УДК 531.36

© 1996 г. Ф.Л. Черноусько

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ МАТРИЦЕЙ

Рассматриваются линейные динамические системы, описываемые конечно-разностными или дифференциальными уравнениями. Предполагается, что матрица системы известна неточно или подвержена неконтролируемым возмущениям, так что даны лишь границы возможного изменения каждого ее элемента. Построены внешние аппроксимации множеств достижимости рассматриваемых систем при помощи эллипсоидов. Получены уравнения эволюции аппроксимирующих эллипсоидов. Приведен пример.

Работа продолжает исследования [1–3], где рассматривались аддитивные возмущения; в данной статье исследуется более сложный случай мультипликативных возмущений (возмущения умножаются на фазовые координаты).

1. Постановка задачи для систем с дискретным временем. Рассмотрим сначала систему с дискретным временем (многошаговый процесс), описываемую линейными конечно-разностными уравнениями

$$x(t_{i+1}) = C(t_i)x(t_i) + f(t_i), \quad t_0 < t_1, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{1.1}$$

Здесь x–n-мерный вектор фазовых координат системы, C – матрица $n \times n$, f–n-мерный вектор. Векторы и матрицы $x(t_i)$, $C(t_i)$, $f(t_i)$ определены в заданные дискретные моменты времени t_i ($i = 0, 1, \ldots$), вектор-функция $f(t_i)$ считается заданной функцией времени, а матрица $C(t_i)$ содержит неопределенную составляющую и представляется в виде

$$C(t_i) = C_0(t_i) + C_1(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots \tag{1.2}$$

где $C_0(t_i)$ – заданная неособенная матрица, зависящая от времени, а матрица $C_1(t_i)$ неизвестна, она может быть обусловлена воздействием возмущений или неточным знанием структуры системы. Предполагаем, что элементы $c_{jk}(t_i)$ матрицы $C_1(t_i)$ ограничены по абсолютной величине неравенствами

$$|c_{jk}(t_i)| \leqslant b_{jk}(t_i), \quad j, k = 1, \ldots, n; \quad i = 0, 1, \ldots \tag{1.3}$$

где $b_{jk}(t_i)$ – заданные числа.

Начальное состояние системы (1.1) может быть также неизвестно точно, и задано лишь множество M, которому оно принадлежит:

$$x(t_0) \in M, \quad M \subset R^n \tag{1.4}$$

Множеством достижимости $D(t_i, t_0, M)$ системы (1.1) при $i \geqslant 0$ назовем множество точек $x(t_i)$, являющихся концами всех фазовых траекторий $x(\cdot)$ этой системы, допускаемых условиями (1.2)–(1.4).

Введенное множество обладает следующим эволюционным (полугрупповым) свойством [2, 3]:

$$D(t_i,\ t_0,\ M) = D(t_i,\ t_j,\ D(t_j,\ t_0,\ M)), \quad 0 \leqslant j \leqslant i \tag{1.5}$$

Множество достижимости характеризует возможный разброс траекторий системы под влиянием возмущений или неопределенных факторов. Как известно, точное построение множеств достижимости представляет, вообще говоря, большие трудности. Поэтому важно получение достаточно простых и эффективных внешних аппроксимаций этого множества.

В качестве аппроксимирующих множеств будем использовать эллипсоиды, применявшиеся ранее в случае аддитивно входящих возмущений. В данной работе рассматривается более сложный случай мультипликативных возмущений, который ранее изучался в [4] и нередко встречается в приложениях.

Сюда относятся механические и электрические системы с возмущенными или неточно известными коэффициентами жесткости, механического или электрического сопротивления, индуктивности, емкости и т.д., а также линейные управляемые системы с погрешностями реализации коэффициентов усиления. Отметим, что эллипсоидальные аппроксимации обладают рядом достоинств: простотой, гладкостью границы, инвариантностью по отношению к линейным преобразованиям и др. [2, 3].

Следуя [1–3], введем обозначение $E\,(a,\,Q)$ для n-мерного эллипсоида

$$E(a,\ Q) = \{x : (Q^{-1}(x-a),\ (x-a)) \leqslant 1\} \tag{1.6}$$

Здесь a–n-мерный вектор центра эллипсоида, Q – симметрическая положительно-определенная матрица $n \times n$, $(\cdot,\,\cdot)$ – скалярное произведение векторов. Отметим, что при $Q \to 0$ эллипсоид (1.6) вырождается в точку $x = a$.

Задача внешней эллипсоидальной аппроксимации множеств достижимости может быть сформулирована следующим образом.

Задача 1. Найти вектор-функцию $a\,(t_i)$ и матричную функцию $Q\,(t_i)$, такие, что выполнено включение

$$D(t_i,\ t_0,\ M) \subset E(a(t_i),\ Q(t_i)), \quad \forall i = 0,\ 1,\ \ldots \tag{1.7}$$

2. Постановка задачи для систем с непрерывным временем. Рассмотрим теперь линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с начальным условием

$$\dot{x} = C(t)x + f(t), \quad t \geqslant s; \quad x(s) \in M, \quad M \subset R^n \tag{2.1}$$

Здесь x–n-мерный вектор фазовых координат, точка означает дифференцирование по времени t, C – матрица $n \times n$, f–n-мерный вектор, M – заданное начальное множество. Функции $C\,(t)$ и $f\,(t)$ таковы, что решение задачи Коши (2.1) существует при любом начальном векторе $x\,(s)$; достаточно предположить, что эти функции кусочно-непрерывны при $t \geqslant s$. При этом функция $f\,(t)$ задана при $t \geqslant s$, а функция $C\,(t)$ представляется в виде

$$C(t) = C_0(t) + C_1(t) \tag{2.2}$$

где матрица $C_0\,(t)$ задана при $t \geqslant s$, а матрица $C_1\,(t)$ неизвестна. Элементы $c_{jk}\,(t)$ матрицы $C_1\,(t)$ удовлетворяют неравенствам, аналогичным (1.3),

$$|c_{jk}(t)| \leqslant b_{jk}(t), \quad j,\ k = 1,\ \ldots,\ n, \quad t \geqslant s \tag{2.3}$$

Здсь $b_{jk}\,(t)$– заданные при $t \geqslant s$ неотрицательные функции времени.

Множеством достижимости $D\,(t,\,s,\,M)$ системы (2.1) при $t \geqslant s$ называется множество точек $x(t)$, являющихся концами всех фазовых траекторий $x(\cdot)$ этой системы в момент t, допускаемых условиями (2.1)–(2.3). Множество достижимости обладает эволюционным свойством [2, 3], аналогичным (1.5),

$$D(t,\ s,\ M) = D(t,\ \tau,\ D(\tau,\ s,\ M)),\quad \tau \in [s,\ t] \tag{2.4}$$

Поставим задачу построения внешней эллипсоидальной аппроксимации множеств достижимости системы (2.1)–(2.3), аналогичную задаче 1.

Задача 2. Найти вектор-функцию $a(t)$ и матричную функцию $Q(t)$, такие, что при всех $t \geqslant s$ выполнено включение

$$D(t,\ s,\ M) \subset E(a(t),\ Q(t)),\quad t \geqslant s \tag{2.5}$$

Поставленные задачи 1, 2 имеют, очевидно, неединственное решение: любой эллипсоид, содержащий построенный, также дает решение задачи. Поэтому естественно ставить вопрос о минимизации некоторого критерия оптимальности, характеризующего "размеры" внешних аппроксимирующих эллипсоидов, например их объема, суммы квадратов полуосей и др. Такой подход применительно к случаю аддитивно входящих возмущений развивался ранее [1–3]. В данной работе задача оптимизации аппроксимирующих эллипсоидов не решается, но при их построении используются некоторые оптимальные операции над эллипсоидами [1–3].

3. Преобразования эллипсоидов. Обратимся к задаче 1 и предположим, что искомый эллипсоид $E(a(t_i), Q(t_i))$, удовлетворяющий включению (1.7) в момент времени $t = t_i$, построен. В силу соотношений (1.1), (1.2) имеем

$$x(t_{i+1}) = x_1 + x_2;\quad x_1 = C_0(t_i)x(t_i) + f(t_i),\quad x_2 = C_1(t_i)x(t_i) \tag{3.1}$$

Чтобы построить эллипсоид $E(a(t_{i+1}),\ Q(t_{i+1}))$, содержащий вектор $x(t_{i+1})$, достаточно, согласно (3.1), выполнить следующие три операции:

1) построить эллипсоид, содержащий вектор x_1;

2) построить эллипсоид, содержащий вектор x_2;

3) построить эллипсоид, содержащий сумму векторов $x_1 + x_2$, каждый из которых принадлежит некоторому эллипсоиду.

Рассмотрим каждую из этих операций в отдельности.

Первая операция сводится к аффинному преобразованию эллипсоидов. Если для некоторого n-мерного вектора x имеем включение $x \in E(a, Q)$ где a–n-мерный вектор центра эллипсоида, Q – симметрическая положительно-определенная матрица $n \times n$, то [1–3]

$$Ax + b \in E(Aa + b,\ AQA^T) \tag{3.2}$$

Здесь A – произвольная неособенная матрица $n \times n$, b–n-мерный вектор, символ ^{T} означает транспонирование. В силу (3.2) получим для вектора x_1 из (3.1) включение

$$x_1 \in E(C_0(t_i)a(t_i) + f(t_i),\quad C_0(t_i)Q(t_i)C_0^T(t_i)) \tag{3.3}$$

Выполнение второй операции (построение эллипсоида, содержащего x_2) сводится к решению следующей вспомогательной задачи.

Задача 3. Найти эллипсоид, содержащий множество

$$\Omega = \{y : y = Cx,\ \ C \in \Sigma,\ \ x \in E(a,\ Q)\} \tag{3.4}$$

где $E(a, Q)$ – заданный эллипсоид в n-мерном пространстве, Σ – класс матриц C размера $n \times n$, элементы которых c_{ij} удовлетворяют неравенствам (b_{ij} – заданные неотрицательные числа)

$$|c_{ij}| \leqslant b_{ij},\quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n \tag{3.5}$$

Допустимое решение задачи 3 предложено в следующем разделе.

Наконец, третья операция (сложение эллипсоидов) реализована в [1–3], где получены оптимальные с точки зрения объема результирующие эллипсоиды. В [2, 3, 5] рассмотрен более общий критерий оптимальности.

Приведем соответствующие результаты для случая минимизации объема результирующего эллипсоида. Напомним, что объем как критерий оптимальности отличается тем, что оптимальный в смысле объема эллипсоид инвариантен по отношению к линейным преобразованиям: он остается оптимальным, если его подвергнуть линейному преобразованию вместе с исходными эллипсоидами, в которых лежат векторы x_1 и x_2.

Пусть $x_i \in E(a_i,\ Q_i)(i=1,\ 2)$, причем одна из матриц Q_1, Q_2 может быть особенной (например, Q_1 – положительно-определенная, Q_2 – неотрицательно-определенная матрица). Тогда параметры эллипсоида наименьшего объема $E\ (a^+, Q^+)$, содержащего сумму $x_1 + x_2$, определяются соотношениями

$$a^+ = a_1 + a_2,\quad Q^+ = (p^{-1}+1)Q_1 + (p+1)Q_2 \tag{3.6}$$

где $p > 0$ – единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p+\lambda_j} = \frac{n}{p(p+1)} \tag{3.7}$$

Числа $\lambda_j \geqslant 0(j=1,\ldots,\ n)$ – корни характерстического уравнения

$$\det(Q_1 - \lambda Q_2) = 0 \tag{3.8}$$

причем каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

Таким образом, построение эллипсоида $E(a(t_{i+1}),\ Q(t_{i+1}))$ и тем самым решение задачи 1 будет осуществлено, если будет решена вспомогательная задача 3.

4. Решение вспомогательной задачи. Отметим некоторые свойства множества Ω, определенного соотношением (3.4). Множество Ω звездно относительно начала координат, хотя может быть невыпукло, и симметрично относительно всех координатных гиперплоскостей.

Для доказательства звездности возьмем любую точку $y = Cx$ множества Ω, отвечающую некоторой матрице $C \in \Sigma$ и точке $x \in E\ (a,\ Q)$. Так как элементы c_{ij} матрицы C удовлетворяют неравенствам (3.5), то и элементы αc_{ij} матрицы αC при $\alpha \in [0,\ 1]$ удовлетворяют этим неравенствам. Следовательно, точка $y = \alpha Cx$ принадлежит Ω, и множество Ω звездно.

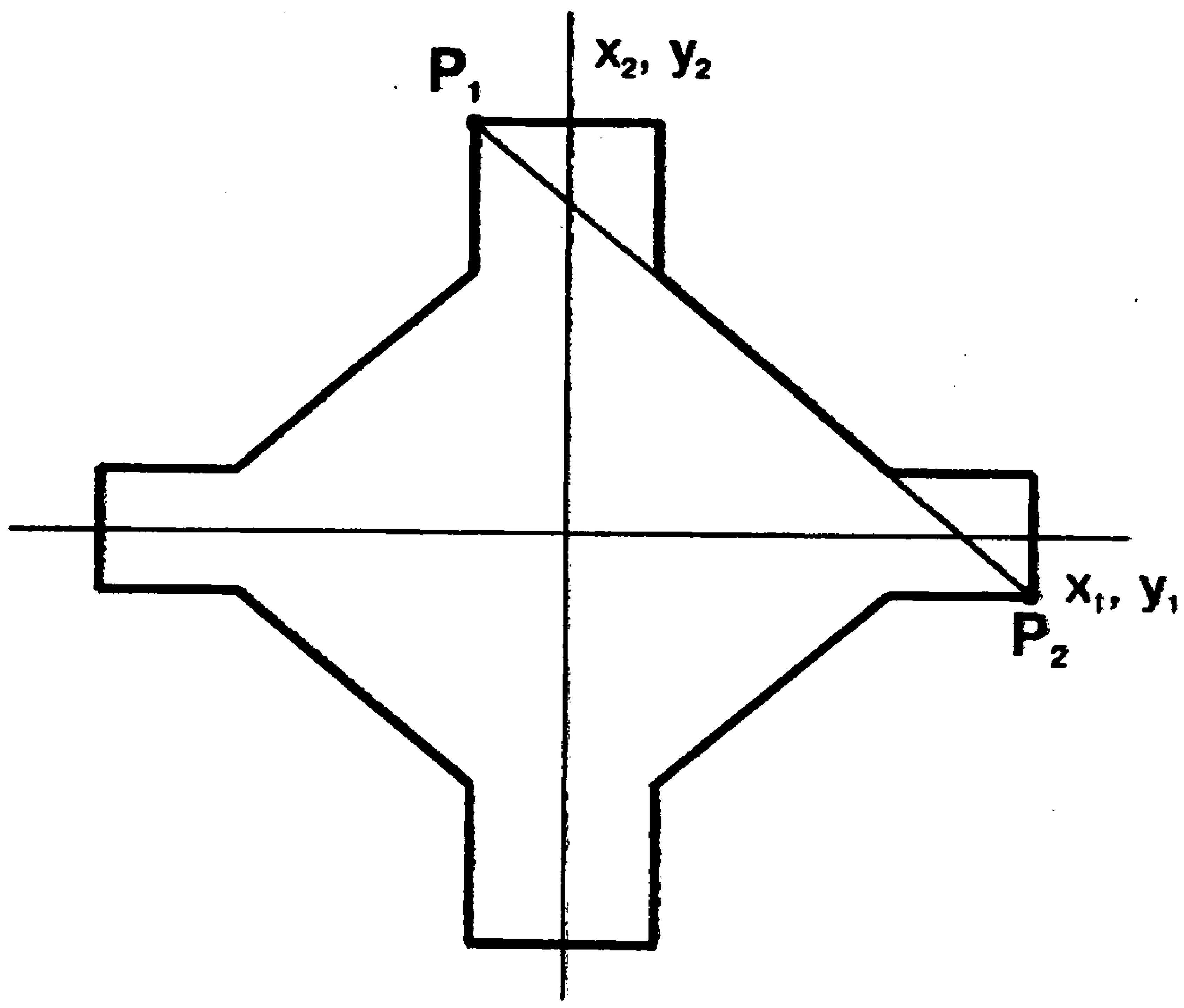
Приведем пример невыпуклого множества Ω. Пусть $n = 2$, а постоянные b_{ij} в ограничениях (3.5) равны

$$b_{11} = b_{22} = 1,\ b_{12} = b_{21} = 0 \tag{4.1}$$

В этом случае каждой точке $x = (x_1, x_2)$ эллипса $E\ (a,\ Q)$ отвечает согласно соотношениям (3.4), (3.5), (4.1) прямоугольник

$$|y_1| \leqslant |x_1|,\ |y_2| \leqslant |x_2| \tag{4.2}$$

содержащийся в множестве Ω. А само множество Ω есть объединение прямоугольников вида (4.2), при том что точка $x = (x_1, x_2)$ пробегает эллипс $E\ (a,\ Q)$. Пусть, в частности, эллипс $E\ (a,\ Q)$ вырожден и представляет собой отрезок P_1P_2 плоскости x_1x_2, причем точка P_1 лежит во втором, а P_2 – в четвертом квадранте этой плоскости (фиг. 1). Предполагаем, что отрезок P_1P_2 не проходит через начало координат. Тогда множество Ω в плоскости y_1y_2 представляет собой, вообще говоря, невыпуклый многоугольник, симметричный относительно обеих осей координат. Его границы, показанные жирной линией на фиг. 1, состоят из частей границ прямоугольников вида (4.2), отвечающих точкам P_1 и P_2, и, возможно, из части самого отрезка P_1P_2 и его зеркальных отражений от осей координат.



Фиг. 1

Докажем, что множество Ω симметрично относительно всех координатных гиперплоскостей $y_i = 0$ ($i = 1, ..., n$). Возьмем любую точку $y = Cx \in \Omega$, отвечающую некоторым $C \in \Sigma$ и $x \in E$ (a, Q). Заменив знаки в целой строке c_{ij} ($j = 1, ..., n$) матрицы C, получим матрицу C', удовлетворяющую условиям (3.5), т.е. $C' \in \Sigma$. Следовательно, точка $y = C'x$, которая отличается от y лишь знаком y_i, также принадлежит множеству Ω. Симметрия множества Ω доказана.

Замечание 1. Если для некоторого i имеем $b_{ij} = 0$ при всех $j = 1, ..., n$, то согласно (3.4), (3.5) получим $y_i = 0$, т.е. множество Ω в этом случае лежит в гиперплоскости $y_i = 0$. Такой случай имеет место, если по некоторым строкам матрицы C неопределенности отсутствуют.

Переходя к решению задачи 3, сначала построим прямоугольный параллелепипед вида

$$|y_k| \le y_k^*, \quad k = 1, \ldots \tag{4.3}$$

содержащий множество Ω из (3.4). Полагая $x = a + \xi$, получим на основании (3.4), (3.5)

$$|y_k| \le \left|\sum_{j=1}^{n} c_{kj} a_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} c_{kj}\xi_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} b_{kj}|a_j| + \max_{C\in\Sigma} \max_{\xi\in E(0,Q)} |(c^k, \xi)| \tag{4.4}$$

Здесь c^k–n-мерный вектор с компонентами c_{kj} ($j = 1, ..., n$). Для вычисления последнего максимума в (4.4) составим функцию Лагранжа

$$L = (c^k, \ \xi) + \lambda(Q^{-1}\xi, \ \xi)$$

и приравняем нулю ее градиент по ξ. Отсюда находим

$$\xi = -(2\lambda)^{-1} Qc^k \tag{4.5}$$

Подставляя соотношение (4.5) в условие $(Q^{-1}\xi, \xi) = 1$, получим равенство, из которого определим λ с точностью до знака:

$$\lambda = \pm(1/2)(Qc^k, \ c^k)^{1/2}$$

С учетом полученного выражения для λ имеем из (4.5)

$$\xi = \mp(Qc^k, \ c^k)^{-1/2} Qc^k$$

Подставляя полученное выражение в (c^k, ξ), находим искомый максимум из (4.4)

$$\max_{\xi\in E(0,Q)} |(c^k,\ \xi)| = (Qc^k,\ c^k)^{1/2} = \left(\sum_{p,q=1}^{n} Q_{pq} c_{kp} c_{kq} \right)^{1/2} \tag{4.6}$$

Теперь в соответствии с (4.4) нужно найти максимум выражения (4.6) по $C \in \Sigma$, т.е. по c_{ij} при условиях (3.5). Так как квадратичная форма (Qc^k, c^k) – выпуклая функция c^k, то искомый максимум достигается в одной из вершин параллелепипеда, определяемого неравенствами (3.5). Имеем

$$c_{ij} = b_{ij}\sigma_{ij},\quad \sigma_{ij} = \pm 1,\quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n \tag{4.7}$$

С учетом (4.4), (4.6) и (4.7) выражение для y_k^* из (4.3) можно представить в виде

$$y_k^* = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} |a_j| + \left(\max_{\sigma} \sum_{p,q=1}^{n} Q_{pq} b_{kp} b_{kq} \sigma_{kp} \sigma_{kq} \right)^{1/2} \tag{4.8}$$

где максимум берется по всем $\sigma_{ij} = \pm 1$ $(i,\ j = 1,\ \ldots,\ n)$.

Замечание 2. Соотношения (4.8) дают верхние оценки размеров параллелепипеда (4.3), содержащего область Ω. Эти оценки, вообще говоря, не оптимальны (могут быть уменьшены).

Замечание 3. Фактическое вычисление максимума в (4.8) требует перебора 2^{m-1} вариантов, отвечающих различным знакам σ_{ij}. Здесь m – число ненулевых элементов b_{ij}, показатель степени $m - 1$ обусловлен тем, что одновременная замена всех знаков σ_{ij} не изменяет максимизируемой суммы в (4.8), и поэтому знак одного из чисел σ_{ij} может быть фиксирован произвольно. В общем случае имеем $m = n^2$, однако во многих приложениях возмущения или неопределенности реально имеются лишь для некоторых элементов матрицы C, и тогда m невелико. Если же неопределенным является лишь один элемент матрицы C, т.е. все $b_{ij} = 0$, кроме некоторого $b_{kp} > 0$, то $m = 1$, и перебора вообще делать не нужно. В этом случае формула (4.8) упрощается и дает

$$y_k^* = b_{kp}(|a_p| + Q_{pp}^{1/2}),\quad y_i^* = 0,\quad i \neq k \tag{4.9}$$

Построим эллипсоид, содержащий параллелепипед (4.3). Так как оси этого параллелепипеда совпадают с осями координат, то искомый эллипсоид возьмем в виде

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^{-2} y_k^2 \leqslant 1 \tag{4.10}$$

Длины полуосей r_k выберем так, чтобы эллипсоид (4.10) содержал параллелепипед (4.3), что приводит к условию

$$\sum_{k=1}^{n} r_k^{-2} (y_k^*)^2 = 1 \tag{4.11}$$

Кроме того, потребуем, чтобы объем эллипсоида (4.10) при условии (4.11) был наименьшим. Так как объем эллипсоида пропорционален произведению длин его полуосей r_i, то рассматриваемой задаче на условный экстремум соответствует функция Лагранжа

$$L_1 = \prod_{k=1}^{n} r_k + \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} r_k^{-2} (y_k^*)^2$$

Приравнивая нуль ее проиводные по r_k, получим

$$r_k^2 = \lambda_2 (y_k^*)^2,\quad \lambda_2 = 2\lambda_1 \left(\prod_{k=1}^{n} r_k \right)^{-1},\quad k = 1,\ \ldots,\ n$$

Подставляя данное выражение для r_k^2 в (4.11), найдем $\lambda_2 = n$. Таким образом, имеем

$$r_k = n^{1/2} y_k^*, \quad k = 1, \ldots, n \tag{4.12}$$

Полученный результат может быть несколько улучшен, если для некоторых i имеем $b_{ij} = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n$. В этом случае для данных i в соответствии с замечанием 1 получим $y_i^* = 0$. Пусть число таких индексов i, для которых $b_{ij} = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n$, равно ν, $0 \leqslant \nu < n$. В этом случае множество Ω лежит в $(n - \nu)$-мерной гиперплоскости, и имеет смысл аппроксимировать его $(n - \nu)$-мерным эллипсоидом, лежащим в той же гиперплоскости и имеющим минимальный $(n - \nu)$-мерный объем. Поэтому вместо (4.12) получим

$$r_k = (n - \nu)^{1/2} y_k^*, \quad k = 1, \ldots, n \tag{4.13}$$

Полученные результаты подытожены в виде теоремы, дающей решение задачи 3.

Теорема 1. Множество Ω из (3.4) содержится в эллипсоиде (4.10), полуоси которого r_k определены соотношениями (4.13) и (4.8), т.е.

$$\Omega \subset E(0, \ R), \quad R = \operatorname{diag}(r_1^2, \ \ldots, \ r_n^2)$$

$$r_k^2 = (n - \nu)\left[\sum_{j=1}^n b_{kj}|a_j| + \left(\max_\sigma \sum_{p,q=1}^n Q_{pq} b_{kp} b_{kq} \sigma_{kp} \sigma_{kq}\right)^{1/2}\right]^2 \quad k = 1, \ \ldots, \ n \tag{4.14}$$

Максимум берется по всем $\sigma_{ij} = \pm 1$ $(i, \ j = 1, \ \ldots, \ n)$, для которых $b_{ij} \neq 0$, а ν равно числу индексов k, таких, что для них все $b_{ij} = 0$ $(j = 1, \ \ldots, \ n)$.

Отметим, что хотя эллипсоид (4.10) может иметь полуоси нулевой длины и матрица R^{-1} в этом случае не существует, запись E $(0, R)$ сохраняет смысл и может быть использована.

5. Аппроксимация множеств достижимости для систем с дискретным временем. Суммируя результаты разд. 3 и 4, дадим решение задачи 1. Для этого опишем процедуру построения функций a (t_i), Q (t_i), фигурирующих в соотношении (1.7). Выберем некоторый эллипсоид E (a_0, Q_0), содержащий начальное множество M (например, эллипсоид наименьшего объема), так что $M \subset E(a_0, \ Q_0)$, и положим

$$a(t_0) = a_0, \quad Q(t_0) = Q_0 \tag{5.1}$$

Вектор a (t_{i+1}) и матрица Q (t_{i+1}) выражаются через значения a (t_i), Q (t_i) $(i = 0, 1, \ldots)$ при помощи рекуррентных соотношений, вытекающих из (3.6), (3.3), (4.14). В обозначениях (3.6) имеем в силу (3.3) и (4.14)

$$a^+ = a_1 = C_0(t_i)a(t_i) + f(t_i), \quad a_2 = 0$$

и, следовательно,

$$a(t_{i+1}) = C_0(t_i)a(t_i) + f(t_i) \tag{5.2}$$

Аналогично, из (3.6), (3.3), (4.14) получим

$$Q(t_{i+1}) = (p^{-1} + 1)Q_1 + (p + 1)Q_2, \tag{5.3}$$

$$Q_1 = C_0(t_i)Q(t_i)C_0^T(t_i), \quad Q_2 = R$$

Диагональная матрица R определена соотношением (4.14), в которое нужно подставить

$$a = a(t_i), \quad Q(t_i), \quad b_{jk} = b_{jk}(t_i) \tag{5.4}$$

Скалярный параметр p в (5.3) определяется в соответствии с формулами (3.7), (3.8), как это описано в конце разд. 3.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Рекуррентная процедура построения параметров эллипсоидов $E(a(t_i), Q(t_i))$ при $i = 0, 1, \ldots,$ полностью заданная соотношениями (5.1)–(5.4) и формулами (4.14), (3.7), (3.8), доставляет решение задачи 1.

Замечание 4. Полученные аппроксимирующие эллипсоиды, в силу рекуррентного характера их построения, обладают свойством супердостижимости [2, 3], аналогичным эволюционному свойству (1.5) множеств достижимости

$$E(a(t_i),\ Q(t_i)) \supset D(t_i, t_j,\ E(a(t_j),\ Q(t_j))),\quad 0 \leqslant j \leqslant i \tag{5.5}$$

6. Аппроксимация множеств достижимости для систем с непрерывным временем. Систему с непрерывным временем (2.1) можно рассматривать как предельный случай системы с дискретным временем (1.1). Запишем простейшую конечно-разностную аппроксимацию системы (2.1), (2.2) в виде

$$x(t+\Delta) \approx x_1 + x_2 \tag{6.1}$$

$$x_1 = [I + \Delta C_0(t)]x(t) + \Delta f(t),\quad x_2 = \Delta C_1(t)x(t)$$

где Δ – достаточно малый шаг по времени, I – единичная матрица $n \times n$.

Соотношения (6.1) аналогичны (3.1), и поэтому применимы равенства (5.2), (5.3), с очевидной заменой обозначений. В силу (5.2) имеем равенство

$$a(t+\Delta) = [I + \Delta C_0(t)]a(t) + \Delta f(t)$$

разделив которое на Δ и переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим дифференциальное уравнение для функции $a(t)$

$$\dot a = C_0(t)a + f(t) \tag{6.2}$$

Сопоставляя соотношения (6.1) и (3.1), получим на основании равенств (5.3)

$$Q(t+\Delta) = (p^{-1}+1)Q_1 + (p+1)Q_2 \tag{6.3}$$

$$Q_1 = [I + \Delta C_0(t)]Q(t)[I + \Delta C_0^T(t)],\quad Q_2 = R$$

Матрица R определена равенствами (4.14). При этом роль вектра a и матрицы Q в соотношениях (4.14) теперь играют параметры эллипсоида $E(a(t), Q(t))$ для вектора $x(t)$, а роль величин b_{ij} – соответствующие ограничения $\Delta b_{ij}(t)$ для модулей элементов матрицы $\Delta C_1(t)$, на которую умножается вектор $x(t)$ в (6.1). Таким образом, из (4.14) получим, что матрица R представляется в виде

$$R = \Delta^2 G(t) \tag{6.4}$$

Матрица G задается прежней формулой (4.14) для R, т.е.

$$G = \operatorname{diag}\left\{(n-\nu)\left[\sum_{j=1}^{n} b_{kj}|a_j| + \left(\max_{\sigma} \sum_{p,q=1}^{n} Q_{pq} b_{kp} b_{kq} \sigma_{kp} \sigma_{kq}\right)^{1/2}\right]^2\right\} \tag{6.5}$$

в которой нужно положить $a = a(t)$, $Q = Q(t)$, $b_{ij} = b_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Здесь, как и в (4.8), (4.14), максимум берется по всем $\sigma_{ij} = \pm 1$, для которых $b_{ij} > 0$ $(i,\ j = 1,\ \ldots,\ n)$, а ν равно числу таких индексов k, для которых $b_{kj} = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n$.

Характеристическое уравнение (3.8) при учете равенств (6.3) и (6.4) запишем так:

$$\det[Q(t)+Q(\Delta)-\Delta^2\lambda G(t)]=0 \tag{6.6}$$

Корни λ_j характеристического уравнения (6.6) при $\Delta \to 0$ будем искать в виде

$$\lambda_j=\Delta^{-2}(\mu_j)^{-1}+\ldots,\quad j=1,\ \ldots,\ n \tag{6.7}$$

где μ_j – новые неизвестные, а точками обозначены малые высших порядков по Δ. Подставляя (6.7) в (6.6), получим после преобразований уравнение для μ_j

$$\det[Q^{-1}(t)G(t)-\mu_j I]=0 \tag{6.8}$$

Это уравнение ввиду положительной определенности матрицы Q и неотрицательной определенности матрицы G имеет n неотрицательных корней μ_j, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Единственный положительный корень уравнения (3.7) ищем в виде

$$p=\Delta^{-1}q^{-1}+\ldots \tag{6.9}$$

Подставляя разложения (6.7) и (6.9) в уравнение (3.7), разлагая обе его части в ряды по степеням Δ и приравнивая коэффициенты при Δ^2, найдем

$$q=n^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j\right)^{1/2} \tag{6.10}$$

Сумма корней характеристического уравнения (6.8) равна следу матрицы $Q^{-1}G$. Следовательно, из (6.10) получим

$$q=\{n^{-1}[\mathrm{Tr}(Q^{-1}G)]\}^{1/2} \tag{6.11}$$

Подставим соотношения (6.4) и (6.9) в выражение (6.3) для $Q\ (t+\Delta)$ и преобразуем его, опуская малые порядка Δ^2 и выше. Разделив полученное равенство на Δ и переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим

$$Q^{\cdot}=C_0(t)Q+QC_0^T(t)+qQ+q^{-1}G \tag{6.12}$$

Уравнения (6.2) и (6.12) вместе с соотношениями (6.5) для G и (6.11) для q образуют систему дифференциальных уравнений порядка $n+n\ (n+1)/2$ для вектора $a\ (t)$ и симметрической положительно определенной матрицы $Q\ (t)$. Для получения начальных условий, как и в разд. 5, построим эллипсоид $E\ (a_0, Q_0)$, содержащий начальное множество M из (2.1) ($E(a_0,\ Q_0)\supset M$), и положим

$$a(s)=a_0,\quad Q(s)=Q_0 \tag{6.13}$$

Подытожим полученные результаты в виде следующей тоеремы, дающей решение задачи 2.

Теорема 3. Эллипсоид $E\ (a\ (t),\ Q\ (t))$, параметры которого $a\ (t)$ и $Q\ (t)$ – решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (6.2), (6.12) с учетом соотношений (6.5) для G и (6.11) для q при начальных условиях (6.13), удовлетворяет включению (2.5) при $t \geqslant s$.

Замечание 5. Линейная система (6.2) для вектора $a\ (t)$ может интегрироваться независимо от нелинейной системы (6.12) для матрицы $Q\ (t)$. Последняя система, однако, зависит от (6.2), так как в ее правые части входит вектор $a\ (t)$ (см. (6.5)).

Замечание 6. Построенные аппроксимирующие эллипсоиды обладают свойством супердостижимости [2, 3], подобным (5.5)

$$E(a(t),\ Q(t)) \supset D(t,\ \tau,\ E(a(\tau),\ Q(\tau)))),\quad 0 \leqslant \tau \leqslant t$$

Это свойство, аналогичное эволюционному свойству множеств достижимости (2.4), вытекает из самой процедуры построения: эллипсоиды в любой следующий момент строятся на основе эллипсоидов в предшествующие моменты времени.

Замечание 7. Нелинейная система (6.12) для матрицы Q имеет сходство с аналогичной системой для случая аддитивно входящих возмущений [1–3]. Отличие состоит в выражении (6.5) для матрицы G, которое, как уже отмечалось, зависит от вектора a и содержит операцию максимума по $\sigma_{ij} = \pm 1$.

Замечание 8. Взятие операции максимума по σ_{ij} в (6.5) значительно упрощается в случае небольшого числа m фактических неопределенных параметров c_{ij} и особенно при $m = 1$, когда имеется всего один возмущенный (неопределенный) элемент c_{kp} матрицы C. В этом случае аналогично (4.9) получим из (6.5) (здесь нужно положить $\nu = n-1$)

$$G = \mathrm{diag}(0,\ \ldots,\ G_k,\ \ldots,\ 0),\quad G_k = b_{kp}^2(|a_p| + Q_{pp}^{1/2})^2 \tag{6.14}$$

Замечание 9. Построенные внешние эллипсоидальные аппроксимации множеств достижимости не являются оптимальными, однако в некоторых местах (формулы (3.6)–(3.8) и (4.14)) использованы процедуры, оптимальные в смысле объема аппроксимирующих эллипсоидов. Вместо этих процедур можно использовать другие соотношения, например оптимальные в смысле суммы квадратов полуосей эллипсоидов, хотя при этом будет утрачено свойство инвариантности.

7. Пример. Рассмотрим двумерную систему ($n = 2$)

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = -x_1 + c(t)x_1,\quad |c(t)| \leqslant b \tag{7.1}$$

где $c(t)$ – неопределенное ограниченное возмущение, b – положительная постоянная. Если $c(t)$ – периодическая функция, то система (7.1) описывает случай параметрического возбуждения колебаний. В случае системы (7.1) имеется лишь один ненулевой элемент c_{21} матрицы C_1 и применима формула (6.14) при $k = 2$, $p = 1$. Имеем

$$C_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},\quad G = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b^2(|a_1| + Q_{11}^{1/2})^2 \end{Vmatrix} \tag{7.2}$$

Система (6.2) имеет вид

$$\dot{a}_1 = a_2,\quad \dot{a}_2 = -a_1 \tag{7.3}$$

и описывает гармонические колебания.

Вычислим q согласно (6.11) и составим систему (6.12), учитывая равенства (7.2),

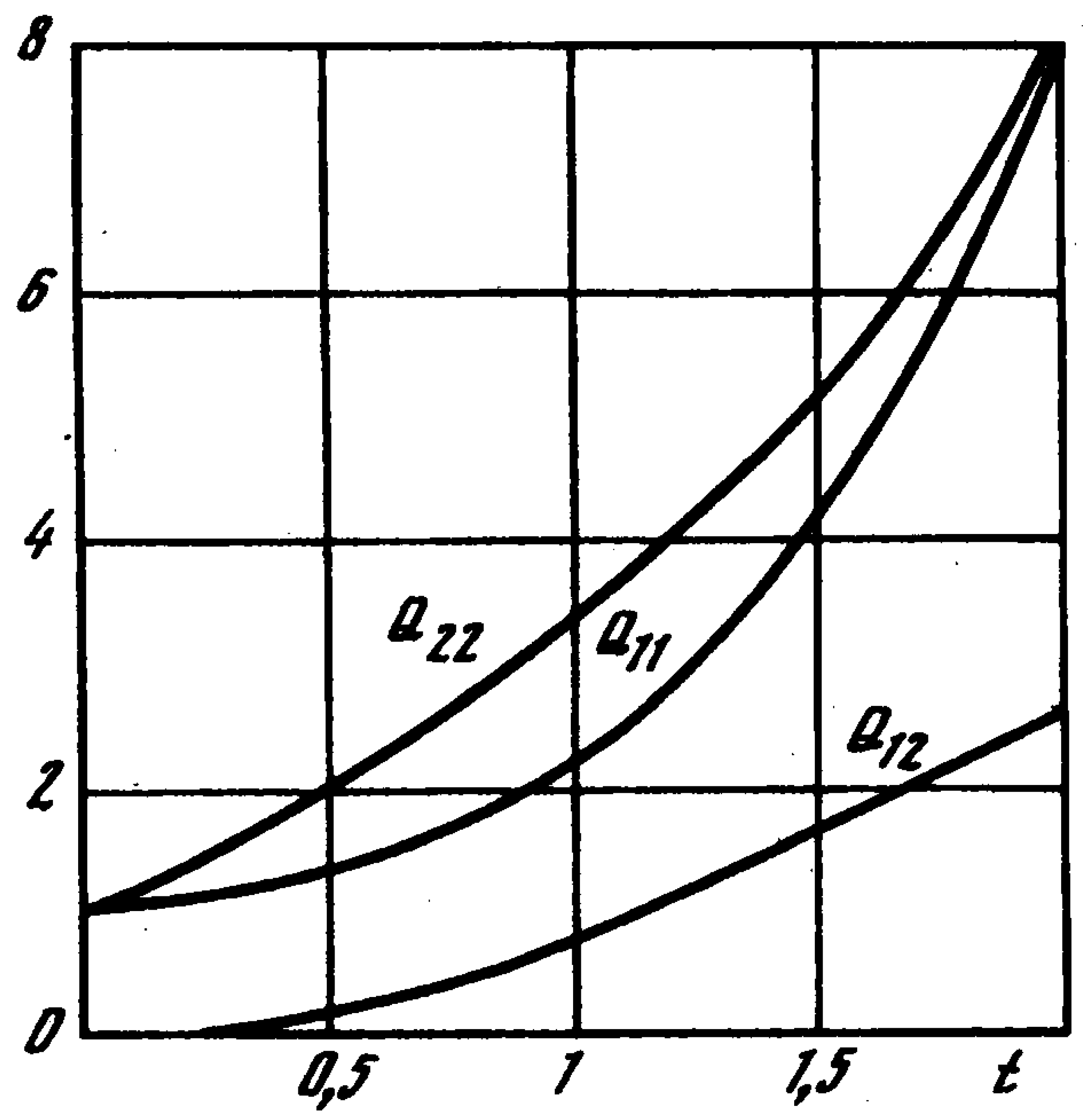
$$\begin{gathered} \dot{Q}_{11} = 2Q_{12} + qQ_{11},\quad \dot{Q}_{12} = Q_{11} - Q_{22} + qQ_{12} \\ \dot{Q}_{22} = -2Q_{12} + qQ_{22} + q^{-1}b^2(|a_1| + Q_{11}^{1/2})^2 \\ q = bQ_{11}^{1/2}(|a_1| + Q_{11}^{1/2})D^{-1},\quad D = [2(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)]^{1/2} \end{gathered} \tag{7.4}$$

Пусть начальное множество M в момент $t = 0$ представляет собой круг радиуса ε в плоскости x_1x_2 с центром в начале координат. Тогда имеем

$$a_1(0) = a_2(0) = 0,\quad Q_{11}(0) = Q_{22}(0) = \varepsilon^2,\quad Q_{12}(0) = 0 \tag{7.5}$$

Система (7.3) при начальных условиях (7.5) имеет нулевое решение, и тогда система (7.4) принимает вид

$$\begin{gathered} \dot{Q}_{11} = 2Q_{12} + bQ_{11}^2D^{-1},\quad \dot{Q}_{12} = Q_{22} - Q_{11} + bQ_{11}Q_{12}D^{-1} \\ \dot{Q}_{22} = -2Q_{12} + bQ_{11}Q_{22}D^{-1} + bD \end{gathered} \tag{7.6}$$



Фиг. 2

Правые части системы (7.6) – однородные функции Q_{ij}: система инвариантна относительно преобразования $Q_{ij} \to \lambda Q_{ij}$ с параметром λ. Поэтому, не нарушая общности, можно принять $\varepsilon = 1$ в (7.5). Результаты численного решения задачи Коши (7.6), (7.5) при $b = 0{,}8$ приведены на фиг. 2. Для интерпретации этих результатов напомним, что опорная функция эллипса $E(0, Q(t))$ равна $\rho(z) = (Qz, z)^{1/2}$, и поэтому величины $Q_{11}^{1/2}$, $Q_{22}^{1/2}$ имеют смысл проекций эллипса $E(0, Q(t))$ на координатные оси x_1, x_2 соответственно. Поэтому справедливы следующие оценки для всех решений исходной системы (7.1) при принятых начальных условиях (7.5):

$$|x_i(t)| \leq [Q_{ii}(t)]^{1/2}, \quad i = 1, 2$$

Полученные в работе внешние аппроксимации множеств достижимости могут быть полезны для оценки влияния возмущений, действующих на матрицу системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01137)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей при помощи эллипсоидов // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1980. I – № 3. С. 3–11; II – № 4. С. 3–11; III – № 5. С. 5–11.
2. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
3. *Chernousko F.L.* State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton: CRC Press, 1994. 304 p.
4. *Kurzhanskii A.B.* Dynamic control system estimation under uncertainty conditions // Prob. of Control and Inform. Theory. I – 1980. V. 9. № 6. P. 395–406; II – 1981. V. 10. № 1. P. 33–42.
5. *Решетняк Ю.Н.* Суммирование эллипсоидов в задаче гарантированного оценивания // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 249–254.

Москва

Поступила в редакцию
27.III.1996