УДК 531.01

© 1996 г. В.В. Козлов

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

Предлагается метод решения канонических уравнений Гамильтона, основанный на поиске инвариантных многообразий, однозначно проектирующихся на пространство положений. Эти многообразия задаются ковекторными полями, удовлетворяющими системе уравнений в частных производных первого порядка, которые по виду и своим свойствам аналогичны уравнениям Лэмба в динамике идеальной жидкости. Если известен полный интеграл уравнений Лэмба, то при некоторых дополнительных предположениях можно явно проинтегрировать исходные уравнения Гамильтона. Для градиентных полей этот метод переходит в известный метод Гамильтона–Якоби. Указаны некоторые новые условия точной интегрируемости уравнений Гамильтона. Общие результаты применяются к задаче о движении изменяемого тела.

1. Введение. Метод Гамильтона–Якоби сводит задачу о решении канонических уравнений

$$x_i^{\cdot} = \partial H / \partial y_i, \quad y_i^{\cdot} = -\partial H / \partial x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \quad H = H(x, y, t) \tag{1.1}$$

к исследованию уравнения в частных производных первого порядка

$$\partial S / \partial t + H(x_1, \dots, x_n, \partial S / \partial x_1, \dots, \partial S / \partial x_n, t) = 0 \tag{1.2}$$

Если $S(x, t)$ – частное решение уравнения (1.2), то соотношение

$$y = \partial S / \partial x \tag{1.3}$$

задает n-мерное инвариантное многообразие Σ системы (1.1). Пусть $S(x, t, c)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ – полный интеграл уравнения (1.2): при всех c эта функция удовлетворяет уравнению (1.2) и

$$\det \| \partial^2 S / \partial x_i \partial c_j \| \neq 0 \tag{1.4}$$

В этом случае фазовое пространство системы (1.1) расслоено на инвариантные многообразия

$$\Sigma_c = \{x, y: y = \partial S / \partial x\}$$

причем по теореме Якоби справедливы соотношения

$$\partial S / \partial c = -a, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \tag{1.5}$$

Из (1.5) можно найти переменные x как функции t и $2n$ произвольных постоянных a, c. Переменные y находятся затем по формуле (1.3).

Согласно условию (1.4), по теореме о неявной функции из n уравнений (1.3) можно найти (по крайней мере локально) $c_1, \dots, c_n$ как функции от x, y, t. Эти функции – независимые интегралы уравнений (1.1), находящиеся в инволюции: $\{c_i, c_j\} = 0$.

Обратно, если известны n независимых инволютивных интегралов уравнений Гамильтона (1.1), то можно явно построить полный интеграл уравнения (1.2). Отметим еще, что формулы (1.3), (1.5) задают каноническое преобразование $x, y \to c, a$ с производящей функцией S.

Более общий подход к изучению уравнений Гамильтона (1.1) состоит в замене уравнения (1.2) системой уравнений в частных производных первого порядка:

$$\partial u/\partial t + (\operatorname{rot} u)\, v = -\,\partial h/\partial x \tag{1.6}$$

где $u = (u_1, ..., u_n)$ – функции от x, t (ковекторное поле на пространстве положений $\{x\}$), $\operatorname{rot} u = \partial u/\partial x - (\partial u/\partial x)^T$, $\partial u/\partial x = \| \partial u_i/\partial x_j \|$ – кососимметричная матрица $n \times n$, $v = (v_1, ..., v_n)^T$, $v_i = \partial H/\partial y_i \big|_{y=u}$ – векторное поле на $\{x\}$, $h(x, t) = H(x, u(x, t), t)$.

При $n = 3$ матрице $\operatorname{rot} u$ однозначно ставится в соответствие ротор поля u так, что $(\operatorname{rot} u)\, v = (\operatorname{rot} u) \times v$. Уравнение (1.6) имеет вид известного уравнения Лэмба в динамике идеальной жидкости, поэтому и в общем случае будем называть его *уравнением Лэмба*.

Чтобы лучше понять структуру уравнений (1.6), запишем их для систем с "натуральным" гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x,t)\, y_i y_j + V(x,t), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

Уравнения Лэмба имеют следующий явный вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) u_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} u_j u_k \right) - \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Уравнение (1.6) означает, что

$$\Sigma = \{ y = u(x, t) \}$$

является n-мерной инвариантной поверхностью системы (1.1) [1]. Если $u = \partial S/\partial x$, то $\operatorname{rot} u = 0$, и из (1.6) получаем

$$\partial(\partial S/\partial t + h)/\partial x = 0$$

Следовательно,

$$\partial S/\partial t + H(x, \partial S/\partial x, t) = g(t)$$

После замены

$$S \to S - \int g(t)\, dt$$

функция g равна нулю. Вывод (1.2) из (1.6) для инвариантных поверхностей (1.3) совпадает с выводом интеграла Лагранжа–Коши для потенциальных течений идеальной жидкости. Поэтому инвариантные поверхности Σ будем называть *потенциальными* (*вихревыми*), если $\operatorname{rot} u = 0$ ($\operatorname{rot} u \neq 0$).

Уравнения (1.6) для гамильтоновых систем появились впервые, по-видимому, в вариационном исчислении как условия согласованности полей экстремалей (см. [2]). Обобщение уравнений Лэмба на негамильтоновы системы содержится в [3]. Связь уравнения (1.6) с идеями из гидродинамики указана в [1, 4]. Применения уравнений Лэмба для интегрирования уравнений аналитической механики можно найти в [3, 5]. Правда, там рассматривались, в основном, семейства потенциальных инвариантных поверхностей.

2. Вихревой метод интегрирования уравнений Гамильтона. Пусть $u(x, t, c)$ – семейство решений уравнений (1.6), зависящее от n параметров $c = (c_1, ..., c_n)$. Это семейство назовем ***полным интегралом*** уравнения Лэмба (1.6), если

$$\det\| \partial u/\partial c \| \neq 0 \tag{2.1}$$

Теорема 1. Пусть известен полный интеграл $u(x, t, c)$ уравнения (1.6), причем

1) $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = 2k$

2) найдутся k интегралов $F_1(x, y, t), ..., F_k(x, y, t)$ уравнений Гамильтона (1.1), таких, что $\{F_k, F_j\} = 0$ (для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$) и при всех значениях c поле $u(x, t, c)$ удовлетворяет каждому из k уравнений

$$\partial u / \partial t + (\operatorname{rot} u)v_i = -\partial f_i / \partial x, \quad 1 \leqslant i \leqslant k \tag{2.2}$$

$$v_i = \partial F_i / \partial y\big|_{y=u}, \quad f_i(x,t,c) = F_i(x,u(x,t,c),t)$$

3) $f_1, ..., f_k$ независимы как функции x.

Тогда исходные уравнения Гамильтона (1.1) интегрируются в квадратурах.

Замечание. Так как матрица $\operatorname{rot} u$ кососимметрическая, то ее ранг – четное число.

Укажем ряд следствий теоремы 1. Сначала рассмотрим случай, когда u – потенциальное решение уравнения Лэмба: $u = S_x'(x,t,c)$. Тогда $\operatorname{rot} u = 0$ и, следовательно, $k = 0$. В этом случае условие невырожденности (2.1) переходит в условие (1.4), а теорема 1 переходит в теорему Якоби о полном интеграле уравнения (1.2).

Рассмотрим теперь наиболее простое из вихревых решений уравнения (1.6), когда $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = 2$ и, следовательно, $k = 1$.

Если система (1.1) автономная (гамильтониан H не зависит явно от t), то в качестве интеграла F из разд. 2 можно взять функцию H. При этом поле u, очевидно, удовлетворяет уравнению (2.2), поскольку это уравнение совпадает с исходным уравнением Лэмба (1.6). Условие 3 теоремы 1 переходит в условие

$$d_x H(x, u(x, t, c)) \neq 0 \tag{2.3}$$

Итак, установлено

Следствие. Если известен полный интеграл $u(x, t, c)$ уравнения (1.6), определяемого гамильтонианом $H(x, y)$, причем $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = 2$ и выполнено условие (2.4), то уравнения Гамильтона (1.1) интегрируются в квадратурах.

Это утверждение особенно эффективно при $n = 3$: ранг матрицы $\operatorname{rot} u$ может быть равен либо нулю, либо двум.

Наконец, рассмотрим другой крайний случай, когда матрица ротора имеет максимально возможный ранг, равный n. Тогда $n = 2k$ и для полного интегрирования уравнений Гамильтона надо знать еще $n/2$ инволютивных интегралов, удовлетворяющих условиям 2 и 3 теоремы 1. Этим условиям можно дать прозрачную интерпретацию в автономном случае, когда функции $H = F_1, ..., F_{n/2}$ и поле u не зависят явно от t. Тогда уравнение Лэмба (1.6)

$$(\operatorname{rot} u)\, x^{\cdot} = -\partial h / \partial x \tag{2.4}$$

будет гамильтоновой системой в $2k$-мерном фазовом пространстве $\{x\}$ с симплектической структурой

$$\omega = d(udx) = \sum (\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i)\, dx_i \Lambda dx_j$$

и гамильтонианом h. Согласно условиям 2 и 3, функции $h = f_1, ..., f_k$ – независимые интегралы уравнения (2.5). Так как $\{F_i, F_j\} = 0$, то функции $f_1, ..., f_k$ также инволютивны относительно симплектической структуры ω. По теореме Лиувилля, уравнения (2.5) интегрируются в квадратурах. Импульсы y находятся из соотношений $y = u(x, t, c)$.

Теорема 1 доказывается в разд. 3 и 4. Сначала уравнения (1.1) сводятся к автономной системе в $(2n+2)$-мерном фазовом пространстве, а затем доказывается автономный вариант теоремы 1.

3. Сведение к автономному случаю. Хорошо известно, что неавтономную гамильтонову систему (1.1) с n степенями свободы можно представить в виде автономной системы с $n+1$ степенями свободы, добавляя к каноническим переменным x, y сопряженные переменные $x_{n+1}=t$, y_{n+1} и вводя новый гамильтониан

$$H^* = y_{n+1} + H(x, y, x_{n+1}) \tag{3.1}$$

Уравнения (1.1) эквивалентны системе

$$x^{\cdot} = \partial H^* / \partial y, \quad y^{\cdot} = -\partial H^* / \partial x$$

Два других уравнения имеют вид

$$x^{\cdot}_{n+1} = \partial H^* / \partial y_{n+1} = 1, \quad y^{\cdot}_{n+1} = -\partial H^* / \partial x_{n+1} = -\partial H / \partial t$$

Первое из них – тривиальное тождество, а второе (с учетом интеграла $H^* = \mathrm{const}$) представляет теорему об изменении энергии H для системы (1.1).

Пусть система (1.1) имеет n-мерное инвариантное многообразие $y = u(x, t)$. Тогда соотношения

$$y = u(x, x_{n+1}), \quad y_{n+1} = u_{n+1}(x, x_{n+1}) = -H(x, u, x_{n+1})$$

задают $(n+1)$-мерное инвариантное многообразие для системы с гамильтонианом (3.1).

Положим

$$x^* = (x, x_{n+1}), \quad u^* = (u, u_{n+1}), \quad y^* = (y, y_{n+1})$$

$$\operatorname{rot} u^* = \partial u^* / \partial x^* - (\partial u^* / \partial x^*)^T$$

$$v^* = (x^{\cdot}, x^{\cdot}_{n+1})^T_{y=u} = (v, 1)^T, \quad h^* = H^*\big|_{y^*=u^*} = 0$$

Можно показать, что автономные уравнения Лэмба для гамильтоновой системы с функцией Гамильтона H^*

$$(\operatorname{rot} u^*) v^* = -\partial h^* / \partial x^* = 0 \tag{3.2}$$

эквивалентны уравнениям (1.6).

Полный интеграл $u(x, t, c)$ уравнений Лэмба (1.6) можно расширить до полного интеграла уравнений (3.2), полагая

$$y_{n+1} = -H(x, u(x, x_{n+1}, c), x_{n+1}) + c_{n+1}, \quad c_{n+1} = \mathrm{const}$$

Действительно,

$$\det\left\| \partial u^* / \partial c^* \right\| = \det\left\| \partial u / \partial c \right\| \neq 0, \quad c^* = (c_1, \ldots, c_{n+1})$$

Итак, можно ограничиться рассмотрением автономных систем (1.1) с гамильтонианом $H(x, y)$ и стационарных ковекторных полей $u(x)$. Эти объекты связаны уравнениями (2.5), в которых $h(x) = H(x, u(x))$.

Теорема 2. Пусть известно n-параметрическое решение $u(x, c)$ уравнений (2.5), удовлетворяющее условию (2.1) и следующим условиям:

1) $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = 2k$

2) имеются k инволютивных интегралов $F_1(x, y), \ldots, F_k(x, y)$ автономной системы

(1.1), таких, что при всех значениях c

$$(\operatorname{rot} u)v_i = -\partial f_i / \partial x, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$v_i = \partial F_i / \partial y \big|_{y=u}, \quad f_i(x,c) = F_i(x, u(x,c))$$

3) функции $f_1, ..., f_k$ независимы.

Тогда система (1.1) интегрируется с помощью квадратур.

Это утверждение – следствие теоремы 1 в частном случае, когда функции H, $F_1, ..., F_k$ и поле u не зависят явно от t. С другой стороны, теорема 1 выводится из теоремы 2 с помощью описанного выше расширения фазового пространства. Роль k интегралов из условия 2 теоремы 2 играют функции $F_1(x, y, x_{n+1}), ..., F_k(x, y, x_{n+1})$.

Единственный содержательный момент, нуждающийся в проверке, – это равенство рангов кососимметрических матриц $A = \operatorname{rot} u$ и $B = \operatorname{rot} u^*$. Напомним, что ранг матрицы равен коразмерности ее нуль-пространства, состоящего из собственных векторов с нулевым собственным значением. Такие векторы называются еще *вихревыми* векторами.

Пусть

$$\lambda_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n})^T, \dots, \ \lambda_m = (\lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mn})^T \tag{3.3}$$

– линейно независимые вихревые векторы матрицы A и $m = n - \operatorname{rank} A$. Ясно, что векторы

$$\lambda_i = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in}, 0)^T, \quad 1 \leq i \leq m \tag{3.4}$$

будут линейно независмыми вихревыми векторами матрицы B. Осталось заметить, что, согласно (3.2), B имеет еще один вихревой вектор $v^* = (v_1, ..., v_n, 1)^T \neq 0$, линейно независимый с векторами (3.4).

Вихревые векторы (3.3) матрицы $\operatorname{rot} u$ зависят от точки x, и их линейные комбинации порождают m-мерное распределение $\Pi(x)$. Оказывается [4], это распределение интегрируемо: n-мерное пространство положений $\{x\}$ расслаивается на m-мерные поверхности, касательные плоскости которых в точке x совпадают с $\Pi(x)$. Следовательно, локальные координаты $x_1, ..., x_n$ можно выбрать так, чтобы интегральные поверхности распределения Π (*вихревые многообразия*) задавались уравнениями

$$x_1 = \alpha_1, \dots, \quad x_{2k} = \alpha_{2k}; \quad \alpha = \text{const}, \quad 2k = n - m$$

В качестве вихревых векторов (3.3) можно положить

$$\lambda_1 = (0,...,0,1,0,...,0)^T, ..., \quad \lambda_m = (0, ..., 0, ..., 1)^T$$

Так как $(\operatorname{rot} u)\, \lambda_i = 0$ $(1 \leq i \leq m)$, то $\partial u_i/\partial x_j = \partial u_j/\partial x_i$ для всех $i = 1, ..., n$ и $j = n - m + 1, ..., n$. В частности,

$$\partial u_p / \partial x_j = \partial u_j / \partial x_p, \quad \partial u_q / \partial x_j = \partial u_j / \partial x_q, \quad 1 \leq p, \ q \leq 2k$$

Следовательно,

$$(\partial / \partial x_j)(\partial u_p / \partial x_q - \partial u_q / \partial x_p) = 0$$

и поэтому матрица $\operatorname{rot} u$ имеет следующий вид: ее последние $n - 2k$ столбцов и $n - 2k$ строк нулевые, а остальные элементы образуют кососимметрическую $(2k \times 2k)$-матрицу

$$(\operatorname{rot} u)_* = \left\| \partial u_p / \partial x_q - \partial u_q / \partial x_p \right\|; \quad p, q \leq 2k$$

элементы которой не зависят от $x_{2k+1}, ..., x_n$.

Было доказано [4], что функция h постоянна на вихревых многообразиях. Значит, в указанных переменных она зависит лишь от $x_1, ..., x_{2k}$. Таким образом, уравнение (2.4) сводится к уравнению

$$(\operatorname{rot} u)_* \dot{x}_* = -\partial h / \partial x_*, \quad x_* = (x_1, \ldots, x_{2k}) \tag{3.5}$$

с невырожденной матрицей $(\operatorname{rot} u)_*$. Поскольку уравнения из условия 2 теоремы 2 по форме совпадают с (2.4), функции $f_1, ..., f_k$ также постоянны на вихревых многообразиях и не зависят от $x_{2k+1}, ..., x_n$. Эти функции составляют полный инволютивный набор независимых интегралов уравнений Гамильтона (3.5), и поэтому применима теорема Лиувилля о полной интегрируемости.

Было доказано [1], что фазовый поток системы $x^{\cdot} = v(x)$ переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия. Следовательно, компоненты $v_{2k+1}, ..., v_n$ поля v не зависят от переменных $x_{2k+1}, ..., x_n$ и эти переменные как функции t находятся простыми квадратурами.

Исключение переменных $x_{2k+1}, ..., x_n$ означает факторизацию пространства положений $\{x\}$ по вихревым многообразиям: отождествляются точки x, лежащие на одном вихревом многообразии. С этой точки зрения система (3.5) является *фактор-системой* (2.5) по указанному отношению эквивалентности. Таким образом, вопрос об интегрировании системы (1.1) упирается в задачу конструктивного построения семейства вихревых многообразий.

4. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим семейство поверхностей совместных уровней функции f_i:

$$M_\beta^{n-k} = \{x\colon f_1(x) = \beta_1, \ldots, f_k(x) = \beta_k\}, \quad \beta = \text{const}$$

Пусть $V_1, ..., V_k$ – гамильтоновы векторные поля в $2n$-мерном фазовом пространстве переменных x, y, порождаемые гамильтонианами $F_1, ..., F_k$. Поскольку $\{F_i, F_j\} = 0$, эти поля попарно коммутируют: $[V_i, V_j] = 0$. Согласно условию 2, поля V_i касаются n-мерных поверхностей $\Sigma_c = \{x, y\colon y = u\}$ и поэтому корректно определены проекции $v_1, ..., v_k$ этих полей на конфигурационное пространство $\{x\}$. Так как поля V_i попарно коммутируют, то $[v_i, v_j] = 0$.

Поскольку $\{F_i, F_j\} = 0$, каждая функция F_i является интегралом векторного поля V_j: $V_j(F_i) = 0$. Следовательно, $v_j(f_i) = 0$ для всех $i, j = 1, ..., k$. Это означает, что поля $v_1, ..., v_k$ касаются каждой поверхности M^{n-k}.

С другой стороны, имеются независимые вихревые векторные поля $w_1, ..., w_{n-2k}$, которые также касаются M^{n-k}. Действительно, согласно (3.4), $w_j(f_i) = 0$. Далее, векторы

$$v_1, \ldots, v_k, \quad w_1, \ldots, w_{n-2k} \tag{4.1}$$

линейно независимы. В противном случае

$$\Sigma \lambda_i v_i + \Sigma \mu_j w_j = 0 \tag{4.2}$$

с некоторыми λ_i, μ_j, причем $\Sigma |\lambda_i| \neq 0$. Умножая (4.2) слева на rot u и применяя условие 2, получим

$$\Sigma \lambda_i (\operatorname{rot} u) v_i = -\Sigma \lambda_i \partial f_i / \partial x = 0$$

Однако, согласно условию 3 теоремы, функции $f_1, ..., f_k$ независимы. Следовательно, все $\lambda_i = 0$. Получили противоречие. Отметим, что число независимых касательных полей (4.1) совпадает с размерностью многообразия M^{n-k}.

Найдем теперь $(n-2k)$-мерные вихревые многообразия rot u, точнее, пересечение этих многообразий с $(n-k)$-мерными поверхностями M^{n-k}. Они k-мерные и поэтому задаются на M^{n-k} уравнениями

$$\varphi_1(x)=\gamma_1,\ldots,\ \varphi_k(x)=\gamma_k,\quad x\in M^{n-k}$$

По определению вихревых многообразий, функции φ_i удовлетворяют уравнениям

$$w_1(\varphi_i)=\ldots=w_{n-2k}(\varphi_i)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant k \tag{4.3}$$

Будем искать их из дополнительных условий

$$v_j(\varphi_i)=\delta_{ji},\quad 1\leqslant j\leqslant k \tag{4.4}$$

где δ_{ji} – символ Кронекера.

Прежде всего надо показать, что системы уравнений в частных производных первого порядка (4.3)–(4.4) имеют решения. Действительно, $[v_i, v_j]=0$, и можно показать, что коммутаторы $[v_i, v_j]$ линейно выражаются через вихревые векторы w [4]. При этих условиях разрешимость системы (4.3)–(4.4) вытекает из известных результатов теории разрешимых алгебр векторных полей (см., например, [6]).

Поскольку векторные поля (4.1) независимы, из (4.3) и (4.4) можно однозначно найти (с помощью только алгебраических операций) частные производные от функции φ_i по локальным координатам на M^{n-k}. Остается воспользоваться известными квадратурами, восстанавливающими функцию по ее производным. Теорема доказана.

5. Связь с теорией некоммутативного интегрирования. Пусть $u(x, t, c)$ – полный интеграл уравнений Лэмба (1.6). Так как выполнено условие (2.1), по теореме о неявных функциях систему уравнений

$$y_i=u_i(x,t,c_1,\ldots,c_n),\quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{5.1}$$

можно разрешить (хотя бы локально) относительно параметров c:

$$c_1=F_{k+1}(x,y,t),\ldots,\quad c_n=F_{n+k}(x,y,t) \tag{5.2}$$

Ввиду инвариантности поверхностей (5.1) эти функции – интегралы уравнений Гамильтона (1.1) [1]. Согласно условию 3 теоремы 1, функции $F_1, \ldots, F_k, \ldots, F_{n+k}$ независимы. По условию 2, первые k функций коммутируют со всеми остальными. Следовательно, ранг r матрицы скобок Пуассона

$$\|\{F_i,F_j\}\|,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n+k \tag{5.3}$$

совпадает с рангом матрицы скобок Пуассона функций (5.2). Было показано [7], что это число совпадает с рангом ротора u, т.е. равно $2k$.

Итак, число $m=n+k$ известных интегралов уравнений Гамильтона (1.1) связано с рангом r матрицы (5.3) соотношением

$$2m=2n+r \tag{5.4}$$

которое известно как условие *некоммутативной интегрируемости* системы (1.1) [8]. Когда $r=0$, условие (5.4) переходит в условие полной интегрируемости уравнений Гамильтона с n степенями свободы.

Отметим, что в теории некоммутативного интегрирования обычно рассматриваются автономные системы и *замкнутые* наборы интегралов: их скобки Пуассона $\{F_i, F_j\}$ являются функциями от F_s. При этих предположениях доказана [9] интегрируемость в квадратурах уравнений Гамильтона, удовлетворяющих условию (5.4).

Теорема 3. Предположим, что уравнения Гамильтона (1.1) имеют $n+k$ независимых интегралов

$$F_1(x,y,t),\ldots,\ F_{n+k}(x,y,t) \tag{5.5}$$

причем первые $n-k$ из них находятся в инволюции со всеми функциями (5.5). Тогда уравнения (1.1) интегрируются в квадратурах.

При $k = 0$ получаем теорему Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновых систем. Рассмотрим автономный случай и предположим, что поверхности совместных уровней интегралов (5.5) компактны. Было доказано [10], что связные компоненты этих поверхностей будут $(n-k)$-мерными торами с условно-периодическими движениями, причем в окрестности этих торов можно ввести обобщенные переменные действие–угол. Отметим, что в предположениях теоремы 3 ранг матрицы (5.3) равен $2k$. Следовательно, выполнено условие (5.4), однако свойство замкнутости набора интегралов (5.5) здесь не предполагается.

Для доказательства теоремы 3 рассмотрим алгебраическую систему уравнений

$$F_{k+1}(x,y,t)=c_1,\ldots,\quad F_{n+k}(x,y,t)=c_n \tag{5.6}$$

и предположим дополнительно, что

$$\frac{\partial(F_{k+1},\ldots,F_{n+k})}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\neq 0 \tag{5.7}$$

Тогда систему (5.6) можно разрешить относительно канонических импульсов: $y = u(x, t, c)$. Так как при всех значениях c уравнения (5.6) задают инвариантную поверхность системы (1.1), поле u удовлетворяет уравнению Лэмба (1.6). Поскольку функции (5.6) независимы и выполнено условие (5.7), семейство решений $u(x, t, c)$ удовлетворяет условию (2.1). Следовательно, это – полный интеграл уравнения Лэмба. Ранг матрицы (5.3) совпадает [7] с рангом матрицы $\operatorname{rot} u$. Поэтому выполнено условие 1 теоремы 1. Так как $n-k \geqslant k$, первые k функций из набора (5.5) коммутируют со всеми функциями (5.6). Значит, выполнено условие 2 теремы 1. Наконец, условие 3 следует из предположения о независимости набора функций (5.5). Таким образом, интегрируемость уравнений Гамильтона (1.1) вытекает из теоремы 1.

Если предположение (5.7) не выполнено, то переменные $y_1, \ldots, y_n$ следует заменить другими каноническими координатами. Все рассуждения остаются в силе, только уравнения Лэмба будут иметь несколько иной вид.

6. Приложение к динамике изменяемого тела. В качестве примера рассмотрим задачу Лиувилля [11] о вращении по инерции изменяемого тела: за счет внутренних сил его частицы перемещаются относительно друг друга. Динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$K^{\cdot}=[K,\omega],\quad K=I\omega+\lambda \tag{6.1}$$

где ω – угловая скорость тела относительно его главных осей инерции, $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – матрица инерции, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гироскопический момент. Будем считать, что I_i, λ_j – известные функции времени. В этом случае уравнения (6.1) будут замкнутыми.

Замечание. В динамике изменяемого тела возможны другие постановки задачи. Например, Зейлигер и Четаев [12] рассматривали подобно изменяемое тело и для замыкания системы (6.1) добавляли уравнение для скорости "лучистого" расширения.

Присоединяя к (6.1) уравнения Пуассона для единичных неподвижных векторов α, β, γ

$$\alpha^{\cdot}=[\alpha,\omega],\quad \beta^{\cdot}=[\beta,\omega],\quad \gamma^{\cdot}=[\gamma,\omega] \tag{6.2}$$

получим полную систему для определения ориентации главных осей инерции тела. Уравнения (6.1), (6.2) допускают три интеграла:

$$(K,\alpha)=c_1,\quad (K,\beta)=c_2,\quad (K,\gamma)=c_3 \tag{6.3}$$

Их следствием является интеграл момента $(K, K) = k^2$ уравнений Эйлера (6.1).

Будем искать трехмерные инвариантные поверхности, однозначно проектирующиеся на конфигурационное пространство – группу $SO(3)$. Это означает, что кинетический момент K следует искать в виде функции от α, β, γ и времени t. Тогда из (6.1) и (6.2) получаем векторное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\frac{\partial K}{\partial \alpha}[\alpha,\omega]+\frac{\partial K}{\partial \beta}[\beta,\omega]+\frac{\partial K}{\partial \gamma}[\gamma,\omega]=[K,\omega] \tag{6.4}$$

Здесь вместо ω надо подставить $I^{-1}(K-\lambda)$. Это уравнение, конечно, является уравнением Лэмба (1.6), только оно представлено не в канонических переменных. Переход от (1.6) к (6.4) вполне аналогичен переходу от уравнений Гамильтона к уравнениям Пуанкаре–Четаева на алгебрах Ли.

Согласно (6.3), одним из полных решений уравнения Лэмба (6.4) будет функция. $K = c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma$. Можно показать, что условие невырожденности (2.1) выполнено и ранг матрицы ротора равен двум, если оператор инерции I не шаровой.

Предположим, что уравнения (6.1) допускают интеграл $F(K, t)$, независимый от интеграла момента K^2. Тогда уравнения (6.1)–(6.2) интегрируются в квадратурах. Этот факт можно вывести из теоремы 1.

Действительно, здесь $k = 1$ и функции F отвечает уравнение Пуанкаре–Четаева

$$K^{\cdot} = [K, \partial F/\partial K] \tag{6.5}$$

к которому надо добавить уравнения Пуассона (6.2). Ясно, что каждая поверхность (6.3) будет инвариантной для уравнений (6.5) и (6.2). Поэтому выполнено условие 2 теоремы 1. Условие 3 вытекает из предположения о независимости функций F и K^2.

Замечание. Результат об интегрируемости уравнений (6.1) и (6.2) в квадратурах вытекает также из теоремы 3: нужный набор интегралов составляют функции F и K^2, (K, α), (K, β). Интегрируемость неавтономной системы (6.1) с дополнительным интегралом F вытекает также из теоремы Эйлера–Якоби, так как дивергенция правой части (6.1) равна нулю.

Можно показать [4], что векторные поля на группе $SO(3)$, порождающие вращение осей инерции с угловой скоростью, постоянной в неподвижном пространстве, будут вихревыми полями. В частности, все вихревые линии замкнуты и расслоение группы $SO(3)$ вихревыми линиями совпадает с известным расслоением Хопфа. Соответствующее фактор-пространство будет сферой Пуассона.

Для определенности рассмотрим случай, когда вектор кинетического момента K направлен вдоль γ: $K = k\gamma$, $k = |K|$. Считая вектор γ вертикальным, введем углы Эйлера ϑ, φ, ψ, задающие ориентацию главных осей инерции изменяемого тела. В уравнениях (6.3) надо положить $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = k$. Используя кинематические формулы Эйлера, для этих значений можно записать уравнения движения на группе $SO(3)$

$$\begin{aligned}
\vartheta^{\cdot} &= k(I_1^{-1}-I_2^{-1})\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi-\lambda_1 I_1^{-1}\cos\varphi+\lambda_2 I_2^{-1}\sin\varphi\\
\vartheta^{\cdot} &= k\cos\vartheta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{\sin^2\varphi}{I_1}-\frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right)+\frac{\lambda_1\sin\varphi\cos\vartheta}{I_1\sin\vartheta}+\frac{\lambda_2\cos\varphi\cos\vartheta}{I_2\sin\vartheta}-\frac{\lambda_3}{I_3}\\
\psi^{\cdot} &= k\left(\frac{\sin^2\varphi}{I_1}+\frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right)-\frac{\lambda_1\sin\varphi}{I_1\sin\vartheta}-\frac{\lambda_2\cos\varphi}{I_2\sin\vartheta}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Они допускают интегральный инвариант

$$\mathrm{mes}(D)=\iiint_D \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\psi$$

который совпадает с двусторонней инвариантной мерой Хаара на группе $SO(3)$ [13]. В этих переменных вихревые поля имеют вид $\vartheta' = 0$, $\varphi' = 0$, $\psi' = \mu$, а вихревые линии задаются уравнениями ϑ, $\varphi = \text{const}$. Поскольку третье уравнение (6.6) не содержит явно угол ψ, то факторизация по вихревым линиям приводит к первым двум уравнениям системы (6.6). Они являются замкнутой гамильтоновой системой на сфере Пуассона, причем роль симплектической структуры играет стандартная 2-форма площади.

7. Потенциалы Клебша. Как показано в разд. 3, основная трудность явного интегрирования уравнений Гамильтона при известном полном интеграле уравнений Лэмба состоит в нахождении вихревых многообразий. Эта задача существенно упрощается, если ковекторное поле u представлено в виде суммы

$$\partial S / \partial x + A_1 \partial B_1 / \partial x + \ldots + A_k \partial B_k / \partial x \tag{7.1}$$

где $S, A_1, B_1, \ldots$ – некоторые функции от x и t. Ввиду формулы

$$u = \partial S' / \partial x - \Sigma B_s \partial A_s / \partial x, \quad S' = S + \Sigma A_i B_i$$

A_s, B_s имеют один и тот же смысл. В гидродинамике функции $S, A_1, B_1, \ldots$ обычно называют *потенциалами Клебша* [14, § 167].

Если потенциал $A_1, B_1, \ldots, B_k$ независимы как функции x, то $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = 2k$. Поскольку

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \Sigma \left(\frac{\partial A_s}{\partial x_j} \frac{\partial B_s}{\partial x_i} - \frac{\partial A_s}{\partial x_i} \frac{\partial B_s}{\partial x_j} \right)$$

вихревые векторы совпадают с касательными векторами к $(n - 2k)$-мерным поверхностям

$$\{x\colon \ A_1(x,t) = a_1, \quad B_1(x,t) = b_1, \ldots, B_k(x,t) = b_k\}, \quad a, b = \text{const}$$

Следовательно, эти поверхности являются искомыми вихревыми многообразиями.

По теореме Дарбу [15], потенциалы Клебша всегда существуют. Более того, функции $A_1, B_1, \ldots, B_k$ можно принять за новые координаты; обозначим их $x_1, \ldots, x_{2k}$. Расширяя это точечное преобразование до линейного канонического, запишем в явном виде формулы (7.1)

$$u_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}, \quad u_2 = \frac{\partial S}{\partial x_2} + x_1, \ldots, \quad u_{2k+1} = \frac{\partial S}{\partial x_{2k+1}}, \ldots, \quad u_n = \frac{\partial S}{\partial x_n}$$

и уравнения Лэмба (1.6)

$$\dot{x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right), \quad \dot{x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) \tag{7.2}$$

....

$$\dot{x}_{2k-1} = -\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right), \quad \dot{x}_{2k} = \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{2k+1}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = \ldots = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = 0 \tag{7.3}$$

Из (7.3) вытекает, что $\partial S/\partial t + h$ – функция лишь от координат $x_1, \ldots, x_{2k}$ и времени t. Это соотношение обобщает уравнение Гамильтона–Якоби и переходит в него при $k = 0$. Тогда (7.2) будет замкнутой канонической системой дифференциальных уравнений для потенциалов Клебша с гамильтонианом $\partial S/\partial t + h$. Эти наблюдения обобщают известные результаты Клебша и Стюарта [14] о вихревых течениях идеальной жидкости (когда $n = 3$).

Предположим теперь, что выполнены условия теоремы 1. Можно показать, что (согласно (2.3)) функции $f_1, ..., f_k$ не зависят от $x_{2k+1}, ..., x_n$ и находятся в инволюции. Таким образом, эти функции образуют полный набор независимых инволютивных интегралов уравнений Гамильтона (7.2). Явное решение уравнений (7.2) можно получить с помощью построения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби для гамильтониана $\partial S/\partial t + h$. После этого остальные переменные $x_{2k+1}, ..., x_n$ находятся простыми квадратурами (см. разд. 3).

В качестве примера снова рассмотрим вращение осей инерции изменяемого тела. Пусть p_ϑ, p_φ, p_ψ – канонические переменные, сопряженные с углами Эйлера ϑ, φ, ψ. Принимая ось постоянного кинетического момента тела за вертикаль, запишем в этих переменных уравнение трехмерной инвариантной поверхности, однозначно проектирующейся на $SO(3)$

$$p_\psi = k, \quad p_\vartheta = 0, \quad p_\varphi = k\cos\vartheta$$

В качестве потенциалов Клебша можно принять

$$S = k\psi, \quad A = k\cos\vartheta, \quad B = \varphi$$

Автор благодарит В.В. Румянцева и А.Н. Голубятникова за обсуждения.
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00747).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1983. № 6. С. 10–22.
2. *Блисс Дж.А.* Лекции по вариационному исчислению. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 348 с.
3. *Аржаных И.С.* Поле импульсов. Ташкент: Наука, 1965. 231 с.
4. *Козлов В.В.* Вихревая теория волчка // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1990. № 4. С. 56–62.
5. *Vujanovic B.D., Jones S.E.* Variational Methods in Nonconservative Phenomena. Boston: Acad. Press. 1989. 371 p.
6. *Чеботарев Н.Г.* Теория групп Ли. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 396 с.
7. *Kozlov V.V.* Hydrodynamics of Noncommutative Integration of Hamiltonian Systems // Dynamical Systems in Classical Mechanics. Amer. Mat. Soc. ser. 2. 1995. V. 168. P. 227–238.
8. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его приложения, 1978. Т. 12. Вып. 2. С. 46–56.
9. *Браилов А.В.* Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 5. С. 1043–1046.
10. *Нехорошев Н.Н.* Переменные действие–угол и их обобщения // Тр. Моск. мат. о-ва. Т. 26. С. 181–198.
11. *Liouville J.* Développements sur un chapitre de la Mécanique de Poisson // J. Mat. Pures et Appl. 1858. V. 3. P. 1–25.
12. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях движения подобно-изменяемого тела // Уч. зап. Казан. ун-та. 1954. Т. 114. Кн. 8. С. 5–7.
13. *Наймарк М.А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958. 376 с.
14. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
15. *Картан Э.* Интегральные инварианты. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 216 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1996