УДК 62-50

© 1996 г. Н.Н. Субботина

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МИНИМАКСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ АЙЗЕКСА-БЕЛЛМАНА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Получены достаточные условия существования предела решений задачи Коши для сингулярно-возмущенных уравнений Гамильтона–Якоби. Эти результаты использованы для исследования существования асимптотики функции цены дифференциальной игры, содержащей быстрые и медленные движения.

Для управляемых систем и дифференциальных игр (ДИ), динамика которых содержит быстрые и медленные движения (см., например, [1–7]), соответствующие уравнения Айзекса–Беллмана (АБ) являются сингулярно возмущенными в том смысле, что гамильтонианы содержат члены с коэффициентами вида $1/\varepsilon$, где ε – малый параметр. Известно, что функция цены ДИ совпадает с минимаксным (и/или вязкостным) решением задачи Коши для уравнения АБ [8–11]. В данной работе исследуется асимптотика минимаксных решений при $\varepsilon \to 0$. Сначала получены достаточные условия существования предела решений сингулярно-возмущенных уравнений Гамильтона–Якоби (ГЯ) и показано, что этот предел совпадает с минимаксным решением невозмущенного уравнения. Затем с использованием этого результата исследуются асимптотики функций цены для сингулярно возмущенных ДИ. Применяются элементы выпуклого и негладкого анализа [12, 13].

1. Приведем некоторые сведения из теории минимаксных решений уравнений с частными производными первого порядка [9, 11]. Будем рассматривать задачу Коши для уравнения ГЯ

$$\partial u/\partial t + H(t, x, D_x u) = 0, \quad (t, x) \in G = (0, \theta) \times R^n \tag{1.1}$$

$$u(\theta, x) = \sigma(x), \qquad x \in R^n \tag{1.2}$$

Будем полагать, что функция $\sigma(x)$ непрерывна, а гамильтониан $H(t, x, p)$ непрерывен в области определения $[0, \theta] \times R^n \times R^n$, удовлетворяет отценке

$$\sup_{(t,x)\in[0,\theta]\times R^n} \frac{|H(t,x,0)|}{(1+\|x\|)} < \infty \tag{1.3}$$

и следующим условиям Липшица по переменным p и x:

$$|H(t,x,p') - H(t,x,p'')| \leq \lambda(x)\|p' - p''\| \tag{1.4}$$

при любых $(t, x) \in [0, \theta] \times R^n$, $p', p'' \in R^n$, где $\lambda(x) := (1 + \|x\|)\mu$, μ – постоянная;

$$\sup_{(t,x,y,p)} \left\{ \frac{|H(t,x,p) - H(t,y,p)|}{\|x-y\|(1+\|p\|)} \right\} < \infty \tag{1.5}$$

при $(t, x, y, p) \in [0, \theta] \times B \times B \times R^n$, где B – произвольная ограниченная область $B \subset R^n$.

Непрерывная функция $\overline{G} \in (t,x) \mapsto u(t,x) \in R$, непрерывно дифференцируемая в области G и удовлетворяющая равенству (1.2) и уравнению (1.1) при всех $(t, x) \in G$, называется классическим решением задачи (1.1), (1.2). Здесь $\overline{G} = [0, \theta] \times R^n$; $D_x u = (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$ – градиент функции u.

Как известно, задачи Коши и краевые задачи для уравнений ГЯ, которые возникают в приложениях, обычно не имеют классических решений. Поэтому вводятся обобщенные решения. В данной работе используется понятие минимаксного решения, которое можно определить различными способами, в том числе, при помощи средств негладкого анализа: производных по направлениям, конусов касательных направлений, суб- и супердифференциалов (формулировки этих определений и доказательство их эквивалентности даны, например, в [9]).

Прежде чем привести одно из этих определений, заметим, что любое определение минимаксного решения содержит в явном или неявном виде свойство слабой инвариантности графика этого решения относительно так называемых характеристических включений, которые вводятся следующим образом.

Пусть S – некоторое непустое множество, M – многозначное отображение

$$[0,\theta] \times R^n \times S \ni (t,x,s) \mapsto M(t,x,s) \subset R^n \times R \tag{1.6}$$

Пару (S, M) будем называть характеристическим комплексом (или, для краткости, комплексом), если выполнены указанные ниже требования.

1°. Для любых $(t, x) \in [0, \theta] \times R^n$ и $s \in S$ множество $M(t, x, s) \subset R^n \times R$ непусто, выпукло и замкнуто. Для любых $(t, x, s) \in [0, \theta] \times R^n \times S$ и $(f, g) \in M(t, x, s)$ справедливы оценки

$$\|f\| \leqslant \lambda(x), \qquad |g| \leqslant m(t, x)(1 + \|x\|)$$

где величина $\lambda(x)$ определена в условии (1.4). Для любого $s \in S$ функция $t \mapsto m(t,s)$ суммируема на $[0, \theta]$, а многозначное отображение $(t, x) \mapsto M(t,x,s)$ полунепрерывно сверху.

2°*а*. Для любых $(t, x) \in [0, \theta] \times R^n$ и $p \in R^n$ справедливы равенства

$$\max_{s\in S} \min\{\langle f,p\rangle - g : (f,g) \in M(t,x,s)\} = H(t,x,p)$$

2°*б*. Справедливо соотношение

$$\max_{s\in S} \min\{\langle f,p\rangle - g : (f,g) \in M(t,x,s)\} = H(t,x,p)$$

Совокупность комплексов (S, M) обозначим символом $C(H)$. Заметим, что указанным условиям удовлетворяет, например, пара (S, M), где $S = R^n$ и

$$M(t,x,s) = \{(f,g) \in R^n \times R : \|f\| \leqslant \lambda(x), \quad g = \langle f,s\rangle - H(t,x,s)\}$$

$$(t,x) \in \overline{G}, \quad s \in R^n$$

Здесь $\lambda(x) = (1 + \|x\|)\mu$ – величина из условия Липшица (1.4).

Выберем произвольно комплекс $(S, M) \in C(H)$ и $s \in S$. Символом $\mathrm{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций $(x(\cdot), z(\cdot)) : [0, \theta] \mapsto R^n \times R$, удовлетворяющих условию $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$ и дифференциальному включению

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in M(t, x(t), s) \tag{1.7}$$

Определение 1. Минимаксным решением уравнения (1.1) называется непрерывная функция $[0, \theta] \times R^n \ni (t, x) \mapsto u(t,x) \in R$, удовлетворяющая следующему условию слабой инвариантности относительно (1.7): для любых $(t_0, x_0, z_0) \in \mathrm{gr}\, u$, $s \in S$ и $\tau \in [t_0, \theta]$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \mathrm{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$, такая, что $(\tau, x(\tau), z(\tau)) \in \mathrm{gr}\, u$.

Дифференциальное включение (1.7) называется характеристическим. Известно, что это определение не зависит от выбора комплекса $(S, M) \in C(H)$.

Можно показать также эквивалентность минимаксных и вязкостных решений в смысле Крэндалла и Лионса [10]. При выполнении указанных предположений относительно гамильтониана и терминальной функции σ существует одно и только одно минимаксное решение задачи Коши (1.1), (1.2). Доказательство этих фактов приведено в [9, 11].

Важную роль в теории минимаксных решений играют понятия верхних и нижних решений. Приведем определения этих понятий в форме, удобной для последующего использования в этой работе.

Пусть по-прежнему S – некоторое непустое множество, M – многозначное отображение вида (1.6). Пару (S, M) будем называть верхним (нижним) характеристическим комплексом, если выполнены условия 1° и 2°*а* (соответственно 1° и 2°*б*). Совокупность верхних (нижних) характеристических комплексов обозначим $C^{\uparrow}(H)$ (соответственно $C^{\downarrow}(H)$).

Определение 2. Верхним (нижним) решением уравнения (1.1) называется полунепрерывная снизу (сверху) функция $[0, \theta] \times R^n \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in R$, удовлетворяющая следующему условию: для любых $(t_0, x_0, z_0) \in \operatorname{epi} u$ $((t_0, x_0, z_0) \in \operatorname{hypo} u)$, $s \in S$ и $\tau \in [t_0, \theta]$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot)) \in \operatorname{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$, такая, что $(\tau(x(\tau), z(\tau)) \in \operatorname{epi} u$ $((\tau, x(\tau), z(\tau)) \in \operatorname{hypo} u)$. Здесь $(S, M) \in C^{\uparrow}(H)$ $((S, M) \in C^{\downarrow}(H))$, $\operatorname{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$ – множество траекторий дифференциального включения (1.7) удовлетворяющих условию $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$.

Символами epi u и hypo u обозначаются соответственно множества

$$\{(t,x,z) : z \geqslant u(t,x), (t,x) \in \overline{G}\}, \quad \{(t,x,z): z \leqslant u(t,x), (t,x) \in \overline{G}\}$$

– надграфик и подграфик функции u. Определение верхнего (нижнего) решения не зависит от выбора комплекса $(S, M) \in C^{\uparrow}(H)$ (соответственно $(S, M) \in C^{\downarrow}(H)$). Известно, что функция u – минимаксное решение тогда и только тогда, когда она одновременно является верхним и нижним решением.

2. Рассмотрим две задачи Коши, невозмущенную и возмущенную

$$\partial u / \partial t + H(t, x, D_x u) = 0, \quad u(\theta, x) = \sigma(x) \tag{2.1}$$

$$\partial u_\varepsilon / \partial t + H_\varepsilon(t, x, y, D_x u_\varepsilon, D_y u_\varepsilon) = 0, \quad u_\varepsilon(\theta, x, y) = \sigma(x) \tag{2.2}$$

В этих уравнениях по-прежнему $t \in (0, \theta)$, $x \in R^n$, новая переменная $y \in R^l$, ε – положительный числовой параметр, функция u_ε зависит от переменных $(t, \tilde{x})$, где $\tilde{x} = (x, y)$. Соответственно гамильтониан H_ε зависит от переменных $(t, \tilde{x}, \tilde{p})$, где $p = (p, r)$, $r \in R^l$. Предполагается, что функция $\sigma(x)$ непрерывна, гамильтонианы $H(t, x, p)$ и $H_\varepsilon(t, \tilde{x}, \tilde{p})$ удовлетворяют требованиям, указанным в разд. 1.

Будем рассматривать условия, при которых решения u_ε задачи (2.2) сходятся при $\varepsilon \to 0$ к решению u задачи (2.1). С этой целью введем следующие построения.

Пусть $\rho > 0$, $(S, M) \in C^{\uparrow}(H)$ либо $(S, M) \in C^{\downarrow}(H)$. Символом $G^\rho(t_0, \tau, x_0, z_0, s)$ обозначим множество достижимости дифференциального включения

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in M(t, x(t), s) + B_\rho. \tag{2.3}$$

Здесь $s \in S$, $0 \leqslant t_0 < \tau \leqslant \theta$, (x_0, z_0) – начальное положение; $B_\rho = \{(f, g) \in R^n \times R\colon \|f\|^2 + g^2 \leqslant \rho^2\}$. Заметим, что $(x^*, z^*) \in G^\rho(t_0, \tau, x_0, s)$ тогда и только тогда, когда существует траектория дифференциального включения (2.3), такая, что $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$, $(x(\tau), z(\tau)) = (x^*, z^*)$. Допуская некоторую вольность, будем говорить также, что здесь определено множество достижимости комплекса (S, M^ρ).

Пусть $(S_\varepsilon, M_\varepsilon) \in C^{\downarrow}(H_\varepsilon)$ либо $(S_\varepsilon, M_\varepsilon) \in C^{\uparrow}(H_\varepsilon)$, $s' \in S_\varepsilon$. Символом $G_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0, s')$

обозначим множество достижимости дифференциального включения

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \in M_\varepsilon(t, x(t), y(t), s') \tag{2.4}$$

Отметим, что $G_\varepsilon(\ldots)$ – множество в $R^n \times R^l \times R$. Будем говорить также, что $G_\varepsilon(\ldots)$ – множество достижимости комплекса $(S_\varepsilon, M_\varepsilon)$.

Условие 1 (*Условие* 2). Существуют комплекс $(S, M) \in C^\uparrow(H)$ (комплекс $(S, M) \in C^\downarrow(H)$) и компакт $Y \subset R^l$, такие, что выполняется соотношение

$$G^\rho(t_0, \tau, x_0, z_0, s) \times Y \supseteq \bigcup_{y_0 \in Y} G_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0, \psi_\varepsilon(s)) \tag{2.5}$$

где $G_\varepsilon(\ldots)$ – множество достижимости некоторого комплекса $(S_\varepsilon, M_\varepsilon) \in C^\uparrow(H_\varepsilon)$ $((S_\varepsilon, M_\varepsilon) \in C^\downarrow(H_\varepsilon))$. Здесь предполагается, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и точки $(t_*, x_*) \in (-\infty, \theta) \times R^n$ определены отображение $s \mapsto \psi_\varepsilon(s)$: $S \mapsto S_\varepsilon$ и величины $\rho = \rho(\varepsilon, t_*, x_*) > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, t_*, x_*) > 0$, такие, что $\lim \rho(\varepsilon, t_*, x_*) = 0$, $\lim \delta(\varepsilon, t_*, x_*) = 0$ при $\varepsilon \to 0$. Соотношение (2.5) должно выполняться при всех $\varepsilon > 0$ $s \in S$, $z_0 \in R$, $(t_0, x_0) \in B(t_*, x_*; \alpha)$ $(\alpha = \alpha(t_*, x_*) \in (0, \theta - t_*))$, $\tau \in [t_0 + \delta(\varepsilon, t_*, x_*), \theta]$. Символом $B(t_*, x_*; \alpha)$ обозначен замкнутый шар в $R \times R^n$ радиуса α с центром в точке (t_*, x_*).

Это формальное условие используется как достаточное для доказательства существования асимптотик решений сингулярно возмущенных уравнений. Затем будут рассмотрены примеры дифференциальных игр, в которых это условие проверяется достаточно просто. Как будет видно из примеров, компакт Y в (2.5) содержит область притяжения быстрых переменных.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1 и 2. Более того, пусть множество Y в условии 1 совпадает с множеством Y в условии 2. Пусть u_ε $(\varepsilon > 0)$ – минимаксные решения задачи (2.2). Тогда для любых $(t, x, y) \in [0, \theta] \times R^n \times Y$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon(t, x, y) = u(t, x) \tag{2.6}$$

Функция $u : [0, \theta] \times R^n \mapsto R$, определенная этим предельным соотношением, является минимаксным решением задачи (2.1).

Докажем сначала вспомогательные утверждения.

Утверждение 1. Пусть выполнено условие 1. Положим

$$v_\varepsilon^0(t, x) = \min_{y \in Y} v_\varepsilon(t, x, y) \tag{2.7}$$

где $v_\varepsilon(t, x, y)$ – верхнее решение задачи (2.2). Пусть $B(t_*, x_*; \alpha)$ – замкнутый шар в $(0, \theta) \times R^n$, определенный согласно условию 1. Тогда для любых $(t_0, x_0) \in B(t_*, x_*; \alpha)$, $z_0 \geqslant v_\varepsilon^0(t_0, x_0)$, $s \in S$, $\tau \in (t_0 + \delta, \theta]$ существует точка $(x^*, z^*) \in G^\rho(t_0, \tau, x_0, z_0, s)$, такая, что $(\tau, x^*, z^*) \in \operatorname{epi} v_\varepsilon^0$.

Доказательство. Выберем $y_0 \in Y$ из условия

$$v_\varepsilon(t_0, x_0, y_0) = \min_{y \in Y} v_\varepsilon(t_0, x_0, y) = v_\varepsilon^0(t_0, x_0)$$

По предположению $z_0 \geqslant v_\varepsilon^0(t_0, x_0)$, поэтому $(t_0, x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{epi} v_\varepsilon$. Поскольку функция v_ε – верхнее решение задачи (2.2), то существует точка

$$(x^*, y^*, z^*) \in G_\varepsilon(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0, \psi_\varepsilon(s))$$

такая, что $z^* \geqslant v_\varepsilon(\tau, x^*, y^*)$. Из (2.5) следует

$$(x^*, y^*, z^*) \in G^\rho(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0) \times Y$$

Поскольку $y^* \in Y$, то $v_\varepsilon(\tau, x^*, y^*) \geqslant v_\varepsilon^0(\tau, x^*)$. Итак, получаем $z^* \geqslant v_\varepsilon^0(\tau, x^*)$.

Утверждение 2. Функция

$$v^h(t,x)=\liminf_{\substack{\varepsilon\downarrow 0\\ (t',x')\to(t,x)}} v_\varepsilon^0(t',x') \tag{2.8}$$

является верхним решением задачи (2.1).

Доказательство. Можно показать, что функция v^h принимает конечные значения. Эта функция полунепрерывна снизу и удовлетворяет условию $v^h(\theta, x) = \sigma(x)$ (см. доказательство аналогичных утверждений в [9, 11]).

Пусть $(S, M) \in C^{\uparrow}(H)$ – комплекс, фигурирующий в условии 1. Выберем произвольно $(t_0, x_0) \in [0, \theta) \times R^n$, $z_0 \geq v^h(t_0, x_0)$, $\tau \in (t_0, \theta]$, $s \in S$. Покажем, что существует $(x(\cdot), z(\cdot)) \in$ $\in \mathrm{Sol}(t_0, x_0, z_0, s)$, такая, что $(\tau, x(\tau), z(\tau)) \in \mathrm{epi} v^h$ или, что то же самое

$$\{\tau\}\times G(t_0,\tau,x_0,z_0,s)\cap \mathrm{epi} v^h \neq ... \tag{2.9}$$

где $G(\ldots)$ – область достижимости комплекса (S, M).

Пусть $(t_0, x_0) \in \mathrm{int}\, B(t_*, x_*; \alpha)$ ($\mathrm{int}\, B$ – внутренность шара B). Рассмотрим с начала случай $z_0 > v^h(t_0, x_0)$. В этом случае согласно (2.8) существует последовательность $\{\varepsilon_k, t_k, x_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что $z_0 \geq v_{\varepsilon_k}^0(t_k, x_k)$, $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$, $\lim_{k\to\infty}(t_k, x_k) = (t_0, x_0)$. Можно полагать, что $(t_k, x_k) \in$ $\in B(t_*, x_*; \alpha)$ и $(t_k + \delta(\varepsilon_k, t_*, x_*)) < \tau$ при всех $k = 1, 2,\ldots$ Используя утверждение 2, получаем, что существует последовательность $(x^k, z^k) \in G^{\rho^k}(t_k, \tau, x_k, z_0, s)$, такая, что $(\tau, x^k, z^k) \in \mathrm{epi} v_{\varepsilon_k}^0$. Здесь, согласно условию 1, $\rho^k = \rho(\varepsilon_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Без ограничения общности рассуждений можно принять, что существует предел $\lim_{k\to\infty}(x^k, z^k) = (x^*, z^*)$. Отметим, что

$(x^*, z^*) \in G(t_0, \tau, x_0, z_0, s)$.

Поскольку $z^k \geq v_{\varepsilon_k}^0(\tau, x^k)$, то по определению функции v^h получаем, что $z^* \geq v^h(\tau, x^*)$. Итак, соотношение (2.9) доказано в случае $z_0 > v^h(t_0, x_0)$.

В случае $z_0 \geq v^h(t_0, x_0)$ рассмотрим последовательность $z_k = z_0 + 1/k$. Поскольку $z_k >$ $> v^h(t_0, x_0)$, то из доказанного выше следует, что

$\{\tau\}\times G(t_0,\tau,x_0,z_k,s)\cap \mathrm{epi} v^h \neq ...$

Переходя к пределу, используя замкнутость множества $\mathrm{epi}\, v^h$ и полунепрерывность сверху отображения $z \mapsto G(t_0, \tau, x_0, z, s)$, опять получаем (2.9).

Пусть выполнено условие 2. Пусть $w_\varepsilon(\varepsilon > 0)$ – нижние решения задачи (2.2). Рассмотрим функции

$$w_\varepsilon^0(t,x)=\max_{y\in Y} w_\varepsilon(t,x,y), \quad w^h(t,x)=\limsup_{\substack{\varepsilon\downarrow 0\\ (t',x')\to(t,x)}} w_\varepsilon^0(t',x') \tag{2.10}$$

Можно показать, что функция w^h – нижнее решение задачи (2.1). Доказательство этого факта аналогично доказательству утверждений 1 и 2.

Пусть $u_\varepsilon(t, x, y)$ $(\varepsilon > 0)$ – минимаксные решения задачи (2.2). Положим в (2.7), (2.8) и (2.10) $v_\varepsilon = w_\varepsilon = u_\varepsilon$. Определим соответствующие функции v^h и w^h. Согласно построениям $w^h \geq v^h$.

С другой стороны, поскольку v^h – верхнее решение задачи (2.1), а w^h – нижнее решение этой задачи, то, как известно [9–11], справедливо неравенство $w^h \leq v^h$. Поэтому $v^h = w^h = u$, где u – минимаксное решение задачи (2.1) (напомним, что минимаксное решение можно определить как функцию, которая одновременно является верхним и нижним решением).

Итак, получаем

$$u(t,x)=\limsup_{\substack{\varepsilon\downarrow 0\\(t',x')\to(t,x)}}\max_{y\in Y}u_\varepsilon(t',x',y)=\liminf_{\substack{\varepsilon\downarrow 0\\(t',x')\to(t,x)}}\min_{y\in Y}u_\varepsilon(t',x',y) \tag{2.11}$$

Из этого соотношения следует (2.6). Теорема 1 доказана

3. *Пример* 1. Пусть невозмущенная ДИ и ее гамильтониан имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{x}=f(t,x,p,q),\quad p\in P,q\in Q\\ \gamma=\sigma(x(\vartheta))-\int_{t_0}^{\vartheta}g(t,x(t),p(t),q(t))dt\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$H(t,x,\zeta)=\min_{p\in P}\max_{q\in Q}[\langle f(t,x,p,q),\zeta\rangle-g(t,x,p,q)]=$$

$$=\max_{q\in Q}\min_{p\in P}[\langle f(t,x,p,q),\zeta\rangle-g(t,x,p,q)]$$

Рассмотрим также сингулярно-возмущенную ДИ

$$\begin{gathered}\dot{x}=f(t,x,y_1,y_2)\\ \dot{y}_1=(1/\varepsilon)[p'-y_1]=h_{\varepsilon1}(y_1,p'),\quad \dot{y}_2=(1/\varepsilon)[q'-y_2]=h_{\varepsilon2}(y_2,q'),\quad p'\in P,\ q'\in Q\\ \gamma=\sigma(x(\vartheta))-\int_{t_0}^{\vartheta}g(t,x(t),y_1(t),y_2(t))dt\end{gathered} \tag{3.2}$$

Гамильтониан в этой игре определен равенством

$$\begin{gathered}H_\varepsilon(t,x,y_1,y_2,\zeta,\zeta_1,\zeta_2)=\langle f(t,x,y_1,y_2),\zeta\rangle-g(t,x,y_1,y_2)+\\ +(1/\varepsilon)\left[\min_{p\in P}\langle\zeta_1,p\rangle-\langle\zeta_1,y_1\rangle\right]+(1/\varepsilon)\left[\max_{q\in Q}\langle\zeta_2,q\rangle-\langle\zeta_2,y_2\rangle\right]\end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь P и Q – выпуклые компакты, функции $f(t,x,p,q)$, $g(t,x,p,q)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по (x,p,q). Функция $\sigma(x)$ непрерывна, $t\in[0,\theta]$, $x\in R^n$.

В этом примере выполнено условие 1. Верхние характеристические комплексы здесь могут быть выбраны следующим образом:

$$S=Q,\ s=q,\ S_\varepsilon=Q,\ s'=q,\ \psi_\varepsilon(q)=q$$

$$M(t,x,q)=\mathrm{co}\{(f(t,x,p,q),\ g(t,x,p,q)):p\in P\}$$

$$M_\varepsilon(t,x,y_1,y_2,q')=\mathrm{co}\{(f(t,x,y_1,y_2),h_{\varepsilon1}(y_1,p'),h_{\varepsilon2}(y_2,q'),\ g(t,x,y_1,y_2)):p'\in P\}$$

При выборе нижних характеристических комплексов управления p и q меняются ролями. Компакт Y в условиях 1 и 2 может быть выбран равным $P\times Q=Y$.

Используя тот факт, что множества P и Q сильно инвариантны относительно подсистем быстрых переменных $y_1^\varepsilon(t)$ и $y_2^\varepsilon(t)$ соответственно, а также, используя оценки типа неравенства Гронуола [14] для нормы разности между медленной переменной $x^\varepsilon(t)$ и решением дифференциального включения

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),y_1^\varepsilon(t),q)\in\mathrm{co}\,f(t,x(t),P,q),\quad x(t_0)=x^\varepsilon(t_0)=x_0$$

получаем следующие значения параметров в условии 1

$$\delta(\varepsilon)=\varepsilon^\eta,\quad \eta<1$$

$$\rho(\varepsilon)=L\,\mathrm{diam}\,Qe^{L\theta}[(e^{L\delta(\varepsilon)}-1)+e^{-\delta(\varepsilon)/\varepsilon}]\to 0\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0$$

Здесь L – постоянная в условии Липшица для функций $f(t,x,p,q)$, $g(t,x,p,q)$ по переменным x,p,q.

Аналогичные оценки с заменой ролями q на p и Q на P получаются для проверки условия 2.

4. Достаточные условия 1, 2 могут быть модифицированы так, чтобы включить в рассмотрение новые классы задач (2.1), (2.2). Введем следующее определение.

Компакт $D \in [0, \theta] \times R^n$ называется *сильно инвариантным и согласованным с гамильтонианом* H, если D сильно инвариантен относительно дифференциального включения $\|\dot{x}\| \leq \lambda(x)$, где $\lambda(x)$ – величина из условия (1.4), определенная для гамильтониана H.

Модифицируем условия 1, 2 следующим образом.

Условие 3 (*Условие* 4). Существует комплекс $(S, M) \in C^{\uparrow}(H)$ (комплекс $(S, M) \in C^{\downarrow}(H)$), такой, что для любого компакта $D \subset [0, \theta] \times R^n$, сильно инвариантного и согласованного с гамильтонианом H, можно указать компакт $Y(D) \subset R^l$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$G^{\rho}(t_0, \tau, x_0, z_0, s) \times Y(D) \supseteq \bigcup_{y_0 \in Y(D)} G_{\varepsilon}(t_0, \tau, x_0, y_0, z_0, \psi_{\varepsilon}(s)) \tag{4.1}$$

где $G_{\varepsilon}(\ldots)$ – множество достижимости некоторого комплекса $(S_{\varepsilon}, M_{\varepsilon}) \in C^{\uparrow}(H_{\varepsilon})$ ($(S_{\varepsilon}, M_{\varepsilon}) \in C^{\downarrow}(H_{\varepsilon})$). Здесь предполагается, что для любого числа $\varepsilon > 0$ определены отображение $s \mapsto \psi_{\varepsilon}(s): S \mapsto S_{\varepsilon}$ и величины $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такие что $\lim \rho(\varepsilon) = 0$, $\lim \delta(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon \to 0$. Соотношение (2.5) должно выполняться при всех $\varepsilon > 0$, $s \in S$, $z_0 \in R$, $(t_0, x_0) \in D$, $\tau \in [t_0 + \delta(\varepsilon), \theta]$.

Используя это условие, по той же схеме, что и в теореме 1, можно доказать утверждение о сходимости минимаксных решений $v_{\varepsilon}(t, x, y)$ в возмущенной задаче (2.2) к минимаксному решению $u(t, x)$ в невозмущенной задаче (2.1) для любых $(t, x, y) \in D \times Y(D)$.

Пример 2. Рассмотрим сингулярно-возмущенную ДИ

$$\dot{x} = f(t,x,y), \quad \varepsilon\dot{y} = -y + \xi(t,x,\alpha,\beta), \quad \alpha \in A, \beta \in B \tag{4.2}$$

$$\gamma = \sigma(x(\vartheta)) - \int_{t_0}^{\vartheta} g(t,x(t),y(t))dt \tag{4.3}$$

Гамильтониан в этой игре определен равенством

$$H_{\varepsilon}(t,x,y,\zeta,\zeta_1) = \langle f(t,x,y),\zeta\rangle - g(t,x,y) -$$

$$-(1/\varepsilon)\langle y,\zeta_1\rangle + (1/\varepsilon)\psi(t,x,\zeta_1) \tag{4.4}$$

$$\psi(t,x,\zeta_1) = \min_{\alpha \in A} \max_{\beta \in B} \langle \zeta_1, \xi(t,x,\alpha,\beta)\rangle = \max_{\beta \in B} \min_{\alpha \in A} \langle \zeta_1, \xi(t,x,\alpha,\beta)\rangle \tag{4.5}$$

Невозмущенная ДИ и ее гамильтониан имеют вид

$$\dot{x} = f(t,x,\xi(t,x,\alpha,\beta)), \quad \alpha \in A, \ \beta \in B$$

$$\gamma = \sigma(x(\vartheta)) - \int_{t_0}^{\vartheta} g(t,x(t),\xi(t,x,\alpha,\beta))dt \tag{4.6}$$

$$H(t,x,\xi) = \min_{\alpha \in A} \max_{\xi \in Y(t,x,\alpha)} [\langle f(t,x,\xi),\zeta\rangle - g(t,x,\xi)] = \max_{\beta \in B} \min_{\xi \in Y(t,x,\beta)} [\langle f(t,x,\xi),\zeta\rangle - g(t,x,\xi)]$$

где

$$Y(t,x,\alpha) = \mathrm{co}\{\xi(t,x,\alpha,\beta)): \beta \in B\}$$

$$Y(t,x,\beta) = \mathrm{co}\{\xi(t,x,\alpha,\beta)): \alpha \in A\} \tag{4.7}$$

Предполагается, что функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $\xi(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\partial\xi(\cdot)/\partial t$, $\partial\xi(\cdot)/\partial x$ непрерывны, L_f – постоянная Липшица $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ по x, y, L_{ξ} – постоянная Липшица $\xi(\cdot)$ по x.

В этой задаче выполняются условия 3 и 4. Верхние характеристические комплексы могут быть выбраны следующим образом:

$$S = B,\ s = \beta,\ s_\varepsilon = B,\ s' = \beta,\ \psi_\varepsilon(\beta) = \beta$$

$$M(t, x, \beta) = \mathrm{co}\{(f(t, x, \xi),\ g(t, x, \xi)) : \xi \in Y(t, x, \beta)\}$$

$$M_\varepsilon(t, x, y, \beta) = \mathrm{co}\{(f(t, x, y), (1/\varepsilon)(-y + \xi), g(t, x, y)) : \xi \in Y(t, x, \beta)\}$$

При выборе нижних характеристических комплексов управления α и β меняются ролями.

Компакт $Y(D)$ определим следующим образом:

$$Y(D) = \mathrm{co}\{\xi(t, x, \alpha, \beta) : (t, x) \in D,\ \alpha \in A, \beta \in B\} + B_1$$

$$B_1 = \{y \in R^l : \| y \| \leqslant 1\}$$

Пусть $r^\varepsilon_\beta[t]$ – расстояние между быстрой переменной $y_\varepsilon(t)$ и множеством $Y(t, x^\varepsilon(t), \beta)$. Используя оценку скорости изменения функции $r^\varepsilon_\beta[t]$ вдоль движения системы (4.2), а также используя оценки типа неравенства Гронуола [14] для нормы разности между медленной переменной $x^\varepsilon(\tau)$ и решением $x(t)$ дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\{f(t,x(t),\xi) : \xi \in Y(t,x(t),\beta)\},\quad x(t_0) = x^\varepsilon(t_0) = x_0$$

получаем следующие значения параметров в условии 3:

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon^\eta,\quad \eta < 1$$

$$\rho(\varepsilon) = L_f \ \ \mathrm{diam}\, U(D)\ \ e^{L_f(1+L_\xi)\theta}[(e^{L_f(1+L_\xi)\delta(\varepsilon)} - 1) + e^{-\delta(\varepsilon)/\varepsilon}] \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Аналогичные значения получаются и при проверке условия 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16032) и Международного научного фонда (NME300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31. № 3. С. 575–586.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
3. *Красовский Н.Н., Решетов В.М.* Задачи сближения–уклонения в системах с малым параметром при производных // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 771–779.
4. *Первозванский А.А., Гайцгори В.Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука, 1979. 342 с.
5. *Barron E.N., Evans L.C., Jensen R.* Viscosity solutions of Isaacs' equations and differential games with Lipschitz controls // J. Different. Equat. 1984. V. 53. № 2. P. 213–233.
6. *Kokotovic P.V.* Applications of singular perturbation techniques to control problems // SIAM Review. 1984. V. 26. № 4. P. 501–550.
7. *Bensoussan A.* Perturbations Methods in Optimal Control. Wiley; Chichester, Cauter, 1988. 574 p.
8. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 214 с.
10. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamillton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. № 1. P. 1–42.
11. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston, Birkhäuser, 1995. 314 p.
12. *Рокафеллар Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
13. *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.* Qualitative Properties of Trajectories of Control Systems: A Survey // J. Dynamical and Control Systems. 1995. V. 1. № 1. P. 1–48.
14. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
9.X.1995