УДК 62-50

© 1996 г. Н.Н. Красовский, Н.Ю. Лукоянов

ЗАДАЧА КОНФЛИКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НАСЛЕДСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Для динамической системы, подверженной неконтролируемым помехам, рассматривается задача [1–8] об управлении, которое гарантирует оптимально показатель качества, заданный как функционал от реализации движения. Исследуется случай, когда надлежит использовать информацию об истории движения. Дается функциональная трактовка, которая сводит исходную задачу к построению выпуклых сверху оболочек для вспомогательных функций [7, 9–12] в многомерных пространствах. С другой стороны, развивается метод редукции к построениям в пространстве существенно меньшей размерности. Метод демонстрируется на материале задач с типичными показателями качества.

1. Постановка задачи. Пусть система описывается уравнением

$$dx/dt = A(t)x + f(t,u,v), \quad 0 \leq \overset{0}{t_*} \leq t \leq \vartheta \tag{1.1}$$

$$x \in R^n, u \in R^r, v \in R^s$$

Здесь x – фазовый вектор, u – вектор управления, v – вектор помехи; $\overset{0}{t_*}$, ϑ – заданные моменты времени; n, r и s – данные натуральные числа; $A(t)$ и $f(t, u, v)$ – кусочно-непрерывные по t матрица-функция и вектор-функция соответственно, $f(t, u, v)$ на интервалах непрерывности по t непрерывна по совокупности аргументов (точки разрыва по t функции $f(t, u, v)$ не зависят от u и v), в точках разрыва обе функции непрерывны справа; u и v стеснены ограничениями

$$u \in P, v \in Q \tag{1.2}$$

где P и Q – заданные компакты; выполнено условие седловой точки в маленькой игре ([1]; [6], с. 79), т. е. для любых $m \in R^n$ и $t \in [\overset{0}{t_*}, \vartheta]$ справедливо равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle m, f(t,u,v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle m, f(t,u,v) \rangle \tag{1.3}$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение.

Допустимы измеримые по Борелю реализации $u[\overset{0}{t_*})[\cdot]\vartheta) = \{u[t] \in P, \overset{0}{t_*} \leq t < \vartheta\}$ и $v[\overset{0}{t_*}[\cdot]\vartheta) = \{v[t] \in Q, \overset{0}{t_*} \leq t < \vartheta\}$. Эти реализации порождают согласно (1.1) абсолютно непрерывные движения $x[\overset{0}{t_*}[\cdot]\vartheta] = \{x[t], \overset{0}{t_*} \leq t \leq \vartheta\}$ (начальное состояние $x[\overset{0}{t_*}]$ задано).

Показатель γ качества движения $x[\overset{0}{t_*}[\cdot]\vartheta]$ возьмем в виде функционала $\gamma(x[\overset{0}{t_*}[\cdot]\vartheta])$, который имеет следующее строение. Выбраны натуральное число N, моменты времени $t^{[i]} \in [\overset{0}{t_*}, \vartheta]$, $t^{[i+1]} > t^{[i]}$, $i = 1,\ldots,N-1$, $t^{[N]} = \vartheta$, постоянные матрицы $D^{[i]}$

размерности $p^{[i]} \times n$, $1 \leqslant p^{[i]} \leqslant n$, $i = 1,\dots,N$. Набор $\{D^{[1]}x[t^{[1]}],\dots,D^{[N]}x[t^{[N]}]\}$ образует p-мерный вектор, $p = p^{[1]} + \dots + p^{[N]}$. Выбрана некоторая норма $\mu(\cdot)$ в пространстве R^p таких наборов. Полагаем

$$\gamma = \gamma(x[\overset{0}{t}_*[\cdot]\vartheta]) = \mu(\{D^{[1]}x[t^{[1]}],\dots,D^{[N]}x[t^{[N]}]\}) \tag{1.4}$$

Такой показатель качества может быть задан изначально или такой функционал вводится как аппроксимирующий для исходного показателя $\gamma_*(x[\overset{0}{t}_*[\cdot]\vartheta])$, который учитывает континуум значений $x[t]$.

Задача требует найти управление (или помеху), нацеленное минимизировать (нацеленную максимизировать) показатель γ (1.4).

Эти задачи объединяются согласно [7] в антагонистическую дифференциальную игру двух лиц (u – действие первого игрока, v – действие второго). Для всякой исходной истории $x[\overset{0}{t}_*[\cdot]t_*]$ ($\overset{0}{t}_* \leqslant t_* < \vartheta$) эта игра имеет цену $\rho^0(x[\overset{0}{t}_*[\cdot]t_*])$. Игра имеет седловую точку, которая складывается из оптимальных стратегий $\{u^0(x[\overset{0}{t}_*[\cdot]t], \varepsilon)$, $v^0(x[\overset{0}{t}_*[\cdot]t], \varepsilon)\}$. Здесь $x[\overset{0}{t}_*[\cdot]t] = \{x[\tau], \overset{0}{t}_* \leqslant \tau \leqslant t\}$ – история движения, реализовавшаяся к текущему моменту времени t; $\varepsilon > 0$ – некоторый параметр точности [6, 7]. Движения формируются в дискретной по времени схеме [6, 7]. Оптимальные стратегии $u^0(\cdot)$ и $v^0(\cdot)$ строятся как экстремальные ([7], с. 150) к функционалу $\rho^0(\cdot)$.

Таким образом, для формирования оптимального управления и контроптимальной помехи достаточно уметь эффективно вычислять цену игры для каждой текущей истории $x[\overset{0}{t}_*[\cdot]t]$, как исходной.

Во многих случаях для построения оптимальных воздействий достаточно учитывать лишь какую-то часть истории к текущему моменту времени t. Например, если функционал γ (1.4) позиционный [7,8], то достаточно опираться только на текущую позицию $\{t, x[t]\}$.

В рассматриваемой дифференциальной игре при условии (1.3) седловая точка достигается на чистых стратегиях. Если условие (1.3) не выполняется, то решение переносится в класс смешанных стратегий [7, 9]. При этом вспомогательные построения, которые составляют главное в этой статье, по существу не меняются.

2. Функциональная трактовка. Пусть к моменту $t \in [\overset{0}{t}_*, \vartheta]$ реализовалась история $x[\overset{0}{t}_*[\cdot]t]$. Назовем функциональной позицией, которая соответствует этой истории, набор $\{t, \hat{\mathbf{z}}[t]\}$, где

$$\hat{\mathbf{z}}[t] = (x[t], \hat{\mathbf{x}}[t]), \quad \hat{\mathbf{x}}[t] = \{\hat{x}^{[1]}[t],\dots,\hat{x}^{[N]}[t]\} \tag{2.1}$$

$$\hat{x}^{[i]}[t] = \begin{cases} D^{[i]}x[t^{[i]}], & t^{[i]} \leqslant t \\ D^{[i]}X[t^{[i]},t]x[t], & t < t^{[i]} \end{cases}$$

Здесь $X[\tau, t]$ – фундаментальная матрица решений для уравнения $dx/d\tau = A(\tau)x$.

Теперь показатель γ (1.4) можно записать в виде $\gamma = \mu(\hat{\mathbf{x}}[\vartheta])$.

Эволюция функциональной позиции $\{t, \hat{\mathbf{z}}[t]\} = \{t, (x[t], \hat{\mathbf{x}}[t])\}$ описывается уравнениями (1.1) и

$$d\hat{\mathbf{x}}[t]/dt = \hat{\mathbf{f}}(t, u, v), \ \overset{0}{t}_* \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{2.2}$$

где

$$\hat{\mathbf{f}}(t,u,v)=\{\hat{f}^{[1]}(t,u,v),\ldots,\hat{f}^{[N]}(t,u,v)\} \tag{2.3}$$

$$\hat{f}^{[i]}(t,u,v)=\begin{cases}D^{[i]}X[t^{[i]},t]f(t,u,v), & t<t^{[i]}\\ 0, & t^{[i]}\leqslant t\end{cases}$$

Условие седловой точки в маленькой игре для $\hat{\mathbf{f}}(t, u, v)$ будет выполняться в силу (1.3). Начальное состояние $\hat{\mathbf{z}}[\overset{0}{t}_*]=(x[\overset{0}{t}_*], \hat{\mathbf{x}}[\overset{0}{t}_*])$ для системы (1.1), (2.2) однозначно определяется начальным состоянием $x[\overset{0}{t}_*]$ системы (1.1).

Введем показатель качества $\hat{\gamma}$ для движений $\hat{\mathbf{z}}[\overset{0}{t}_*[\cdot]\vartheta]=\{\hat{\mathbf{z}}[t], \overset{0}{t}_*\leqslant t\leqslant\vartheta\}$ системы (1.1), (2.2)

$$\hat{\gamma}=\hat{\gamma}(\hat{\mathbf{z}}[\vartheta])=\mu(\hat{\mathbf{x}}[\vartheta]) \tag{2.4}$$

где $\mu(\cdot)$ – норма из (1.4). Значение показателя $\hat{\gamma}$ (2.4) совпадает со значением γ (1.4).

Рассмотрим дифференциальную игру (1.1), (2.2)–(2.4) в пространстве функциональных позиций $\{t, \hat{\mathbf{z}}[t]\}$ уже с терминальной платой $\hat{\gamma}$ (2.4). Эта игра имеет цену $\hat{\rho}^0(t_*, \hat{\mathbf{z}}[t_*])$ и седловую точку $\{\hat{u}^0(t,\hat{\mathbf{z}}[t],\varepsilon), \hat{v}^0(t,\hat{\mathbf{z}}[t],\varepsilon)\}$. Здесь $\hat{z}[t_*]$ означает исходное состояние системы (1.1), (2.2), $\hat{z}[t]$ – ее текущее состояние. Оптимальные стратегии $\hat{u}^0(t,\hat{\mathbf{z}}[t],\varepsilon)$ и $\hat{v}^0(t,\hat{\mathbf{z}}[t],\varepsilon)$ строятся как экстремальные ([6], с. 210, 220) к функции цены $\hat{\rho}^0(t, \hat{\mathbf{z}}[t])$.

Из (1.1)–(1.4) и (2.1)–(2.4) следует, что цена $\hat{\rho}^0(t, \hat{\mathbf{z}}[t])$ игры (1.1), (2.2)–(2.4) совпадает с ценой $\rho^0(x[\overset{0}{t}_*[\cdot]t])$ игры (1.1)–(1.4), а стратегии, оптимальные для игры (1.1), (2.2)–(2.4), при условии (2.1) будут определять воздействия u и v такие же, как и оптимальные стратегии для игры (1.1)–(1.4). Это означает, что по сути дела игры (1.1)–(1.4) и (1.1), (2.2)–(2.4) эквивалентны. Поэтому терминальные конструкции [6, 9–12] трансформируются естественным образом в конструкции для исходной игры (1.1)–(1.4). При этом следует только учесть, что в отличие от стандартной дифференциальной системы в случае (1.1), (2.2), (2.3) в качестве возможных состояний $\hat{\mathbf{z}}[t]$ выступают векторы не с любым набором компонент $x[t]$, $\hat{x}^{[i]}[t]$, $i=1,\ldots,N$, но лишь такие векторы, компоненты которых связаны соотношениями (2.1).

3. Вычисление цены игры. Пусть реализовалась история $x[\overset{0}{t}_*[\cdot]t_*]$, $\overset{0}{t}_*\leqslant t_*<\vartheta$ движения системы (1.1), которая согласно (2.1) однозначно определяет функциональную позицию $\{t_*, \hat{\mathbf{z}}[t_*]\}=\{t_*, (x[t_*], \hat{\mathbf{x}}[t_*])\}$.

Следуя методу стохастического программного синтеза ([6], с. 380]), введем программный экстремум. Для этого назначим разбиение

$$\Delta_k=\Delta_k\{\tau_j\}=\{\tau_j:\tau_1=t_*,\ \tau_{j+1}>\tau_j,\ \tau_{j+1}-\tau_j\leqslant\delta_k,\ j=1,\ldots,k,\ \tau_{k+1}=\vartheta\} \tag{3.1}$$

отрезка времени $[t_*, \vartheta]$, в которое включим все моменты времени $t^{[i]}\in[t_*, \vartheta]$, $i=1,\ldots,N$ из (1.4) и все точки разрыва функций $A(t)$ и $f(t, u, v)$. С разбиением Δ_k (3.1) свяжем независимые в совокупности случайные величины $\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$, распределенные равномерно на отрезке $0\leqslant\xi_j\leqslant 1$, $j=1,\ldots,k$. Набор $\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$ трактуется как элементарное событие ω из вероятностного пространства $\{\Omega, B_*, P\}$, где $\Omega=\{\omega\}$ – единичный куб в k-мерном пространстве, B_* – борелевская σ-алгебра для этого куба, $P=P(B)$ – лебегова мера на этом кубе, $B\in B_*$.

Пусть

$$\mathbf{l}(\omega)=\{l^{[i]}(\omega)\in R^{p^{[i]}},\ i=1,\dots N\},\ \ \omega\in\Omega$$

есть векторная p-мерная случайная величина, определенная на $\{\Omega, B_*, P\}$. Программный экстремум $e(\cdot)$ определяется равенством

$$e(x[t_*^0[\cdot]t_*],\Delta_k)=\hat{e}(t_*,\hat{\mathbf{z}}[t_*],\Delta_k)=$$

$$=\sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|\le 1}\left[\left\langle \mathbf{l}_*,\hat{\mathbf{x}}[t_*]\right\rangle+M\left\{\sum_{j=1}^{k}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\left\langle \mathbf{l}^*(\tau_j,\omega),\ \hat{\mathbf{f}}(\tau,u,v)\right\rangle d\tau\right\}\right] \tag{3.2}$$

где

$$\|\mathbf{l}(\cdot)\|=\underset{\omega\in\Omega}{\operatorname{vraimax}}\,\mu^*(\mathbf{l}(\omega)),\ \ \mathbf{l}_*=M\{\mathbf{l}(\omega)\}$$

$$\mathbf{l}^*(\tau_j,\omega)=\mathbf{l}^*(\tau_j,\xi_1,\dots,\xi_j)=M\{\mathbf{l}(\xi_1,\dots,\xi_k)|\xi_1,\dots,\xi_j\},\ \ j=1,\dots,k$$

Здесь $\mu^*(\cdot)$ – норма, сопряженная к норме $\mu(\cdot)$ из (1.4). Символ $M\{\cdot\}$ означает математическое ожидание, $M\{\cdot|\cdot\}$ – условное математическое ожидание.

Из [6] (с. 401) и из эквивалентности игр (1.1)–(1.4) и (1.1), (2.2)–(2.4) следует равенство

$$\lim_{k\to\infty,\delta_k\to 0}e(x[t_*^0[\cdot]t_*],\Delta_k)=\lim_{k\to\infty,\delta_k\to 0}\hat{e}(t_*,\hat{\mathbf{z}}[t_*],\Delta_k)=$$

$$=\hat{\rho}^0(t_*,\hat{\mathbf{z}}[t_*])=\rho^0(x[t_*^0[\cdot]t_*])$$

Согласно [10], программный экстремум $e(\cdot)$ (3.2) может быть вычислен рекуррентным построением выпуклых сверху оболочек $\varphi_j(\mathbf{l})$, для подходящих функций $\psi_j(\mathbf{l})$, $j=k,k-1,\dots,1$ уже от детерминированного аргумента $\mathbf{l}=\{l^{[i]}\in R^{p^{[i]}},\ i=1,\dots,N\}$. Для каждого j такую оболочку надлежит строить в области $\mathbf{L}=\{\mathbf{l}\colon \mu^*(\mathbf{l})\le 1\}$ пространства R^p, $p=p^{[1]}+\dots+p^{[N]}$. Таким образом, получаем, что

$$e(x[t_*^0[\cdot]t_*],\Delta_k)=\hat{e}(t_*,\hat{\mathbf{z}}[t_*],\Delta_k)=\max_{\mathbf{l}\in\mathbf{L}}\left[\left\langle \mathbf{l},\ \hat{\mathbf{x}}[t_*]\right\rangle+\varphi_1(\mathbf{l})\right]$$

Интерес представляют задачи, в которых число N, а следовательно, и число p большие. Поэтому, если для некоторой конкретной задачи не удается найти какой-либо эффективный способ конструирования упомянутых оболочек, вычисления становятся трудно реализуемыми даже в случае небольшой размерности n фазового вектора x.

Существенно, что вычисление $e(\cdot)$ (3.2) через выпуклые сверху оболочки $\varphi_j(\mathbf{l})$ для функций $\psi_j(\mathbf{l})$ в областях $\mathbf{L}$ большой размерности можно в достаточно общем случае свертывать к подобным построениям в пространствах значительно меньших размерностей. Это связано с тем, что равенство (3.2) можно трансформировать к равенству

$$e(x[t_*^0[\cdot]t_*],\Delta_k)=\sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|\le 1}\left[\sum_{i=1}^{h(t_*)}\left\langle l_*^{[i]},D^{[i]}x[t^{[i]}]\right\rangle+\right.$$

$$\left.+\left\langle m_*,X[\vartheta,t_*]x[t_*]\right\rangle+M\left\{\sum_{j=1}^{k}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\left\langle m(\tau_j,\omega),X[\vartheta,\tau]f(\tau,u,v)\right\rangle d\tau\right\}\right] \tag{3.3}$$

где

$$h(t) = \max i,\ t^{[i]} \leqslant t,\ i = 1,\dots,N$$

(если нет ни одного i ($i = 1,\dots,N$) такого, что $t^{[i]} \leqslant t$, то $h(t) = 0$)

$$l_*^{[i]} = M\{l^{[i]}(\omega)\},\ i = 1,\dots,h(t_*),\ m_* = M\left\{\sum_{i=h(t_*)+1}^{N} X^T[t^{[i]},\vartheta]D^{[i]^T}l^{[i]}(\omega)\right\} \tag{3.4}$$

$$m(\tau_j,\omega) = M\left\{\sum_{i=h(\tau_j)+1}^{N} X^T[t^{[i]},\vartheta]D^{[i]^T}l^{[i]}(\omega)|\xi_1,\dots,\xi_j\right\},\ j = 1,\dots,k$$

(верхний индекс T означает транспонирование; в (3.3) учтены равенства (2.1) и (2.3)). Это позволяет работать не с функциями $\psi_j(\mathbf{l})$ и $\varphi_j(\mathbf{l})$ от многомерного вектора $\mathbf{l} = \{l^{[1]},\dots,l^{[N]}\}$, а с подходящими функциями от вектора

$$m = \sum_{i=h(\tau_j)+1}^{N} X^T[t^{[i]},\vartheta]D^{[i]T}l^{[i]},\quad m \in R^n$$

и векторов $l^{[i]}$, $i = 1,\dots,h(\tau_j)$, которые составляют лишь часть компонент вектора $\mathbf{l}$. Более того, во многих типичных случаях достаточно работать лишь с функциями от вектора m. Правда, при этом возникает потребность в некоторых дополнительных параметрах. Это кратко сформулированное здесь общее утверждение будет пояснено ниже на конкретном материале.

4. Позиционные функционалы. Рассмотрим дифференциальные игры (1.1)–(1.4) со следующими показателями качества (1.4):

$$\gamma_{(1)} = \mu_{(1)}(\{D^{[1]}x[t^{[1]}],\dots,D^{[N]}x[t^{[N]}]\}) = \sum_{i=1}^{N}\mu^{[i]}(D^{[i]}x[t^{[i]}]) \tag{4.1}$$

$$\gamma_{(2)} = \mu_{(2)}(\{D^{[1]}x[t^{[1]}],\dots,D^{[N]}x[t^{[N]}]\}) = \max_{i=1,\dots,N}\{\mu^{[i]}(D^{[i]}x[t^{[i]}])\} \tag{4.2}$$

$$\gamma_{(3)} = \mu_{(3)}(\{D^{[1]}x[t^{[1]}],\dots,D^{[N]}x[t^{[N]}]\}) = \left(\sum_{i=1}^{N}(\mu^{[i]}(D^{[i]}x[t^{[i]}]))^2\right)^{1/2} \tag{4.3}$$

Здесь $\mu^{[i]}(\cdot)$ – некоторые нормы в $R^{p^{[i]}}$, $i = 1,\dots,N$.

Функционалы $\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \gamma_{(3)}$ являются позиционными [7, 8], поэтому достаточным информационным образом ([7], с. 20, 134) для оптимальных стратегий в играх (1.1)–(1.3) для (4.1), (4.2), (4.3) служит текущая позиция $\{t, x[t]\}$.

Редуцированные процедуры построения функций $\psi_j(\cdot)$ и их выпуклых оболочек $\varphi_j(\cdot)$ в подходящих областях G_j для случаев с функционалами $\gamma_{(1)}$ и $\gamma_{(2)}$ описаны подробно и обоснованы [7]. Дадим здесь построения для случая функционала $\gamma_{(3)}$, следуя общей схеме свертывания. Это свертывание, с одной стороны, учитывает отличия функционала $\gamma_{(3)}$ от $\gamma_{(1)}$ и $\gamma_{(2)}$, а с другой стороны – сохраняет общие черты соответствующих построений.

Итак, рассмотрим игру (1.1)–(1.4) с показателем $\gamma_{(3)}$ (4.3). Норма $\mu_{(3)}^*(\cdot)$, сопряженная к норме $\mu_{(3)}(\cdot)$, имеет вид

$$\mu_{(3)}^*(\mathbf{l}) = \left(\sum_{i=1}^{N}(\mu^{[i]*}(l^{[i]}))^2\right)^{1/2},\quad \mathbf{l} = \{l^{[i]} \in R^{p^{[i]}},\ i = 1,\dots,N\}$$

где $\mu^{[i]*}(\cdot)$, $i = 1,\dots,N$ – нормы, сопряженные к нормам $\mu^{[i]}(\cdot)$. Поэтому при вычислении верхней грани (3.3) случайные векторы $m(\tau_j, \omega)$ (3.4) стеснены ограничениями, которые зависят от скалярных величин

$$\nu^2(\tau_j,\omega)=1-\sum_{i=1}^{h(\tau_j)}(\mu^{[i]*}(l^{[i]}(\omega)))^2$$

Оказывается, что здесь, как и в [7] для $\gamma_{(1)}$ и $\gamma_{(2)}$, далее можно перейти от случайных величин $l^{[i]}(\omega)$, $m(\tau_j, \omega)$ и $\nu(\tau_j, \omega)$ к детерминированным $l^{[i]}$, m и ν. Обозначим

$$\Delta\psi_j(t_*,m)=\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle m,X[\vartheta,\tau]f(\tau,u,v)\rangle d\tau,\ \ m\in R^n,\ \ j=1,\ldots,k$$

Построим последовательность областей $G_j^{(3)}(t_*)$ в пространстве R^{n+1} пар (m, ν) и последовательность функций $\varphi_j^{(3)}(t_*, m, \nu)$, $(m, \nu) \in G_j^{(3)}(t_*)$, $j = k + 1, k,\ldots,1$. Строить будем рекуррентно по шагам разбиения $\Delta_k\{\tau_j\}$ (3.1).

При $j = k + 1$ полагаем

$$G_{k+1}^{(3)}(t_*)=\{(m,\nu):0\leqslant\nu\leqslant1,m=0\},\ \ \varphi_{k+1}^{(3)}(t_*,m,\nu)=0,\ \ (m,\nu)\in G_{k+1}^{(3)}(t_*)$$

Далее по индукции. Пусть для $j + 1$ уже построены область $G_{j+1}^{(3)}(t_*)$ и функция $\varphi_{j+1}^{(3)}(t_*,m,\nu)$, $(m, \nu) \in G_{j+1}^{(3)}(t_*)$. Построим сначала область $G_j^{(3)}(t_*)$ и вспомогательную функцию $\varphi_{j+1}^{(3)\prime}(t_*,m,\nu)$, $(m, \nu) \in G_j^{(3)}(t_*)$. При переходе от τ_{j+1} к τ_j возможны два случая. В первом случае имеем $h(\tau_j) = h(\tau_{j+1})$, т. е. момент времени τ_{j+1} не совпадает ни с одним из моментов $t^{[i]}$. Тогда определяем

$$G_j^{(3)}(t_*)=G_{j+1}^{(3)}(t_*),\ \ \varphi_{j+1}^{(3)\prime}(t_*,m,\nu)=\varphi_{j+1}^{(3)}(t_*,m,\nu)$$

Во втором случае имеем $h(\tau_j) = h(\tau_{j+1}) - 1$, т. е. $\tau_{j+1} = t^{[h]}$, $h = h(\tau_j) + 1$, тогда определяем

$$\begin{aligned}&G_j^{(3)}(t_*)=\{(m,\nu):0\leqslant\nu\leqslant1,\ \ m=m_*+X^T[t^{[h]},\vartheta]D^{[h]T}l,\ \ l\in R^{p^{[h]}},\\&(\mu^{[h]*}(l))^2\leqslant\nu^2-\nu_*^2,\nu_*\leqslant\nu,(m_*,\nu_*)\in G_{j+1}^{(3)}(t_*)\}\end{aligned}\qquad(4.4)$$

$$\varphi_{j+1}^{(3)\prime}(t_*,m,\nu)=\max_{m_*,\nu_*}\varphi_{j+1}^{(3)}(t_*,m_*,\nu_*),\ \ (m,\nu)\in G_j^{(3)}(t_*)$$

где максимум, определяющий вспомогательную функцию $\varphi_{j+1}^{(3)\prime}(\cdot)$, вычисляется по всем возможным парам (m_*, ν_*), которые согласно (4.4) отвечают заданной паре $(m, \nu) \in G_j^{(3)}(t_*)$.

Далее полагаем

$$\psi_j^{(3)}(t_*,m,\nu)=\Delta\psi_j(t_*,m)+\varphi_{j+1}^{(3)\prime}(t_*,m,\nu),\ \ (m,\nu)\in G_j^{(3)}(t_*)$$

$$\varphi_j^{(3)}(t_*,m,\nu)=\{\psi_j^{(3)}(t_*,\cdot,\nu)\}_G^*,\ \ G=G_{j,\nu}^{(3)}(t_*),\ \ 0\leqslant\nu\leqslant1$$

где $G_{j,\nu}^{(3)}(t_*)$ – сечение области $G_j^{(3)}(t_*)$ гиперплоскостью $\nu = \text{const}$.

Здесь символ $\{\psi(t_*, \cdot, \nu)\}_G^*$ означает выпуклую сверху оболочку функции $\psi(t_*, m, \nu)$, конструируемую овыпуклением по m в области G, при фиксированных значениях остальных аргументов. Такая оболочка, по ее определению, является минимальной вогнутой по m функцией, которая мажорирует функцию $\psi(t_*, m, \nu)$, $m \in G$.

Продолжая индукцию до $j = 1$, построим область $G_1^{(3)}(t_*)$ и функцию $\varphi_1^{(3)}(t_*, m, \nu)$, $(m, \nu) \in G_1^{(3)}(t_*)$. Тогда величина

$$e_{(3)}(x[t_*^0[\cdot]t_*], \Delta_k) = \max_{(m,\nu)\in G_1^{(3)}(t_*)}\left[\left((1-\nu^2)\sum_{i=1}^{h(t_*)}(\mu^{[i]}(D^{[i]}x[t^{[i]}]))^2\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left\langle m, X[\vartheta, t_*]x[t_*]\right\rangle + \varphi_1^{(3)}(t_*, m, \nu)\right]$$

будет обладать свойствами u- и v-стабильности [6, 7]. Доказательство этого утверждения здесь не приводим. Оно подобно доказательству из [7] для игр с показателями $\gamma_{(1)}$ и $\gamma_{(2)}$. Кроме того, схема доказательства этих свойств приводится ниже в разд. 5 для более сложного случая.

Из этих свойств, как и в [7], выводится, что величина $e_{(3)}(\cdot)$ аппроксимирует цену $\rho_0^{(3)}(x[t_*^0[\cdot]t_*])$ игры (1.1)–(1.3), (4.3). Таким образом, задача сводится к построению выпуклых оболочек $\varphi_j^{(3)}(t_*, \cdot, \nu)$ функций $\psi_j^{(3)}(t_*, \cdot, \nu)$ в областях $G_{j,\nu}^{(3)}(t_*)$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, размерность которых совпадает с размерностью фазового вектора x системы (1.1) и не зависит от количества N точек $t^{[i]}$. Подчеркнем, что здесь, как и во многих других случаях, в том числе в играх с показателями $\gamma_{(1)}$ и $\gamma_{(2)}$, выпуклые сверху оболочки конструируются только по переменной m при фиксированных $\nu \in [0, 1]$. Это объясняется тем, что области $G_j^{(3)}(t_*)$, $j = k + 1,\ldots,1$ обладают свойством однородности по (m, ν), т. е. если

$$(m, \nu) \in G_j^{(3)}(t_*), \text{ то } (\eta m, \eta\nu) \in G_j^{(3)}(t_*), \ \eta \geqslant 0, \eta\nu \leqslant 1 \tag{4.5}$$

Отсюда выводится, что функции $\varphi_j^{(3)}(t_*, m, \nu)$, $j = k + 1,\ldots,1$ будут однородными со степенью единица по совокупности (m, ν). Поэтому конструирование выпуклых сверху оболочек функций $\psi_j^{(3)}(t_*, m, \nu)$ в областях $G_j^{(3)}(t_*)$ по паре (m, ν), приводит к тем же самым функциям $\varphi_j^{(3)}(t_*, m, \nu)$, которые строились выше овыпуклением только по m в сечениях $G_{j,\nu}^{(3)}(t_*)$ при фиксированных $\nu \in [0, 1]$.

Итак, дано построение функции $\varphi_1^{(3)}(\cdot)$, которая согласно предыдущему определяет цену игры (1.1)–(1.4) и оптимальные стратегии для типичного показателя (4.3).

Далее на конкретном материале покажем, что, вообще говоря, при построении функций $\varphi_j(\cdot)$ надлежит применять операцию овыпукления уже по всем аргументам из пространства, которое пополняет пространство R^n векторов m добавлением вспомогательных параметров (таких, как параметр ν). Этот важный факт и составляет главное в настоящей статье.

5. Непозиционный функционал. Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad 0 \leqslant t_*^0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{5.1}$$

$$x \in R^n, \quad u \in P \subset R^r, \quad v \in Q \subset R^s$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ – кусочно-непрерывные матрицы-функции; как и выше P и Q – компакты; t_*^0, ϑ – фиксированы.

Заданы два разбиения отрезка времени $[t_*^0, \vartheta]$:

$$\Delta_{N_q}\{t_q^{[i_q]}\} = \{t_q^{[i_q]} : t_q^{[1]} \geqslant t_*^0,\ t_q^{[i_q+1]} > t_q^{[i_q]},\ i_q = 1,\ldots,N_q - 1\} \tag{5.2}$$

$$q = 1, 2$$

$$t_1^{[i_1]} \neq t_2^{[i_2]},\ i_1 = 1,\ldots,N_1,\ i_2 = 1,\ldots,N_2$$

$$\max\{t_1^{[N_1]}, t_2^{[N_2]}\} = \vartheta$$

Показатель качества движения системы (5.1) имеет вид

$$\gamma_{(4)} = \gamma_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]\vartheta]) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \mu_1^{[i_1]}(D_1^{[i_1]} x[t_1^{[i_1]}]) + \max_{i_2=1,\ldots,N_2} \{\mu_2^{[i_2]}(D_2^{[i_2]} x[t_2^{[i_2]}])\} \tag{5.3}$$

где $D_q^{[i_q]}$ – известные постоянные матрицы размерности $p_q^{[i_q]} \times n$, $1 \leqslant p_q^{[i_q]} \leqslant n$; $\mu_q^{[i_q]}(\cdot)$ – некоторые нормы, $i_q = 1,\ldots,N_q$, $q = 1, 2$.

Линейность по u и v в (5.1) не является существенной. Прямое обобщение на случай нелинейной зависимости в (5.1) от u и v получается, например, по схеме из [6, 7].

Функционал $\gamma_{(4)}$ (5.3) есть аддитивная комбинация функционалов $\gamma_{(1)}$ (4.1) и $\gamma_{(2)}$ (4.2), но в отличии от $\gamma_{(1)}$, $\gamma_{(2)}$ и $\gamma_{(3)}$ (4.3) уже не является позиционным. Для формирования оптимальных стратегий в игре с показателем $\gamma_{(4)}$ нужно уже существенно учитывать информацию не только о текущей позиции $\{t, x[t]\}$, но и об истории движения $x[t_*^0[\cdot]t]$. Случай игры (1.1)–(1.4) с показателем (5.3) и доставляет тот конкретный материал, на котором удобно показать, что в общем случае при вычислении программного экстремума $e(\cdot)$ (3.2), (3.3) надлежит при построении функций $\varphi_j(\cdot)$ овыпуклять по совокупности всех аргументов, которая складывается из m и дополнительных параметров, и которая определяет соответствующие области G_j (в данном случае – по парам (m, ν)). Возникающие здесь области $G_j^{(4)}(t_*)$ уже не обладают свойством однородности (4.5).

Процедура вычисления величины $e(\cdot)$ (3.2), (3.3) в данном случае такова (в [7] она лишь намечена скороговоркой).

Пусть реализовалась история $x[t_*^0[\cdot]t_*]$ движения системы (5.1), $t_*^0 \leqslant t_* < \vartheta$ и выбрано разбиение

$$\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\} = \{\tau_j : \tau_1 = t_*, \tau_{j+1} > \tau_j, j = 1,\ldots,k, \tau_{k+1} = \vartheta\} \tag{5.4}$$

отрезка $[t_*, \vartheta]$, в которое включены все точки разрыва матриц-функций $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и все точки $t_q^{[i_q]} \in [t_*, \vartheta]$, $i_q = 1,\ldots,N_q$, $q = 1, 2$ из (5.2).

Функция $\Delta\psi_j(\cdot)$ здесь определяется равенством

$$\Delta\psi_j(t_*, m) = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle m,\ X[\vartheta, \tau](B(\tau)u + C(\tau)v\rangle d\tau \tag{5.5}$$

$$m \in R^n, j = 1,\ldots,k$$

Построим функции $\varphi_j^{(4)}(t_*, m, \nu)$, $(m, \nu) \in G_j^{(4)}(t_*)$, $m \in R^n$, $\nu \in R$, $j = k + 1, k,\ldots,1$. При $j = k + 1$ полагаем

$$G_{k+1}^{(4)}(t_*) = \{(m, \nu):\ m = 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant 1\},\ \ \varphi_{k+1}^{(4)}(t_*, m, \nu) = 0,\ (m, \nu) \in G_{k+1}^{(4)}(t_*) \tag{5.6}$$

Пусть для $1 < j + 1 \leqslant k + 1$ уже построены область $G_{j+1}^{(4)}(t_*)$ и функция $\varphi_{j+1}^{(4)}(t_*, m, \nu)$.

Обозначим

$$h_q(\tau) = \max i_q,\ t_q^{[i_q]} \leqslant \tau,\ i_q = 1,\dots,N_q \tag{5.7}$$

(если нет ни одного i_q такого, что $t_q^{[i_q]} \leqslant \tau$, то $h_q(\tau) = 0,\ q = 1,2$).

Разбиение Δ_k (5.4) выбрано так, что для любого $j = 1,\dots,k$ может случиться лишь один из трех вариантов:

1) $h_1(\tau_{j+1}) = h_1(\tau_j),\ h_2(\tau_{j+1}) = h_2(\tau_j)$, т. е. момент времени τ_{j+1} не совпадает ни с одной из точек разбиений $\Delta_{N_q}\{t_q^{[i_q]}\}$ (5.2), $q = 1, 2$;

2) $h_1(\tau_{j+1}) = h_1(\tau_j)+1,\ h_2(\tau_{j+1}) = h_2(\tau_j)$, т. е. момент τ_{j+1} совпадает с моментом $t_1^{[h_1(\tau_{j+1})]}$ из разбиения $\Delta_{N_1}\{t_1^{[i_1]}\}$;

3) $h_1(\tau_{j+1}) = h_1(\tau_j),\ h_2(\tau_{j+1}) = h_2(\tau_j)+1$, т. е. момент τ_{j+1} совпадает с $t_2^{[h_2(\tau_{j+1})]}$ из $\Delta_{N_2}\{t_2^{[i_2]}\}$.

Построим сначала область $G_j^{(4)}(t_*)$ и вспомогательную функцию $\varphi_{j+1}^{(4)'}(t_*, m, \nu),\ (m,\nu) \in G_j^{(4)}(t_*)$.

В случае 1) полагаем

$$G_j^{(4)}(t_*) = G_{j+1}^{(4)}(t_*),\ \varphi_{j+1'}^{(4)}(t_*, m, \nu) = \varphi_{j+1}^{(4)}(t_*, m, \nu),\ (m,\nu) \in G_j^{(4)}(t_*) \tag{5.8}$$

В случае 2) определяем

$$G_j^{(4)}(t_*) = \{(m,\nu)\colon\ m = m_* + X^T[t_1^{[h]}, \vartheta]D_1^{[h]T} l,\ l \in R^{p_1^{[h]}},$$

$$\mu_1^{[h]*}(l) \leqslant 1,\ h = h_1(\tau_j)+1,\ (m_*, \nu) \in G_{j+1}^{(4)}(t_*)\} \tag{5.9}$$

Здесь $\mu_q^{[i_q]*}(\cdot)$ – нормы, сопряженные к $\mu_q^{[i_q]}(\cdot)$ из (5.3), $i_q = 1,\dots,N_q$, $q = 1, 2$. Функцию $\varphi_{j+1}^{(4)'}(\cdot)$ в этом случае строим следующим образом:

$$\varphi_{j+1}^{(4)'}(t_*, m, \nu) = \max_{m_*} \varphi_{j+1}^{(4)}(t_*, m_*, \nu),\ (m,\nu) \in G_j^{(4)}(t_*) \tag{5.10}$$

В (5.10) максимум вычисляется по всем векторам m_*, которые в согласии с (5.9) отвечают заданной паре $(m, \nu) \in G_j^{(4)}(t_*)$.

В случае 3) определяем

$$G_j^{(4)}(t_*) = \{(m,\nu)\colon\ 0 \leqslant \nu \leqslant 1,\ m = m_* + X^T[t_2^{[h]}, \vartheta]D_2^{[h]T} l,\ l \in R^{p_2^{[h]}},$$

$$\mu_2^{[h]*}(l) \leqslant \nu - \nu_*,\ \nu_* \leqslant \nu,\ h = h_2(\tau_j)+1,\ (m_*, \nu_*) \in G_{j+1}^{(4)}(t_*)\} \tag{5.11}$$

$$\varphi_{j+1}^{(4)'}(t_*, m, \nu) = \max_{m_*, \nu_*} \varphi_{j+1}^{(4)}(t_*, m_*, \nu_*),\ (m,\nu) \in G_j^{(4)}(t_*) \tag{5.12}$$

В (5.12) максимум вычисляется по всем парам (m_*, ν_*), которые согласно (5.11) отвечают заданной паре $(m, \nu) \in G_j^{(4)}(t_*)$.

Теперь полагаем

$$\varphi_j^{(4)}(t_*, m, \nu) = \{\psi_j^{(4)}(t_*, \cdot, \cdot)\}_G^*,\quad G = G_j^{(4)}(t_*) \tag{5.13}$$

$$\psi_j^{(4)}(t_*, m, \nu) = \Delta\psi_j(t_*, m) + \varphi_{j+1}^{(4)'}(t_*, m, \nu),\ (m,\nu) \in G_j^{(4)}(t_*)$$

В (5.13) символ $\{\psi(t_*,\cdot,\cdot)\}_G^*$ означает выпуклую сверху оболочку функции $\psi(t_*, m, \nu)$, которая конструируется овыпуклением уже по совокупному аргументу (m, ν) в области G.

Продолжая индукцию до $j = 1$, получим область $G_1^{(4)}(t_*)$ и функцию $\varphi_1^{(4)}(t_*, m, \nu)$, $(m, \nu) \in G_1^{(4)}(t_*)$.

Области $G_j^{(4)}(t_*)$ будут выпуклыми компактами в R^{n+1}, а функции $\varphi_j^{(4)}(t_*, m, \nu)$ и $\varphi_{j+1}^{(4)\prime}(t_*, m, \nu)$ будут вогнутыми, ограниченными и по крайней мере полунепрерывными сверху ([13], с. 67) на $G_j^{(4)}(t_*), j = 1,\dots,k$.

Обозначим

$$\sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*]) = \sum_{i_1=1}^{h_1(t_*)} \mu_1^{[i_1]}(D_1^{[i_1]}x[t_1^{[i_1]}]) \tag{5.14}$$

$$\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*]) = \max_{i_2=1,\dots,h_2(t_*)} \{\mu_2^{[i_2]}(D_2^{[i_2]}x[t_2^{[i_2]}])\}$$

Введем величину

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*],\Delta_k) = \sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*]) + \max_{(m,\nu)\in G_1^{(4)}(t_*)}[\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu) +$$

$$+\langle m,\ X[\vartheta,t_*]x[t_*]\rangle + \varphi_1^{(4)}(t_*,m,\nu)] \tag{5.15}$$

Установим важные свойства u- и v-стабильности ([6], с. 208, 216; [7]) величины $e_{(4)}(\cdot)$ (5.15).

Теорема 5.1. (u-стабильность $e_{(4)}(\cdot)$). Пусть реализовалась история $x[t_*^0[\cdot]t_*]$, $t_*^0 \leqslant t_* < \vartheta$ движения системы (5.1) и выбрано разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ (5.4) отрезка времени $[t_*, \vartheta]$. Тогда для всякой допустимой реализации $v_*[t_*[\cdot]t^*) = \{v_*[\tau] \in Q, t_* \leqslant \tau < t^*\}$, где $t^* = \tau_2 \in \Delta_k\{\tau_j\}$, найдется такая допустимая реализация $u[t_*[\cdot]t^*) = \{u[\tau] \in P, t_* \leqslant \tau < t^*\}$, что под действием этих управлений реализуется история $x[t_*^0[\cdot]t^*]$, для которой справедливо неравенство

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t^*],\Delta_{k^*}^*) - e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*],\Delta_k) \leqslant 0$$

Здесь $\Delta_{k^*}^*\{\tau_j^*\}$ – разбиение отрезка $[t^*, \vartheta]$, $\tau_j^* = \tau_{j+1} \in \Delta_k$, $j = 1,\dots, k^*$, $k^* = k - 1$, $\tau_{k^*+1}^* = \vartheta$, порожденное разбиением Δ_k.

Доказательство. В силу построений (5.5)–(5.13) и учитывая связь разбиений $\Delta_k\{\tau_j\}$ и $\Delta_{k^*}^*\{\tau_j^*\}$ получаем тождества

$$G_1^{(4)}(t^*) \equiv G_2^{(4)}(t_*), \quad \varphi_1^{(4)}(t^*,m,\nu) \equiv \varphi_2^{(4)}(t_*,m,\nu) \tag{5.16}$$

Далее на возможных реализациях $x[t_*^0[\cdot]t^*]$ наряду с величиной $e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t^*],\Delta_{k^*}^*)$ (5.15) рассмотрим вспомогательную величину

$$e_{(4)}'(x[t_*^0[\cdot]t_*],t^*,x[t^*],\Delta_{k^*}^*) = \sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*]) + \max_{(m,\nu)\in G_1^{(4)}(t_*)}[\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu) +$$

$$+\ \langle m, X[\vartheta,t^*]x[t^*]\rangle + \varphi_2^{(4)\prime}(t_*,m,\nu)] \tag{5.17}$$

Справедливо равенство

$$e'_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*],t^*,x[t^*],\Delta^*_{k^*})=e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t^*],\Delta^*_{k^*}) \tag{5.18}$$

какая бы история $x[t_*^0[\cdot]t^*]$ ни реализовалась.

Действительно, возможны три случая.

В первом случае имеем $h_1(t^*)=h_1(t_*)$, $h_2(t^*)=h_2(t_*)$. Тогда из (5.7), (5.14) вытекает, что $\sigma(x[t_*^0[\cdot]t^*])=\sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*])$, $\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t^*])=\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])$. Стало быть, сопоставляя (5.15)–(5.17), при учете (5.8) ($j=1$), получаем нужное равенство (5.18).

Во втором случае имеем $h_1(t^*)=h_1(t_*)+1$, $h_2(t^*)=h_2(t_*)$. Теперь в силу (5.7), (5.14) выполняются равенства

$$t^*=t_1^{[h]},\ \sigma(x[t_*^0[\cdot]t^*])=\sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*])+\mu_1^{[h]}(D_1^{[h]}x[t^*])$$

$$\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t^*])=\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*]),\quad h=h_1(t^*)$$

Тогда в согласии с (5.15), (5.16) существует пара $(m_*^0,\nu^0)\in G_2^{(4)}(t_*)$, такая, что справедливо равенство

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t^*],\Delta^*_{k^*})=\sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*])+\mu_1^{[h]}(D_1^{[h]}x[t^*])+$$

$$+\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu^0)+\langle m_*^0,\ X[\vartheta,t^*]x[t^*]\rangle+\varphi_2^{(4)}(t_*,m_*^0,\nu^0),\quad h=h_1(t^*) \tag{5.19}$$

Далее определим векторы $m^0\in R^n$ и $l^0\in R^{p_1^{[h]}}$ из условий

$$\langle l^0,\ D_1^{[h]}x[t^*]\rangle=\max_{\mu_1^{[h]*}(l)\le 1}\langle l,\ D_1^{[h]}x[t^*]\rangle=\mu_1^{[h]}(D_1^{[h]}x[t^*])$$

$$m^0=m_*^0+X^T[t^*,\vartheta]D_1^{[h]T}l^0 \tag{5.20}$$

Пара $(m^0,\nu^0)\in G_1^{(4)}(t_*)$ (см. (5.9)). Из (5.10) ($j=1$) и (5.20) вытекает, что $\varphi_2^{(4)\prime}(t_*,m^0,\nu^0)\ge\varphi_2^{(4)}(t_*,m_*^0,\nu^0)$. Следовательно, в согласии с (5.17) при учете (5.19) и (5.20) имеем неравенство

$$e'_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*],t^*,x[t^*],\Delta^*_{k^*})\ge\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu^0)+\mu_1^{[h]}(D_1^{[h]}x[t^*])+$$

$$+\sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*])+\langle m_*^0,X[\vartheta,t^*]x[t^*]\rangle+\varphi_2^{(4)}(t_*,m_*^0,\nu^0)=e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t^*],\Delta^*_{k^*}) \tag{5.21}$$

С другой стороны, в рассматриваемом случае, по построению области $G_1^{(4)}(t_*)$ (5.9) и функции $\varphi_2^{(4)\prime}(t_*,m,\nu)$ (5.10), для каждой пары $(m,\nu)\in G_1^{(4)}(t_*)$ найдутся такие векторы $m_*(m,\nu)\in R^n$ и $l(m,\nu)\in R^{p_1^{[h]}}$, $h=h_1(t^*)$, что будут выполняться соотношения

$$(m_*(m,\nu),\nu)\in G_2^{(4)}(t_*),\quad \mu_1^{[h]*}(l(m,\nu))\le 1,\quad m_*(m,\nu)+X^T[t^*,\vartheta]D_1^{[h]T}l(m,\nu)=m$$

$$\varphi_2^{(4)\prime}(t_*,m,\nu)=\varphi_2^{(4)}(t_*,m_*(m,\nu),\nu)$$

В свою очередь в соответствии с (5.17) найдется пара $(m_0,\nu_0)\in G_1^{(4)}(t_*)$, для которой справедливо равенство

$$e'_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*],t^*,x[t^*],\Delta^*_{k^*})=\sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*])+\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu_0)+$$

$$+\langle m_0,\ X[\vartheta,t^*]x[t^*]\rangle+\varphi_2^{(4)\prime}(t_*,m_0,\nu_0) \tag{5.22}$$

При этом для векторов $m_{*0} = m_*(m_0, \nu_0)$ и $l_0 = l(m_0, \nu_0)$, соответствующих этой паре (m_0, ν_0), будут справедливы соотношения

$$(m_{*0}, \nu_0) \in G_2^{(4)}(t_*), \quad \mu_1^{[h]*}(l_0) \leqslant 1, \quad m_{*0} + X^T[t^*, \vartheta] D_1^{[h]T} l_0 = m_0 \tag{5.23}$$

$$\varphi_2^{(4)\prime}(t_*, m_0, \nu_0) = \varphi_2^{(4)}(t_*, m_{*0}, \nu_0)$$

Теперь из (5.15), учитывая (5.16), (5.22) и (5.23), выводим неравенство

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t^*], \Delta_{k^*}^*) \geqslant \sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*]) + \varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu_0) + \langle l_0, D_1^{[h]} x[t^*]\rangle +$$
$$+ \langle m_{*0}, X[\vartheta, t^*] x[t^*]\rangle + \varphi_2^{(4)\prime}(t_*, m_0, \nu_0) = e'_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*], t^*, x[t^*], \Delta_{k^*}^*) \tag{5.24}$$

Неравенства (5.21) и (5.24) доказывают равенство (5.18) во втором случае.

В третьем случае имеем $h_1(t^*) = h_1(t_*)$, $h_2(t^*) = h_2(t_*) + 1$. В этом случае момент t^* совпадает с моментом $t_2^{[h]}$ из разбиения $\Delta_{N_2}\{t_2^{[i_2]}\}$, $h = h_2(t^*)$. Согласно (5.15), при учете (5.14), (5.16), получаем, что существует пара $(m_*^0, \nu_*^0) \in G_2^{(4)}(t_*)$, такая, что справедливо равенство

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t^*], \Delta_{k^*}^*) = \sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*]) + \langle m_*^0, X[\vartheta, t^*] x[t^*]\rangle +$$
$$+ \varphi_2^{(4)}(t_*, m_*^0, \nu_*^0) + \max\{\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*]), \mu_2^{[h]}(D_2^{[h]} x[t^*])\}(1-\nu_*^0) \tag{5.25}$$

Определим пару $(m^0, \nu^0) \in G_1^{(4)}(t_*)$ и вектор $l^0 \in R^{p_2^{[h]}}$ из условий

$$\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu^0) + \mu_2^{[h]}(D_2^{[h]} x[t^*])(\nu^0 - \nu_*^0) =$$
$$= \max_{\nu_*^0 \leqslant \nu \leqslant 1} [\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu) + \mu_2^{[h]}(D_2^{[h]} x[t^*])(\nu - \nu_*^0)] =$$
$$= \max\{\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*]), \ \mu_2^{[h]}(D_2^{[h]} x[t^*])\}(1-\nu_*^0) \tag{5.26}$$
$$\langle l^0, D_2^{[h]} x[t^*]\rangle = \max_{\mu_2^{[h]*}(l) \leqslant \nu^0 - \nu_*^0} \langle l, D_2^{[h]} x[t^*]\rangle = \mu_2^{[h]}(D_2^{[h]} x[t^*])(\nu^0 - \nu_*^0)$$

$$m^0 = m_*^0 + X^T[t^*, \vartheta] D_2^{[h]T} l^0$$

Тогда, из (5.17), учитывая (5.12), (5.25) и (5.26), выводим неравенство

$$e'_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*], t^*, x[t^*], \Delta_{k^*}^*) \geqslant \varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu^0) + \mu_2^{[h]}(D_2^{[h]} x[t^*])(\nu^0 - \nu_*^0) +$$
$$+ \sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*]) + \langle m_*^0, X[\vartheta, t^*] x[t^*]\rangle + \varphi_2^{(4)}(t_*, m_*^0, \nu_*^0) = e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t^*]), \Delta_{k^*}^*) \tag{5.27}$$

Кроме того, в третьем случае в силу (5.17) найдется такая пара $(m_0, \nu_0) \in G_1^{(4)}(t_*)$, что будет справедливо равенство

$$e'_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*], t^*, x[t^*], \Delta_{k^*}^*) = \sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*]) + \varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu_0) +$$
$$+ \langle m_0, X[\vartheta, t^*] x[t^*]\rangle + \varphi_2^{(4)\prime}(t_*, m_0, \nu_0) \tag{5.28}$$

И при этом, по построению области $G_1^{(4)}(t_*)$ (5.11) и функции $\varphi_2^{(4)\prime}(t_*, m, \nu)$ (5.12), найдутся пара $(m_{*0}, \nu_{*0}) \in G_2^{(4)}(t_*)$ и вектор $l_0 \in R^{p_2^{[h]}}$, $h = h_2(t^*)$, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant \nu_{*0} \leqslant \nu_0, \ \mu_2^{[h]*}(l_0) \leqslant \nu_0 - \nu_{*0}, \ m_{*0} + X^T[t^*, \vartheta] D_2^{[h]T} l_0 = m_0$$

$$\varphi_2^{(4)\prime}(t_*, m_0, \nu_0) = \varphi_2^{(4)}(t_*, m_{*0}, \nu_{*0}) \tag{5.29}$$

Здесь пара (m_0, ν_0) из (5.28) и набор $\{(m_{*0}, \nu_{*0}), l_0\}$ из (5.29) определяются в том же порядке, в котором выше, во втором случае, определялись пара (m_0, ν_0) из (5.22) и векторы m_{*0}, l_0 из (5.23). Отличие состоит только в том, что вместо вектора $m_*(m, \nu)$, который определялся во втором случае при решении задачи на максимум (5.10) как функция от пары (m, ν), здесь при решении задачи на максимум (5.12) находится пара (m_*, ν_*) как функция от пары (m, ν).

Теперь из (5.15) в согласии с (5.16), (5.28) и (5.29) имеем неравенство

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t^*], \Delta^*_{k^*}) \geq \sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*]) + \varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu_0) + \langle l_0, D_2^{[h]}x[t^*]\rangle +$$

$$+\langle m_{*0}, X[\vartheta, t^*]x[t^*]\rangle + \varphi_2^{(4)'}(t_*, m_0, \nu_0) = e'_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*], t^*, x[t^*], \Delta^*_{k^*}) \tag{5.30}$$

В (5.30) учтена следующая цепочка неравенств:

$$\max\{\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*]), \mu_2^{[h]}(D_2^{[h]}x[t^*])\}(1-\nu_{*0}) \geq$$

$$\geq \varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu_0) + \mu_2^{[h]}(D_2^{[h]}x[t^*])(\nu_0 - \nu_{*0}) \geq$$

$$\geq \varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu_0) + \langle l_0, D_2^{[h]}x[t^*]\rangle$$

Неравенства (5.27) и (5.30) доказывают равенство (5.18) и в последнем, третьем случае.

Рассмотрим далее $W = W(t^*; t_*, x[t_*], \upsilon_*[t_*[\cdot]t^*]) \subset R^n$ – область достижимости к моменту времени t^* для движений системы (5.1), порожденных из позиции $\{t_*, x[t_*]\}$ каким угодно допустимым управлением $u[t_*[\cdot]t^*)$ в паре с $\upsilon_*[t_*[\cdot]t^*)$. Это множество будет непустым, выпуклым компактом в R^n. Поскольку функции $\varphi_j^{(4)}(t_*, m, \nu)$ являются вогнутыми по совокупности (m, ν), то рассуждая по схеме из [2] (с. 120), [6] (с. 320), которая использует теорему Какутани о неподвижной точке ([14], с. 638), можно проверить, что найдется пара $\{(m^0, \nu^0), x^0\} \in E = [G_1^{(4)}(t_*) \times W]$, удовлетворяющая одновременно следующим двум условиям:

$$\varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu^0) + \langle m^0, X[\vartheta, t^*]x^0\rangle + \varphi_2^{(4)'}(t_*, m^0, \nu^0) =$$

$$= \max_{(m,\nu)\in G_1^{(4)}(t_*)} [\mathrm{Idem}(m^0 \to m, \nu^0 \to \nu)] \tag{5.31}$$

$$\langle m^0, X[\vartheta, t^*]x^0\rangle = \min_{x\in W}\langle m^0, X[\vartheta, t^*]x\rangle \tag{5.32}$$

Здесь Idem в правой части равенства означает выражение, стоящее в левой части этого равенства при указанной в скобках замене символов.

Пусть $u^0[t_*[\cdot]t^*)$ – допустимое управление, которое в паре с $\upsilon_*[t_*[\cdot]t^*)$ приводит движение системы в точку $x^0 \in W$. При этом реализуется история $x^0[t_*^0[\cdot]t^*]$ движения.

Тогда из (5.32), используя формулу Коши и возможность внести операцию минимума под знак интеграла, выводим равенство

$$\int_{t_*}^{t^*} \langle m^0, \quad X[\vartheta, \tau]B(\tau)u^0[\tau]\rangle d\tau = \int_{t_*}^{t^*} \min_{u\in P}\langle m^0, \quad X[\vartheta, \tau]B(\tau)u\rangle d\tau \tag{5.33}$$

а в силу (5.17), при учете (5.31), получаем

$$e'_{(4)}(x^0[t_*^0[\cdot]t_*], t^*, x^0, \Delta^*_{k^*}) = \varkappa(x[t_*^0[\cdot]t_*])(1-\nu^0) + \langle m^0, X[\vartheta, t_*]x[t_*]\rangle +$$

$$+\sigma(x[t_*^0[\cdot]t_*]) + \int_{t_*}^{t^*} \langle m^0, X[\vartheta, \tau](B(\tau)u^0[\tau] + C(\tau)\upsilon_*[\tau])\rangle d\tau + \varphi_2^{(4)'}(t_*, m^0, \nu^0) \tag{5.34}$$

С другой стороны, поскольку $(m^0, \nu^0) \in G_1^{(4)}(t_*)$, то из (5.15), принимая во внимание мажорантность выпуклой сверху оболочки $\varphi_1^{(4)}(\,\cdot\,)$ для функции $\psi_1^{(4)}(\,\cdot\,)$ (5.13), имеем неравенство

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*], \Delta_k) \geqslant \sigma(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*]) + \varkappa(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*])(1-\nu^0) +$$

$$+\langle m^0, X[\vartheta, t_*]x[t_*]\rangle + \Delta\psi_1(t_*, m^0) + \varphi_2^{(4)\prime}(t_*, m^0, \nu^0) \tag{5.35}$$

Из (5.33)–(5.35), при учете (5.5) ($j = 1$) и равенства (5.18), вытекает справедливость теоремы 5.1.

Теорема 5.2 (v-стабильность $e_{(4)}(\,\cdot\,)$). Пусть реализовалась история $x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*]$, $t_*^0 \leqslant t_* < \vartheta$ движения системы (5.1) и назначено разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ (5.4) отрезка $[t_*, \vartheta]$. Тогда для всякой допустимой реализации $u_*[t_*[\,\cdot\,]t^*)$, где $t^* = \tau_2 \in \Delta_k\{\tau_j\}$, найдется такая допустимая реализация $v[t_*[\,\cdot\,]t^*)$, что под действием этих управлений реализуется история $x[t_*^0[\,\cdot\,]t^*]$, для которой справедливо неравенство

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\,\cdot\,]t^*], \Delta_{k^*}^*) - e_{(4)}(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*], \Delta_k) \geqslant 0 \tag{5.36}$$

Доказательство. Согласно (5.13), (5.15) и в силу теоремы Каратеодори ([13], с. 171) для выпуклой сверху оболочки $\varphi(\,\cdot\,)$ какой-либо функции $\psi(\,\cdot\,)$, в рассматриваемом случае существует пара $(m_0, \nu_0) \in G_1^{(4)}(t_*)$, для которой справедливо равенство

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*], \Delta_k) = \sigma(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*]) + \varkappa(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*])(1-\nu_0) +$$

$$+\langle m_0, X[\vartheta, t_*]x[t_*]\rangle + \Delta\psi_1(t_*, m_0) + \varphi_2^{(4)\prime}(t_*, m_0, \nu_0) \tag{5.37}$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 5.1, рассмотрим вспомогательную величину $e'_{(4)}(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*], t^*, x[t^*], \Delta_{k^*}^*)$ (5.17).

Опираясь на теорему об измеримом выборе [15], возьмем допустимую реализацию $v_0[t_*[\cdot]t^*)$, которая удовлетворяет соотношению

$$\int_{t_*}^{t^*} \langle m_0, X[\vartheta, \tau]C(\tau)v_0[\tau]\rangle d\tau = \int_{t_*}^{t^*} \max_{v \in Q}\langle m_0, X[\vartheta, \tau]C(\tau)v\rangle d\tau \tag{5.38}$$

Пусть $x[t_*^0[\,\cdot\,]t^*]$ – история движения системы (5.1), реализовавшегося под действием управлений $u_*[t_*[\cdot]t^*)$ и $v_0[t_*[\cdot]t^*)$. Тогда из (5.17), используя формулу Коши, получаем неравенство

$$e'_{(4)}(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*], t^*, x[t^*], \Delta_{k^*}^*) \geqslant \varkappa(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*])(1-\nu_0) + \langle m_0, X[\vartheta, t_*]x[t_*]\rangle +$$

$$+\sigma(x[t_*^0[\,\cdot\,]t_*]) + \int_{t_*}^{t^*} \langle m_0, X[\vartheta, \tau]B(\tau)u_*[\tau] + C(\tau)v_0[\tau])\rangle d\tau + \varphi_2^{(4)\prime}(t_*, m_0, \nu_0) \tag{5.39}$$

Из (5.37), (5.39), в согласии с (5.5) ($j = 1$) и (5.38), при учете равенства (5.18), которое проверяется здесь так же, как и в доказательстве теоремы 5.1, вытекает справедливость неравенства (5.36). Это доказывает теорему 5.2.

Если учесть, что в согласии с (5.6) справедливо равенство

$$e_{(4)}(x[t_*^0[\,\cdot\,]\vartheta], \Delta_k) = \gamma_{(4)}(x[t_*^0[\,\cdot\,]\vartheta])$$

то следствием из теорем 5.1 и 5.2 будет следующее утверждение.

Теорема 5.3. Каковы бы ни были история $x[t_*^0[\cdot]t_*]$, $t_*^0 \leq t_* < \vartheta$ движения системы (5.1) и последовательность разбиений $\Delta_k\{\tau_j\}$ (5.4) с шагом $\delta_k = \max_j(\tau_{j+1} - \tau_j)$ $(k = 1, 2, ...)$, удовлетворяющая условию $\lim\delta_k = 0$, $k \to \infty$, будет справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} e_{(4)}(x[t_*^0[\cdot]t_*], \Delta_k) = \rho_{(4)}^0(x[t_*^0[\cdot]t_*])$$

Здесь $\rho_{(4)}^0(x[t_*^0[\cdot]t_*])$ – цена игры (5.1)–(5.3).

Итак установлено, что описанная процедура вычисления величины $e_{(4)}(\cdot)$ на базе функций $\varphi_j^{(4)}(\cdot)$, которые получаются овыпуклением функций $\psi_j^{(4)}(\cdot)$ в областях $G_j^{(4)}$ по паре аргументов (m, ν), приводит к цене $\rho_{(4)}^{(0)}(\cdot)$ игры (5.1)–(5.3).

Пример, приведенный в разд. 6, показывает, что овыпукление именно по паре (m, ν) существенно. В этом примере овыпукление только по m при каждом фиксированном ν не дает цену игры.

6. Пример. Рассмотрим следующую задачу типа (5.1)–(5.3).

Пусть система описывается уравнением

$$dx/dt = f(t)u + g(t)v, \quad t_*^0 = 0 \leq t \leq \vartheta = 3 \tag{6.1}$$

$$x = (x_1, x_2) \in R^2, \quad u = (u_1, u_2) \in R^2, \quad v = (v_1, v_2) \in R^2$$

где u и v стеснены ограничениями

$$u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad v_1^2 + v_2^2 \leq 1 \tag{6.2}$$

а $f(t)$ и $g(t)$ – скалярные функции:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t \leq 3 \end{cases}, \quad g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t \leq 3 \end{cases} \tag{6.3}$$

Показатель качества задан в виде функционала

$$\gamma = \gamma(x[0[\cdot]3]) = \max\{|x_2[0]|, |x_2[2]|\} + |x_1[3]| \tag{6.4}$$

Здесь $|\cdot|$ – модуль скалярной величины; $N_1 = 1$, $t_1^{[1]} = \vartheta = 3$, $D_1^{[1]} = [1 \quad 0]$; $N_2 = 2$, $t_2^{[1]} = t_*^0 = 0$, $t_2^{[2]} = 2$; $D_2^{[1]} = D_2^{[2]} = [0 \quad 1]$.

Пусть $\varphi_j(t_*, m, \nu)$ – выпуклые сверху оболочки по (m, ν), которые строятся для задачи (6.1)–(6.4) согласно процедуре (5.4)–(5.13); через $e(\cdot, \Delta_k)$ обозначим получаемую в этом случае величину (5.15); через $\rho(\cdot)$ – цену игры (6.1)–(6.4).

Через $\overset{*}{\varphi}_j(t_*, m, \nu)$ будем обозначать функции, получаемые, при учете (6.1)–(6.4), подобно процедуре (5.4)–(5.13), но как выпуклые сверху оболочки только по m, при каждом фиксированном $\nu \in [0, 1]$; через $e^*(\cdot, \Delta_k)$ обозначим величину, вычисляемую подобно (5.15) на базе функций $\overset{*}{\varphi}_j(t_*, m, \nu)$; через $\rho^*(\cdot)$ – предел величин $e^*(\cdot, \Delta_k)$ $(k \to \infty)$ при шаге разбиения Δ_k, стремящемся к нулю.

Пусть $t_* = t_*^0 = 0$. Назначим разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ отрезка времени $[0, 3]$, в которое включим моменты времени 0, 1, 2 и 3.

Проведя вычисления, получаем

$$G_1(0) = \{(m = (m_1, m_2), \nu):\ 0 \leq \nu \leq 1,\ |m_1| \leq 1,\ |m_2| \leq \nu\} \tag{6.5}$$

$$\varphi_1(0, m, \nu) = -\sqrt{m_1^2 + m_2^2} + (1 + (\sqrt{2} - 1)\nu) + 1$$

$$\varphi_1^*(0, m, \nu) = -\sqrt{m_1^2 + m_2^2} + \sqrt{1 + \nu^2} + 1, \quad (m, \nu) \in G_1(0)$$

Видно, что область $G_1(0)$ не обладает свойством однородности (4.5), и функция $\varphi_1^*(0, m, \nu)$ не является ни вогнутой, ни однородной по паре (m, ν).

Заметим, что в данной задаче предельные значения $\rho(\cdot)$ и $\rho^*(\cdot)$ вычисляются удобно аналитически через величины $e(\cdot, \Delta_k)$ и $e^*(\cdot, \Delta_k)$. Это можно увидеть из (6.5).

Пусть задано начальное состояние $x_1[t_*^0] = 2$, $x_2[t_*^0] = 2$.

Тогда на основе (6.5) вычисляем

$$\rho(x[0[\cdot]0] = (2,2)) = 6 - \sqrt{2(\sqrt{2}-1)} \approx 5{,}089 > \rho^*(x[0[\cdot]0]) = 5 \tag{6.6}$$

Строгое неравенство (6.6) показывает, что величина $\rho^*(\cdot)$ не является ценой игры (6.1)–(6.4).

Процесс управления, формируемого на базе описанных конструкций, для задачи (6.1)–(6.4) был симулирован на ЭВМ. Результаты численного эксперимента подтверждают теоретические выводы. Например, аккуратная симуляция процесса управления при оптимальных стратегиях $u^0(\cdot)$ и $v^0(\cdot)$, экстремальных к $\rho(\cdot)$, дала $\gamma = 5{,}089 \approx \rho(x[0[\cdot]0])$. В случае оптимальной стратегии $u^0(\cdot)$ и стратегии $v^*(\cdot)$, экстремальной к $\rho^*(\cdot)$, получилось $\gamma = 5{,}04 < \rho(x[0[\cdot]0])$. В случае стратегий $v^0(\cdot)$ и $u^*(\cdot)$, экстремальной к $\rho^*(\cdot)$, получилось $\gamma = 5{,}28 > \rho(x[0[\cdot]0])$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (NMS300) и Российского фонда фундаментальных исследований (94–01–00310).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. *Osipov Ju.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problem of ordinary differential equations: Dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995.
5. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
7. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. USA. Birkhauser, 1995. 320 p.
8. *Красовский А.Н.* О позиционном минимаксном управлении // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 602–610.
9. *Красовский А.Н.* Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 186–192.
10. *Krasovskii N.N., Reshetova T.N.* On the program synthesis of a guaranteed control // Problem of Control and Information Theory. 1988. V. 17. № 6. P. 333–343.
11. *Локшин М.Д.* О дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управляющие воздействия // Дифференц. уравнения, 1992. Т. 28. № 11. С. 1952–1961.
12. *Лукоянов Н.Ю.* Об одной дифференциальной игре с интегральным критерием качества // Дифференц. уравнения, 1994. Т. 30. № 11. С. 1905–1913.
13. *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. М., 1973. 469 с.
14. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
15. *Аркин В.И., Левин В.Л.* Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. № 3. С. 21–77.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
7.XII.1995