

УДК 550.34

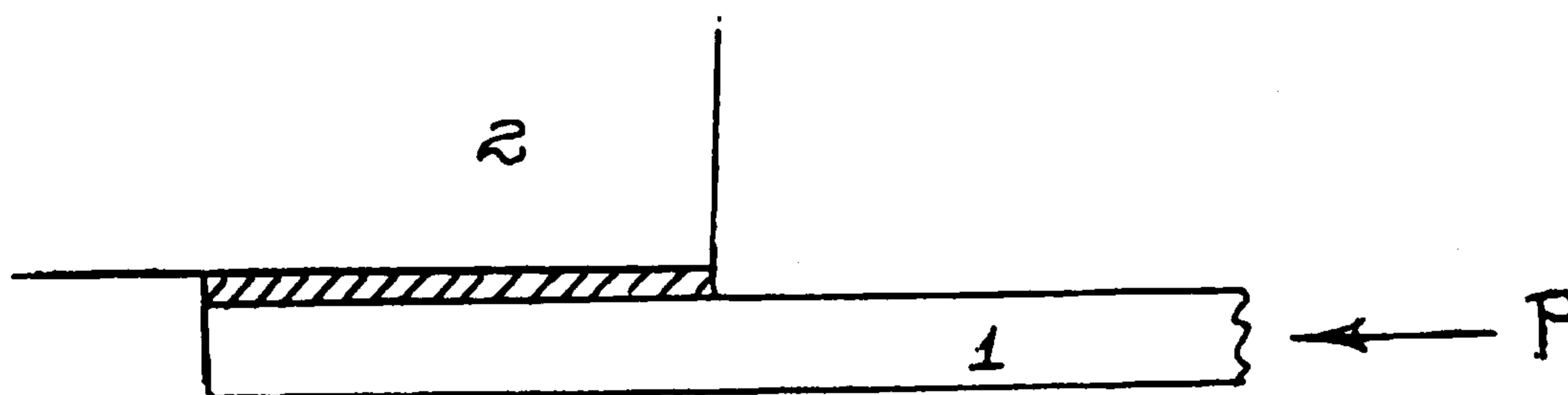
© 1996 г. В.А. Бучин, С.С. Григорян, Г.А. Шапошникова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В РАЗРУШАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ

Исследуется динамика процессов, сопровождающих потерю устойчивости в механической системе в виде упругого стержня, "приклеенного" по боковой поверхности к жесткой стенке и растягиваемого осевой нагрузкой. "Клей" представляет собой малопрочный упругий материал, испытывающий хрупкое разрушение при некотором значении действующей на него нагрузки. На разрушенном участке поверхность стержня скользит по поверхности стенки при действии силы сухого трения, меньшего разрушающего напряжения. Установлена высокая чувствительность процесса развития неустойчивости к малым возмущениям, запускающим развитие неустойчивости. Рассмотренная система представляет собой простейшую модель зоны контакта литосферных плит, генерирующей землетрясения.

Представления [1] о механизме возникновения землетрясений связывают быстрое выделение упругой энергии горных пород в очаге землетрясения с достижением неустойчивости механического состояния очаговой области в ходе медленного накопления этой энергии на стадии "подготовки" землетрясения и последующим динамическим процессом разрушения там с излучением упругих волн. Существующие в настоящее время многочисленные гипотезы о "работе" очага землетрясения, к сожалению, не доведены до количественных математических моделей, позволяющих рассчитать детали процесса в очаговой зоне. Была предложена [2] простая механическая система, моделирующая детали динамического процесса развития неустойчивости в очаге землетрясения. Ниже на основе этой модели исследуются различные особенности развития неустойчивости.

1. Рассмотрим механическую конструкцию, состоящую из упругого полубесконечного стержня, "приклеенного" на конечном участке его длины к жесткому неподвижному основанию (фиг. 1). На бесконечности к стержню приложена сила (сжимающая



Фиг. 1

или растягивающая), под действием которой в области склейки может возникнуть разрушение "клея". Эта конструкция представляет собой простейшую модель так называемой зоны Бенъофа, где литосферная плита (1) пододвигается под другую плиту (2) и в области их контакта (заштрихована) время от времени возникает разрушение связывающего их материала с выделением упругой энергии (возникновением землетрясения).

Будем изучать задачу о механике этой конструкции. Левый конец стержня ($x = 0$) будем считать свободным, а на правом конце при $x = \infty$ приложена заданная сила (напряжение) P . Система при этом может находиться в равновесии.

Ограничимся рассмотрением одномерных продольных смещений точек стержня $w(t, x)$, для определения которых с известным приближением можно написать уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\tau}{D}; \quad \tau \neq 0, \quad 0 \leq x \leq L; \quad \tau = 0, \quad x > L \quad (1.1)$$

$$\sigma = E \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.2)$$

Здесь ρ_0 – плотность стержня, $\sigma \equiv \sigma_{xx}$ – компонента тензора напряжений в стержне, τ – сдвиговое напряжение в прослойке (в "клее") между стержнем и жестким основанием и на границе стержня, D – толщина стержня, E – модуль Юнга материала стержня.

Предполагается, что напряжение τ пропорционально сдвиговой деформации в прослойке $\gamma = w/h$ (h – эффективная толщина прослойки) при значениях $|\tau|$ меньших некоторого критического значения τ_* (или при значениях $|\gamma|$ меньших γ_*)

$$\tau = G\gamma, \quad 0 \leq |\gamma| < \gamma_* \quad (1.3)$$

При достижении $|\tau|$ значения τ_* происходит хрупкое разрушение материала прослойки и в дальнейшем сдвиговое напряжение τ определяется законом сухого трения, постоянного по модулю и равного τ_{**}

$$\tau = \text{sign}(u)\tau_{**}, \quad \tau_{**} = \text{const}, \quad u = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (1.4)$$

Из (1.1)–(1.4) можно получить уравнение относительно смещения w

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\tau}{\rho_0 D}; \quad \tau \neq 0, \quad 0 \leq x \leq L; \quad \tau = 0, \quad x > L; \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (1.5)$$

Здесь a – скорость звука в материале стержня.

Граничное условие на левом свободном конце стержня зададим в виде

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \quad (1.6)$$

Будем рассматривать случай, при котором на правом конце приклеенного участка стержня ($x = L$) происходит только излучение упругих волн в область $x > L$, т.е. из этой области на границу $x = L$ возмущения не приходят. Это позволяет ограничиться рассмотрением задачи лишь в области $0 \leq x \leq L$. Граничное условие при $x = L$ в этом случае можно привести к виду

$$E \frac{\partial w}{\partial t} + aE \frac{\partial w}{\partial x} = aP, \quad x = L \quad (1.7)$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$x = Lx', \quad t = t't_0, \quad t_0 = L/a, \quad w = w_0 w', \quad w_0 = P_0 L/E, \quad \sigma = P_0 \sigma'$$

$$P = P_0 P', \quad \alpha^2 = \frac{L^2 G}{DEh}, \quad P_0^2 = \tau_*^2 \frac{hE}{DG}, \quad q = \frac{\tau_{**}}{\tau_*}$$

2. Рассмотрим статическую задачу при постоянной нагрузке $P = P_{st}$. Ее решение $w = w_0(x)$ удовлетворяет следующей системе уравнений и граничных условий (здесь и далее в разд. 2 знак штрих опускаем):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha^2 \Phi(w), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = P_{st}, \quad x = 1 \quad (2.2)$$

В области, где выполнено условие $0 \leq w < 1/\alpha$, функция $\Phi(w) = w$ и уравнение (2.1) имеет вид

$$\partial^2 w / \partial x^2 = \alpha^2 w \quad (2.3)$$

Там, где произошло разрушение материала прослойки, функция $\Phi(w) = \alpha q \text{sign} P_{st}$ и уравнение (2.1) имеет вид

$$\partial^2 w / \partial x^2 = \alpha q \text{sign} P_{st} \quad (2.4)$$

Решение краевой задачи (2.1), (2.2) при различных значениях P_{st} устроено по-разному.

Если $|P_{st}| < \text{th} \alpha$, то материал прослойки не разрушен на всем участке стержня $0 \leq x \leq 1$ и для решения $w_0(x)$ имеем выражение

$$w_0(x) = P_{st} \frac{\text{ch} \alpha x}{\alpha \text{sh} \alpha}$$

Если $P_{\max} \geq |P_{st}| \geq \text{th} \alpha$ (значение P_{\max} будет определено ниже), решение $w_0(x)$ существует, но материал прослойки разрушен в области $x_1 < x \leq 1$. При этом напряжение $|\sigma|$ монотонно возрастает от $|\sigma| = 0$ при $x = 0$ до $|\sigma| = |P_{st}|$ при $x = 1$. При $0 \leq x < x_1$ распределение $w_0(x)$ определяется решением уравнения (2.3), а при $x_1 \leq x \leq 1$ решением уравнения (2.4). Значение x_1 зависит от величины $|P_{st}|$ и определяется в процессе решения задачи. При $x = x_1$ должны быть выполнены условия непрерывности смещения и напряжения

$$w_0(x-0) = w_0(x+0) = 1/\alpha, \quad \sigma(x-0) = \sigma(x+0)$$

Решение краевой задачи (2.1), (2.2) в этом случае имеет вид

$$w = \frac{\text{ch} \alpha x}{\alpha \text{ch} \alpha x_1} \text{sign} P_{st}, \quad 0 \leq x \leq x_1 \quad (2.5)$$

$$w = \left\{ \frac{1}{2} \alpha q (x^2 - x_1^2) + (|P_{st}| - \alpha q)(x - x_1) + \frac{1}{\alpha} \right\} \text{sign} P_{st} \quad (2.6)$$

$$x_1 < x \leq 1$$

Величина x_1 определяется уравнением

$$\text{th} \alpha x_1 + \alpha q (1 - x_1) = |P_{st}| \quad (2.7)$$

Анализ уравнения (2.7) показывает, что существует максимальное значение нагрузки $|P_{st}| = P_{\max}$, при превышении которого решения краевой задачи не существует. Значению P_{\max} соответствует значение $x_1 = x_{1m} > 0$. P_{\max} и x_{1m} определяются выражениями

$$P_{\max} = \text{th} \alpha x_{1m} + \alpha q (1 - x_{1m}) \quad (2.8)$$

$$x_{1m} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\sqrt{\frac{1}{q}} + \sqrt{\frac{1}{q} - 1} \right) \quad (2.9)$$

Действительный корень x_{1m} существует, если выполнено неравенство $q < 1$.

Наиболее интересен случай, когда корень x_{1m} лежит на отрезке $[0, 1]$. В этом случае статическая диаграмма $P_{st} - \xi$ ($\xi = 1 - x_1$) имеет "устойчивую" ветвь (где $dP_{st}/d\xi > 0$) на интервале $0 \leq \xi \leq 1 - x_{1m}$, и "неустойчивую" ветвь, т.е. ветвь с $dP_{st}/d\xi < 0$, при $1 - x_{1m} \leq \xi \leq 1$.

Для оценок значений безразмерных параметров α и q , определяющих решение задачи, примем следующие порядки величин: $E = 3 \cdot 10^{11}$ Н/м², $G = 10^{10}$ Н/м², $\tau_* =$

$= 6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, $\tau_{**} = 0,5\tau_*$, $\rho_0 = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $L = 3 \cdot 10^5 \text{ м}$, $h = 10^3 \text{ м}$, $D = 5 \cdot 10^4 \text{ м}$. Для этих значений параметров имеем $\alpha = 7,746$, $q = 0,5$. В этом случае $P_{\max} = 4,1394$ и $x_{1m} = 0,113$. Нетрудно видеть, что с ростом α область неустойчивости уменьшается. Одновременно уменьшаются значения P_{st} и соответственно P_{\max} . При фиксированном значении α уменьшение q увеличивает область неустойчивости с одновременным уменьшением значения P_{\max} .

3. Как было сказано выше, статическая диаграмма $P_{st} - \xi$ ($\xi = 1 - x_1$) имеет неустойчивую ветвь при $1 - x_{1m} \leq \xi \leq 1$. Последняя нереализуема в статических условиях и внесение малых возмущений в систему при $|P_{st}| = P_{\max}$ приведет к динамическому процессу разрушения – быстрому распространению фронта разрушения $\xi = \xi(t)$ от $1 - x_{1m}$ до 1 с излучением упругой волны в область $x > 1$. Для устойчивой ветви внесение возмущений не должно приводить к существенным изменениям состояния системы.

Для исследования динамических процессов разрушения была составлена программа расчета нестационарных задач для системы уравнений и граничных условий (1.1)–(1.7).

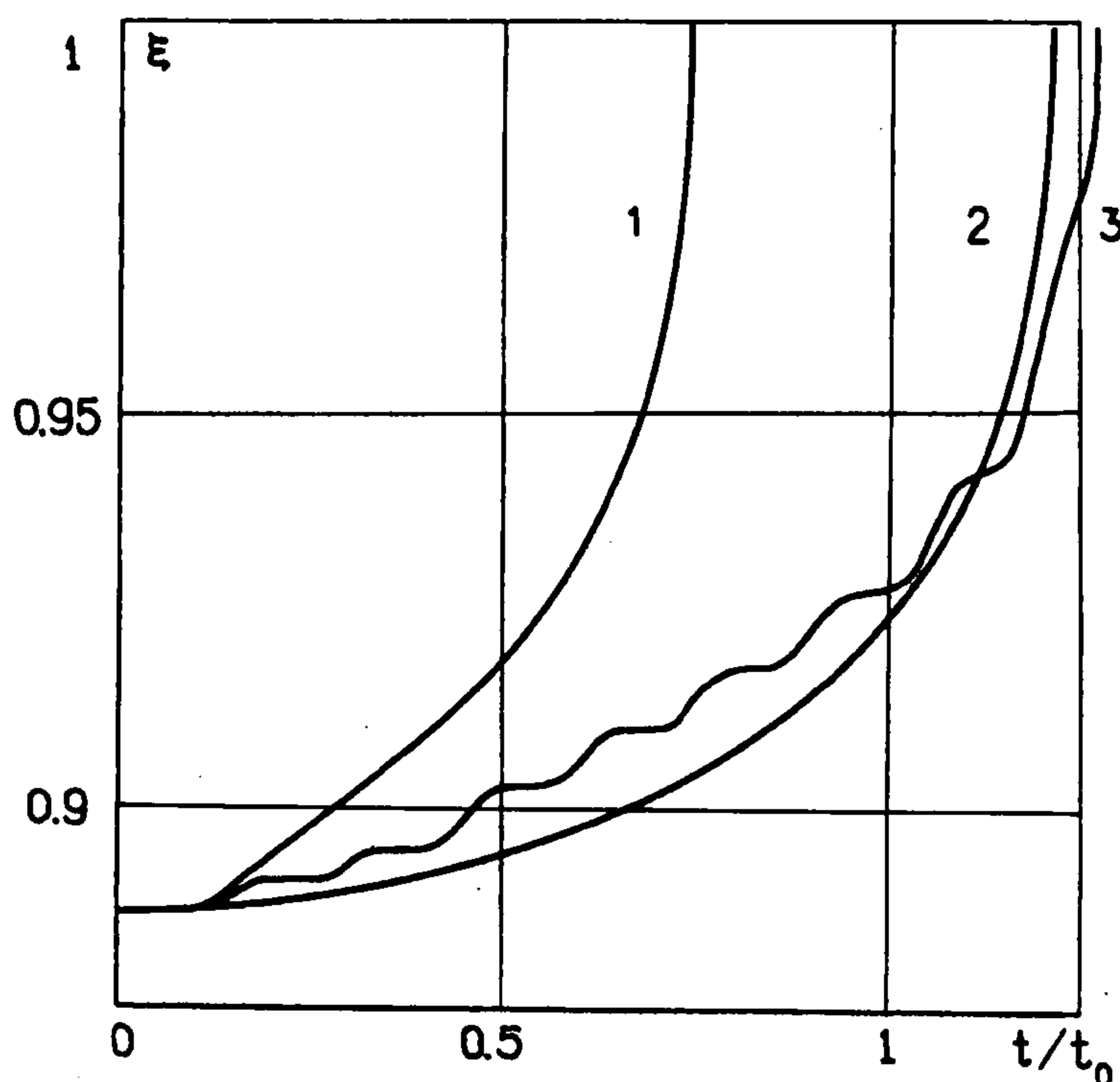
При $P = P_{\max}$ в систему вносились возмущения трех типов: счетные возмущения от дискретизации и возмущения вида

$$\sigma(0, t) = \sigma_0 e(t); \quad e(t) = 0, \quad t < 0; \quad e(t) = 1, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

$$\sigma(0, t) = \sigma_0 \sin \omega t / t_0 \quad (3.2)$$

Оказалось, что во всех случаях, действительно, происходил динамический процесс "реализации" неустойчивости. При разрушении от счетных возмущений дискретизации скорость движения разрыва на начальном этапе разрушения обратно пропорциональна числу разбиений (падает при уменьшении величины возмущений), на заключительном этапе разрушения кривые становятся подобными друг другу.

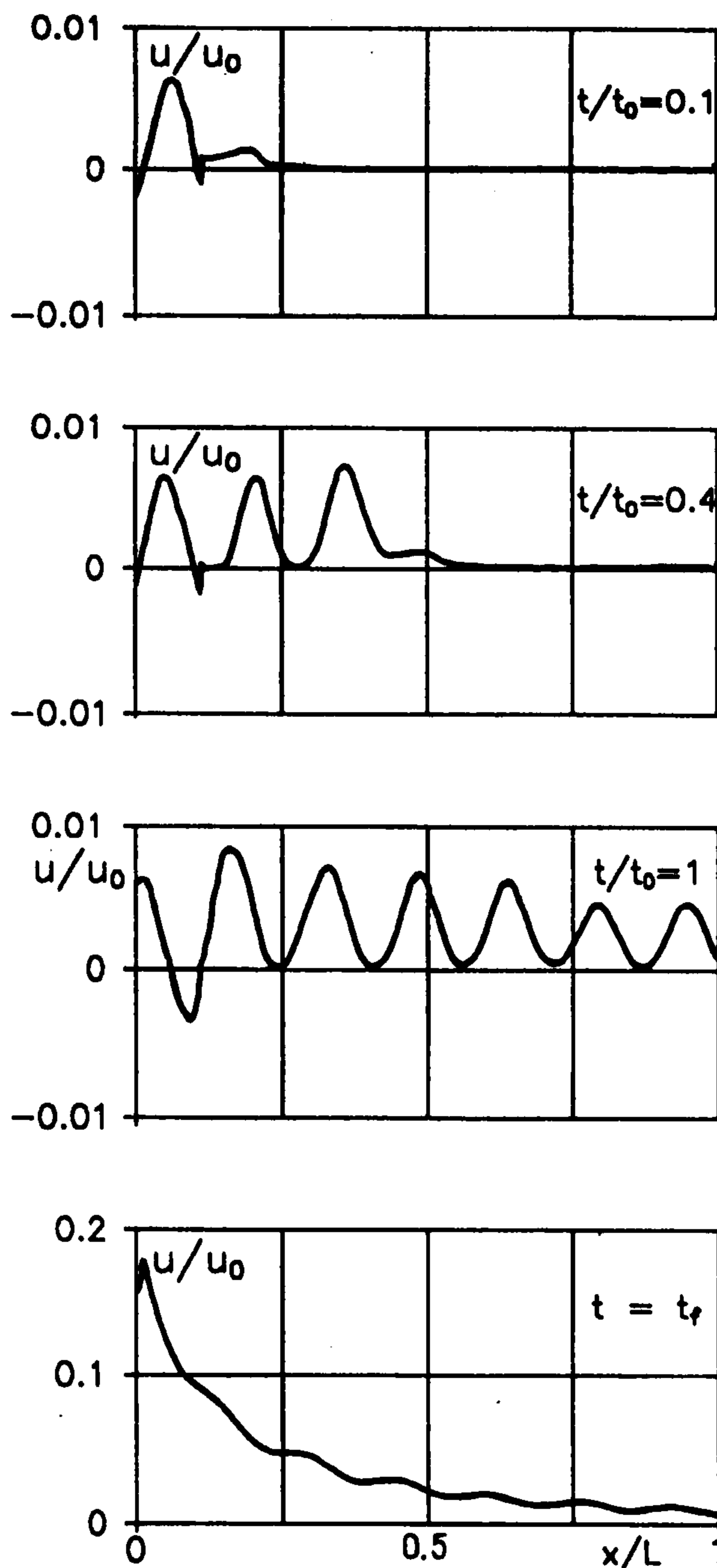
На фиг. 2 приведена зависимость $\xi(t/t_0)$, при разрушении от возмущений вида (3.1) (линия 1) и (3.2) (линия 2, $\omega = 1$, и линия 3, $\omega = 40$) для $a = 7,746$, $q = 0,5$, $\sigma_0 = -5 \cdot 10^{-2} P_0$, число разбиений $N = 1000$. В этом случае внешние возмущения более чем на порядок превосходят счетные возмущения и последние практически не влияют на процесс разрушения. Видно, что в процессе разрушения можно выделить три этапа – после краковременной начальной стадии, определяемой амплитудой возмущения, вырабатывается режим со скоростью фронта разрушения,



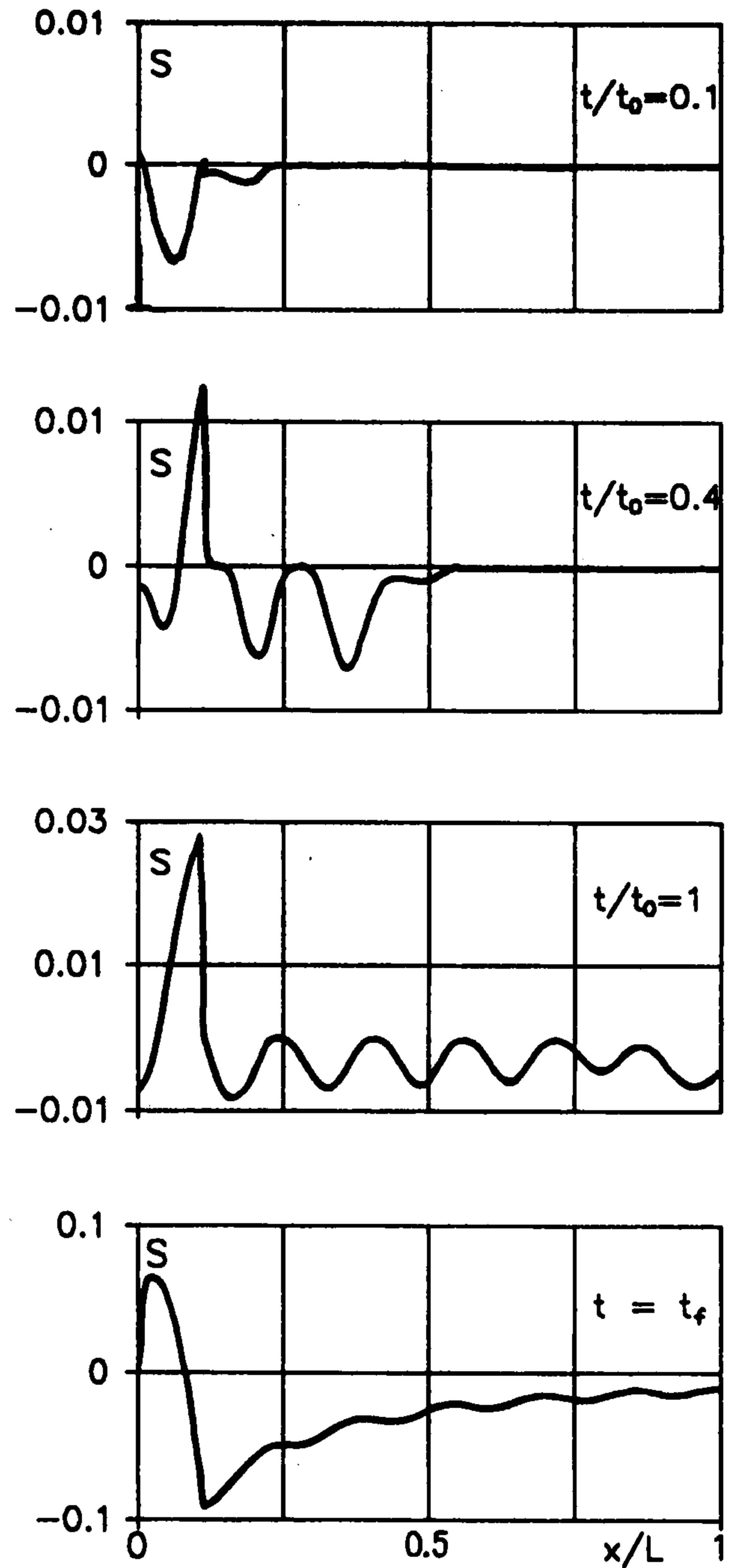
Фиг. 2

зависящей от вида возмущения, сменяющийся срывом – завершающей стадией прогрессивно ускоряющегося разрушения.

Были проведены расчеты зависимостей $u = u(L, t)$ ($u_0 = w_0/t_0$), $\sigma = \sigma(L, t)$, определяющие излученную в область $x > L$ упругую волну – "землетрясение" $u = u(x - at)$, $\sigma = \sigma(x - at)$. Расчеты проводились для $P = P_{\max}$, $\alpha = 7,746$, $q = 0,5$. На левом конце ($x = 0$) задавалось возмущение в виде (3.2), $\sigma_0 = -5 \cdot 10^{-2} P_0$, для различных значений ω . Отметим, что, в то время как на левом конце скорость u , меняясь по гармоническому закону, принимает значения обоих знаков, скорость u на правом конце ($x = L$) имеет только положительные или нулевые значения.



Фиг. 3



Фиг. 4

Во всех численных экспериментах с заданием на левом конце стержня возмущения в виде (3.2) было обнаружено, что в разрушенную область $x_1(t) \leq x \leq L$ проникают возмущения скорости $u(x, t)$ только одного знака. Фронт разрушения $x = x_1$ срезает отрицательную часть гармоника. Кроме того, фронт разрушения, взаимодействуя с приходящей слева волной, как бы отражает часть положительной полуволны влево.

На фиг. 3 приведены распределения $u(x, t)/u_0$ для моментов времени $t/t_0 = 0,1, 0,4, 1$ и в момент разрушения $t = t_f$. На фиг. 4 приведены распределения $S = (\sigma(x, t) - \sigma(x, 0))/P_0$ для тех же моментов времени. В момент времени $t = 0$ на левом конце стержня задано возмущение в виде (3.2), $\sigma_0 = -5 \cdot 10^{-3} P_0$, $\omega = 40$. Расчеты проводились для $\alpha = 7,746$, $q = 0,5$, $P = P_{\max}$. Они показали, что при увеличении $|\sigma_0|$ в 10 раз максимальное и минимальное значения σ на стадии срыва движения фронта разрушения имеют тот же порядок, что и при $\sigma_0 = -5 \cdot 10^{-3} P_0$: $\max S \approx 0,1$, $\min S \approx -0,1$.

Имеется качественное совпадение поведения величины $\sigma(x, t) - \sigma(x, 0)$ в момент срыва и разрушения для различных значений σ_0 . На отрезке $[0, x_{1m}]$ (в рассматриваемом случае $x_{1m} = 0,113$) разность напряжений растет практически от нуля до максимального значения, а затем падает до минимального значения. Далее, на отрезке $[x_{1m}, 1]$ эта разность возрастает до нуля, совершая колебания с одной и той же частотой (при одинаковых частотах ω), но с разными амплитудами. Амплитуда этих колебаний зависит от значения σ_0 .

При задании в начальный момент возмущения вида (3.1) фронт разрушения, взаимодействуя с идущей вправо волной, как и в случае задания на левом конце возмущений в виде (3.2), пропускает только возмущения, имеющие положительные скорости движения частиц u . Из расчетов следует, что распределения $u(x, t)$ и $\sigma(x, t) - \sigma(x, 0)$ для различных видов возмущения (3.1) и (3.2) при одном и том же σ_0 на заключительном этапе перед полным разрушением (срыве) мало отличаются друг от друга.

Этот факт, а также качественное совпадение поведения величины $\sigma(x, t) - \sigma(x, 0)$ в момент срыва и разрушения для различных значений σ_0 , обусловлены тем, что на заключительном этапе движения фронта разрушения скорости движения частиц стержня и изменения напряжений определяются движением фронта разрушения. На начальном этапе разрушения скорость движения разрыва мала и возникающие напряжения и скорости движения частиц стержня определяются движением волны возмущения и ее взаимодействием с фронтом разрушения и левым концом стержня.

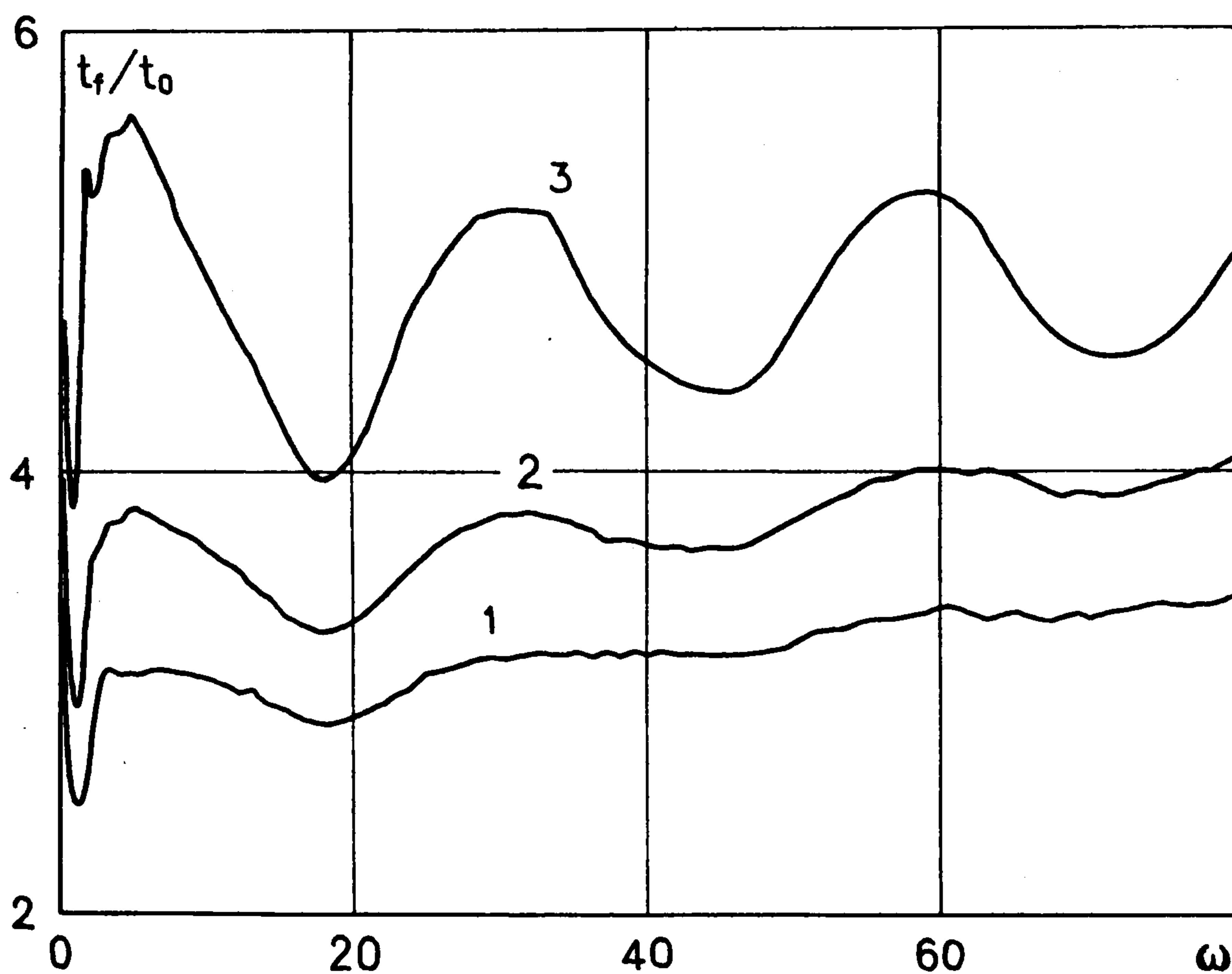
Для исключения влияния движения фронта разрушения на распространение возмущения и взаимодействие возмущения с фронтом разрушения были проведены расчеты для силы P , меньшей P_{\max} . В момент времени $t = 0$ на левом конце стержня задавалось возмущение в виде (3.1), $\sigma_0 = -5 \cdot 10^{-2}P_0$ и $\sigma_0 = 5 \cdot 10^{-2}P_0$, расчеты проводились для $\alpha = 7,746$, $q = 0,5$, $P = 4P_0$. Координата фронта разрыва в этом случае равна $x_1 = 0,2$.

В случае $\sigma_0 > 0$ имеем следующую картину. В момент времени $t = 0,2t_0$ падающее на фронт разрыва возмущение имеет отрицательные скорости частиц и полностью отражается. Далее отраженная волна взаимодействует с левым концом и в момент времени $t = 0,6t_0$ подходит к фронту разрыва, имея положительные скорости частиц. Это возмущение частично отражается, а частично проходит вправо и при $t = 1,4t_0$ излучается в область $x > L$. В случае $\sigma_0 > 0$ фронт разрушения неподвижен и справа от фронта разрушения волна далее не появляется, а слева от фронта разрыва ходит волна возмущения, полностью отражаясь как от фронта разрушения так и от левого конца стержня.

В случае $\sigma_0 < 0$ в момент времени $t = 0,2t_0$ падающее на фронт разрыва возмущение имеет положительные скорости частиц и частично отражается, а частично проходит в область справа от фронта разрушения и при $t = t_0$ излучается в область $x > L$. При $\sigma_0 < 0$ фронт разрушения смещается на небольшую величину в новое положение равновесия и далее, как и в случае $\sigma_0 > 0$, справа от фронта разрушения волна не появляется, а слева от фронта разрыва ходит волна, меньшей, чем при $\sigma_0 > 0$ амплитуды, отражаясь как от фронта разрушения так и от левого конца стержня.

Было проведено численное исследование зависимости полного времени разрушения t_f от амплитуды и вида внесенного возмущения.

На фиг. 5 показана зависимость t_f/t_0 от ω . В расчетах принималось $\sigma_0 = -5 \cdot 10^{-3}P_0$, $\alpha = 7,746$, $q = 0,5$, безразмерная частота ω менялась от 0 до 80. Линии 1, 2, 3 соответствуют числу разбиений $N = 1000, 1500, 5000$. Видно, что сильная нелинейность задачи приводит к весьма высокой чувствительности возникающего при достижении критического состояния динамического процесса разрушения к характеру малых возмущений, приводящих к потере устойчивости. Очевидно, что при частоте $\omega = 0$ разрушение происходит под воздействием только счетных возмущений. Время разрушения при этом существенно зависит от числа разбиений N и растет от $t_f/t_0 = 3,7$ при $N = 1000$ до $t_f/t_0 = 12$ при $N = 5000$. Для частот ω , отличных от нуля, возмущения от внешнего воздействия, определяемого формулой (3.2), взаимодействуют со счетными возмущениями. Результат этого взаимодействия и представлен на фиг. 5. Видно, что независимо от числа разбиений существуют частоты, на которых время разрушения максимально, и частоты, на которых время разрушения минимально. Первый глобальный минимум времени разрушения достигается на частоте $\omega = 0,9$, следующие локальные минимумы достигаются на частотах $\omega \approx 18$, $\omega \approx 45$, $\omega \approx 72$. Зависимость времени



Фиг. 5

разрушения от частоты возмущения в основном связана с тем, что как уже отмечалось выше, фронт разрушения не пропускает малые возмущения, имеющие отрицательные скорости.

Время разрушения при гармонических возмущениях существенно зависит от знака первой полуволны, т.е. от знака σ_0 . Линии на фиг. 5 соответствуют $\sigma_0 < 0$. При $\sigma_0 > 0$ времена разрушения больше, чем при $\sigma_0 < 0$.

Время разрушения при внешнем воздействии вида (3.1) и $\sigma_0 > 0$ существенно больше, чем при отсутствии данного воздействия (при разрушении от счетных возмущений).

Проведенный анализ показал, что даже на столь сильно упрощенной модели развитие неустойчивости в системе после достижения внешней нагрузкой критического значения оказывается весьма нетривиальным из-за сильной нелинейности математической модели, содержащей механизмы падения сопротивления в момент локального разрушения и сухое трение в разрушенном состоянии. Это определяет необходимость дальнейших строгих исследований процесса потери устойчивости в очаге землетрясения с использованием более сложных моделей для него.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного Научного Фонда и Правительства России (М8М300).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С.С. О механизме возникновения землетрясений и содержании эмпирических закономерностей сейсмологии // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 5. С. 1094–1101.
2. Григорян С.С., Бучин В.А., Шапошникова Г.А. О математическом моделировании развития механической неустойчивости в разрушающихся системах // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 4. С. 533–535.

Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1996