ (в соответствующих подпространствах E_j) и только для них. Если же диссипативность сохраняется при произвольном малом изменении $H_0(t)$, то неравенства (4.2), (4.3) (со знаком $\leqslant$ в (4.3)) становятся необходимыми: любой вектор $\mathbf{e}$ из E_j может стать собственным вектором Φ, отвечающим простому собственному значению.

Итак, пусть возмущение $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$ усиленно диссипативно для данной системы (1.1) (см. определение 2) и фиксировано некоторое δ. Тем самым система (1.1) сильно устойчива в гамильтоновом смысле (см. замечание 1). Предположим, что в некотором подпространстве E_j размерности больше единицы (см. замечание 3) есть вектор $\mathbf{e}$, такой, что $Q_\nu(\mathbf{e}) > 0$. Определим оператор Φ следующим образом. Положим $\Phi\mathbf{e} = \mu_\alpha\mathbf{e}$ и $\Phi\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mu}_\alpha\bar{\mathbf{e}}$. Здесь $\mu_\alpha = \mu_j\exp(i\alpha)$, $\alpha > 0$. Пусть E – двумерное подпространство, натянутое на $\mathbf{e}$ и $\bar{\mathbf{e}}$. Оператор Φ на E унитарен в смысле "скалярного произведения" $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle$, поскольку $\mathbf{e}$ и $\bar{\mathbf{e}}$ ортогональны (см. конец разд. 2А). На $(m - 2)$-мерном подпространстве ортогональном к E, положим $\Phi\mathbf{z} = \Phi_0\mathbf{z}$. Доопределим Φ и $\mathbb{C}_m$ по линейности; оператор Φ унитарен в $\mathbb{C}^m$, $\Phi\bar{z} = \overline{\Phi z}$ для всех z. Поэтому Φ задается вещественной симплектической матрицей. Набор собственных значений Φ: μ_α, $\bar{\mu}_\alpha$ и все μ_j; $j = 1,\dots,l$.

Лемма 3. Пусть Φ_0 порождается $H_0(t)$: Φ_0 – матрица монодромии периодической гамильтоновой системы $\mathbf{x}^\cdot = JH_0(t)\mathbf{x}$. Любая симплектическая матрица Φ, для которой $\|\Phi - \Phi_0\| < \eta$, порождается матричной функцией $H(t)$, для которой

$$\|H(t) - H_0(t)\| < C\eta$$

Доказательство леммы опустим.

Пусть определенный выше оператор Φ порождается симметрической матричной функцией $H(t)$ и $\|H(t) - H_0(t)\| \leqslant C\|\Phi - \Phi_0\| \leqslant C_2\alpha$. Выберем α столь малым, чтобы $C_2\alpha$ было меньше δ и собственное значение μ_α было некратным (не совпадало ни с одним из μ_j). Теперь $\|H(t) - H_0(t)\| < \delta$ и, значит, система $\mathbf{x}^\cdot = JH(t)\mathbf{x} + D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$ должна быть асимптотически устойчива при малых $\varepsilon > 0$. Это, однако, невозможно, так как $\mathbf{e}$ – собственный вектор Φ, отвечающий простому собственному значению и для него $Q_\nu(\mathbf{e}) > 0$ (см. замечание 3).

Итак, условие $Q_\nu(\mathbf{z}) \leqslant 0$ для всех векторов $\mathbf{z}$ из (любого) подпространства E_j необходимо для усиленной диссипативности. Вместо "всех векторов из E_j" можно говорить о всех собственных векторах Φ_0 (см. замечания 1 и 2).

6. Формулировка теоремы. Пусть $\mathbf{x}^\cdot = JH_0(t)\mathbf{x}$ (1.1) – периодическая гамильтонова система, Φ_0 – ее оператор монодромии и E_j – инвариантные для Φ_0 подпространства комплексного пространства $\mathbb{C}^m$, отвечающие (попарно различным) собственным значениям μ_j. Объединяя сказанное в разд. 4 и 5, получим следующее предложение.

Теорема. Возмущение $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$ системы (1.1) усиленно диссипативно в смысле определения 2, если в любом подпространстве E_j квадратичные формы $\nu(\mathbf{z})$ и $Q(\mathbf{z})$ знакоопределенны и имеют противоположные знаки: $\nu(\mathbf{z})Q(\mathbf{z}) < 0$ при $\mathbf{z} \in E_j$, $\mathbf{z} \neq 0$. Здесь $\nu(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$; $Q(\mathbf{z}) = \mathrm{Re}\langle V_0\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle$, V_0 дается формулой (3.2). Выполнение неравенств $\nu(\mathbf{z}) \neq 0$, $\nu(\mathbf{z})Q(\mathbf{z}) \leqslant 0$ (для тех же z) необходимо для усиленной диссипативности.

Условие $\nu(\mathbf{z}) \neq 0$ относится к невозмущенной системе (1.1). Из него вытекает, что эта система сильно устойчива в классе гамильтоновых систем (см. разд. 2). Вид функции $Q(\mathbf{z})$ зависит от главного члена возмущения $\varepsilon D(t)\mathbf{x}$. Условие $Q(\mathbf{z}) \neq 0$ означает, что эффект возмущения (для всех H, близких к H_0) определяется по $D(t)$. Приведем более явное выражение для $Q(\mathbf{z})$ (см. разд. 2А и формулу (3.2)).

$$Q(\mathbf{z}) = -\mathrm{Im}(JV_0\mathbf{z}, \mathbf{z}); \quad JV_0 = \int_0^T \overset{*}{\Phi}_0(t) JD(t)\Phi_0(t)dt \tag{6.1}$$

Здесь использовано равенство

$$\Phi_0^{-1}(t) = \Phi_0^{+}(t) = -J\overset{*}{\Phi}_0(t)J.$$

7. Заключительные замечания: обсуждение определений. Сильную гамильтонову устойчивость можно определить, явно введя малые возмущения. Назовем систему $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = JH_0(t)\mathbf{x}$ сильно устойчивой, если для любой (симметрической) матричной функции $H_1(t)$ существует такое ε_*, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_*$ система $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = J(H_0(t) + \varepsilon H_1(t))\mathbf{x}$ устойчива. Это определение равносильно первоначальному. Далее малые негамильтоновы возмущения можно рассматривать "наравне" с гамильтоновыми.

Определение 3 [3]. Система $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = JH_0(t)\mathbf{x}$ (1.1) называется сильно устойчивой при заданном негамильтоновом возмущении $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$, если для всякой матричной функции $H_1(t)$ $(\overset{*}{H_1} = H_1)$ существует ε_*, такое, что возмущенная система (7.1) устойчива при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = J(H_0(t) + \varepsilon H_1(t))\mathbf{x} + D(t, \varepsilon)\mathbf{x} \\ D(t, \varepsilon) = \varepsilon D(t) + o(\varepsilon) \end{gathered} \tag{7.1}$$

Гамильтоново возмущение в (7.1) может превосходить негамильтоново сколь угодно сильно. Используя это, можно показать, что системы, устойчивые в смысле определения 3, являются сильно устойчивыми в гамильтоновом смысле.

Определение 2 также задает некое понятие устойчивости при действии возмущения.

Определение 2а. Система (1.1) сильно устойчива при заданном возмущении $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$, если: а) она устойчива в отсутствие возмущений (при $\varepsilon = 0$); б) возмущенная система (1.2) асимптотически устойчива при всех ε из некоторого интервала $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$; в) оба свойства сохраняются в некоторой δ-окрестности системы (1.1).

Иначе говоря, гамильтонова система (1.1) сильно устойчива при заданном (негамильтоновом) возмущении $D(t, \varepsilon)\mathbf{x}$, если это возмущение является для нее усиленно диссипативным.

Определение 3 кажется сильно отличным от определения 2а. На самом деле они "почти эквивалентны". Именно, система устойчива в смысле определения 3, если выполнены неравенства (4.2), (4.3); это достаточное условие было установлено ранее [3] (в вещественной записи, см. Дополнение). С другой стороны, нестрогие неравенства (4.3) являются необходимыми для устойчивости в смысле определения 3. (см. Дополнение). Таким образом, одни и те же достаточные и (близкие к ним) необходимые условия "действуют" для обоих определений. Если дополнительно потребовать, чтобы ответ – устойчиво или неустойчиво – определялся по $D(t)$, то строгие неравенства (4.2), (4.3) становятся необходимыми и достаточными в обоих случаях.

Последнее замечание – о равномерной устойчивости. Ограниченность всех решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений равносильна устойчивости по Ляпунову ее нулевого (и любого другого) решения. Для семейств уравнений полезно вернуться к исходному определению: нулевое решение системы $\mathbf{x}^{\cdot} = A(t)\mathbf{x}$ устойчиво, если $|\mathbf{x}(t)| \leqslant C|\mathbf{x}(0)|$. Здесь $|\,|$ – какая-то норма в пространстве $\mathbf{x}$. Чем больше (наименьшая возможная) постоянная C, тем "хуже" устойчивость системы.

Семейство уравнений равномерно устойчиво, если можно выбрать одну и ту же постоянную C для всех уравнений семейства. В понятие сильной устойчивости естественно включать подобную равномерность: если постоянная C сколь угодно велика для систем, близких к данной, то едва ли стоит называть систему "сильно устойчивой". Однако нет необходимости включать это требование в определения.

Можно показать следующее. 1°. Пусть система (1.1) сильно устойчива в классе гамильтоновых систем. Тогда в некоторой ее окрестности устойчивость равномерна. 2°. Пусть система (1.1) устойчива в смысле определения 3, точнее, выполнены условия (4.2), (4.3). Тогда, при $\|H_1(t)\| \leqslant M$ существует $\varepsilon_* < 0$, такое, что для $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ все системы (7.1) равномерно устойчивы. Аналогичная равномерность имеет место для определения 2а.

Дополнение. *А. Вещественная запись.* Пусть E – подпространство $\mathbb{C}^m$. Определим $\mathrm{Re}E \subset \mathbb{R}^m$ так: если $\mathbf{z} \in E$ и $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$, то $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Re}E$. Если E – собственное подпространство оператора монодромии Φ, отвечающее собственному значению $\mu = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$, то $\mathrm{Re}E$ отвечает паре $\mu, \bar{\mu}$.

Условие $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle \neq 0$ на E равносильно требованию $[\Phi\mathbf{x}, \mathbf{x}] \neq 0$ на $\mathrm{Re}E$: при $\Phi\mathbf{z} = \mu\mathbf{z}$ $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle = 2\beta^{-1}[\Phi\mathbf{x}, \mathbf{x}]$. Для произвольного оператора A $\mathrm{Re}\langle Az, z\rangle = \langle A_s z, z\rangle$, где $2A_s = A + A^+$. Если оператор A задается вещественной матрицей, то при $\Phi z = \mu z$:

$$\langle A_s z, z\rangle = 2\beta^{-1}[A_s\Phi x, x].$$

Условия (4.2), (4.3) можно переписать так. Для каждого j должно быть: $[\Phi x, x] \neq 0$ (4.2′), $[\Phi x, x]\,[V_s\Phi x, x] < 0$ (4.3′) при всех $x \in \mathrm{Re}E_j$ $(x \neq 0)$. Явный вид условия (4.3′) получим, используя формулу (3.2) для V (и то, что $A^+ = -JA^*J$):

$$2[V_s\Phi x, x] = (J_1\Phi x, x)$$
$$J_1 = \int_0^T \Phi^*(t)(JD(t) + D^*(t)J)\Phi(t)\,dt$$

Это выражение (с точностью до обозначений) совпадает с формулой из работы [3].

Б. Об условиях устойчивости в смысле определения 3. Для оператора монодромии системы (7.1) имеем (см. (3.2))

$$\Phi_\varepsilon = \Phi_0 + \varepsilon\Psi_0 + o(\varepsilon);\quad \Psi_0 = \Phi_0 V;\quad V = V_0 + V_1$$
$$V_0 = \int_0^T \Phi_0^{-1}(t)D(t)\Phi_0(t)\,dt;\quad V_1 = \int_0^T \Phi_0^{-1}(t)JH_1(t)\Phi_0(t)\,dt$$

При любой симметрической матричной функции $H_1(t)$ $V_1^+ = -V_1$. Поэтому $\mathrm{Re}\langle Vz, z\rangle = \mathrm{Re}\langle V_0 z, z\rangle$. Доказательство достаточности условий (4.2), (4.3) для устойчивости системы (7.1) при $0 < \varepsilon \ll 1$ далее совпадает с приведенным в разд. 4 и 5 (см. также замечание 5).

Наметим доказательство необходимости. Пусть дано, что система (7.1) сильно устойчива при заданном негамильтоновом возмущении. Будем считать, что сильная устойчивость в гамильтоновом смысле уже установлена. Пусть $\mu_1,\ldots,\mu_l$ ($l \leqslant 2n$) - собственные значения оператора Φ_0. Снова (см. разд. 4) для каждого $j \leqslant l$ имеется группа мультипликаторов системы (7.1), для которых $\mu_k(\varepsilon) = \mu_j + \varepsilon\gamma_k + o(\varepsilon)$. Здесь γ_k – собственные значения оператора $P\Psi_0$ на подпространстве E_j, зависящие от выбора H_1, $P = P_j$. Если система (7.1) устойчива в смысле определения 3, то необходимо $\mathrm{Re}(\bar{\mu}\gamma_k) \leqslant 0$ при любом $H_1(t)$. Другими словами, все собственные значения оператора P_jV, рассматриваемого на E_j, лежат в (замкнутой) левой полуплоскости при любом H_1. Заметим теперь, что $V_1^+ = -V_1$ и что любой такой "антисимметричный" оператор получается при некотором $H_1(t)$ (это – "инфинитезимальный" аналог леммы 3). Фиксируем j, предпишем E_j в качестве инвариантного подпространства V_1 и зададим его так: на E_j $V_1 = A$, $A^+ = -A$, на остальных E_j положим $V_1 = 0$ (и доопределим по линейности). Теперь $PV_1 = V_1 = A$ на E_j.

Итак, дано, что собственные значения оператора $PV_0 + A$ лежат в (замкнутой) левой полуплоскости при любом "антисимметричном" A. Это равносильно требованию: $Q(\mathbf{z}) = \mathrm{Re}\,\langle V_0\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle \leqslant 0$ при $\nu(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle \geqslant 0$ на E_j или $\nu(\mathbf{z})Q(\mathbf{z}) \leqslant 0$ при любом знаке $\nu(\mathbf{z})$.

Работа выполнена при поддержке Фонда Сороса (стипендия по математике).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
3. *Кирпичников С.Н., Бондаренко Л.А.* Сильная устойчивость линейных гамильтоновых систем при заданном негамильтоновом возмущении. Общий случай // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. 1986. Вып. 2. С. 55–61.
4. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. Berlin et all.: Springer-Verlag, 1966. 592 p. = Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.II.1995