

УДК 532.68:536.25

© 1996 г. Н.Н. Бобков, Ю.П. Гупало

**СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ В ЖИДКОМ СЛОЕ И СПЕКТР
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ
ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**

Рассматривается задача о течении жидкости в плоском канале, на дне которого поддерживается заданное распределение температуры, а свободная поверхность теплоизолирована. Поверхностное натяжение жидкости зависит от температуры по квадратичному закону. Система уравнений Навье – Стокса и теплопроводности обладает автомодельным решением, приводящим к нелинейной задаче на собственные значения для нахождения полей течения и температуры в канале. Спектр этой задачи исследуется аналитически при малых числах Марангони (второе приближение) и численно в предельном случае идеально теплопроводной жидкости при любых числах Марангони. Проанализирована структура термокапиллярного течения в слое в зависимости от значений параметров. Установлена неединственность решения, характерная для задач подобного рода. Проведено сравнение результатов с полученными ранее в первом приближении по числу Марангони.

Капиллярные эффекты в условиях пониженной или скомпенсированной гравитации составляют класс явлений, привлекающих внимание многих исследователей [1]. Выращивание кристаллов и создание композитов с новыми свойствами в невесомости, получение в космосе особо чистых металлов и стекол в результате термокапиллярного осаждения капель и пузырей инородной фазы – вот далеко не полный перечень технологических применений рассматриваемых эффектов. Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения – один из важных факторов, обуславливающих многообразие динамики межфазной поверхности при наличии в системе неоднородного поля температуры.

Ранее [2] рассматривалась задача о термокапиллярной конвекции невесомой жидкости в плоском слое со свободной теплоизолированной поверхностью и подогреваемым дном в случае квадратичной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры в рамках уравнений Навье – Стокса. В результате разделения переменных была получена двухточечная краевая задача, описывающая движение жидкости и распределение температуры в слое. Ниже исследуется спектр этой задачи.

1. Постановка задачи. Исходные уравнения. Пусть вязкая несжимаемая и невесомая жидкость образует плоский горизонтальный слой толщины H на твердой равномерно нагретой поверхности с распределением температуры $T = T_0 + AX$, где T_0 и A – постоянные, X – горизонтальная координата. Начало декартовой системы координат XOY (Y – вертикальная координата, отсчитываемая от дна поперек слоя) помещено в точку дна с температурой T_0 . Свободная поверхность слоя теплоизолирована и поверхностное натяжение σ на ней зависит от температуры по квадратичному закону $\sigma(T) = \sigma_0 + \frac{1}{2}\alpha(T - T_0)^2$, σ_0 и α – константы. Значения $\alpha > 0$

($\alpha < 0$) соответствуют параболической зависимости $\sigma(T)$ с локальным минимумом (максимумом). Стационарное течение в слое, соответствующее установлению на свободной поверхности жидкости баланса касательных термокапиллярных и вязких напряжений, описывается системой уравнения и граничных условий

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\rho^{-1}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \\(\mathbf{v}\nabla)T &= \chi\nabla^2T \\ \mathbf{v} &= (u, v), \quad \nabla = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y) \\ Y=0, \quad u=0, \quad v=0, \quad T &= T_0 + AX \\ Y=H, \quad v=0, \quad \partial T/\partial Y=0, \quad \nu\rho du/\partial Y &= \partial\sigma/\partial X = \alpha(T - T_0)\partial T/\partial X\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь ρ, p, \mathbf{v} – плотность, давление и скорость (компоненты по осям X и Y – u и v соответственно), ν – кинематическая вязкость, χ – температуропроводность жидкости.

После перехода к безразмерным координатам ($x = X/H, y = Y/H$) и введения безразмерных функции тока $x\psi(y)$, температуры $x\theta(y)$ и давления $\lambda x^2 + f(y)$ при помощи соотношений

$$\begin{aligned}u &= \frac{\nu}{H}x\psi'(y), \quad v = -\frac{\nu}{H}\psi(y), \quad T = T_0 + AHx\theta(y) \\ p &= p_0 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\nu}{H}\right)^2[\lambda x^2 + f(y)]\end{aligned}$$

где p_0 – давление в начале координат, λ – коэффициент давления, уравнения (1.1) были сведены [2] к нелинейной двухточечной краевой задаче

$$\psi''' + \psi\psi'' - \psi'^2 + \lambda = 0\tag{1.2}$$

$$\theta'' - \operatorname{Pr}(\psi'\theta - \psi\theta') = 0\tag{1.3}$$

$$y=0, \quad \psi=0, \quad \psi'=0, \quad \theta=1\tag{1.4}$$

$$y=1, \quad \psi=0, \quad \psi'' = m_H\theta^2, \quad \theta'=0$$

для определения неизвестных функций $\psi(y), \theta(y)$ ($f(y) = \psi^2(y) + 2\psi'(y)$).

Здесь $\operatorname{Pr} = \nu/\chi, m_H = \alpha A^2 H^3/(\rho\nu^2)$ – числа Прандтля и Марангони, являющиеся параметрами задачи, а коэффициент давления λ играет роль собственного значения.

Краевая задача (1.2)–(1.4) была исследована [2] методом малых возмущений в предельном случае $m_H \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$ и получена соответствующая асимптотика спектра $\lambda = \lambda(m_H, \operatorname{Pr})$ в виде

$$\lambda = -\frac{3}{2}m_H\tag{1.5}$$

причем в первом приближении по числу Марангони ни сама эта асимптотика, ни поле скоростей в слое не зависят от числа Прандтля.

2. Второе приближение по числу Марангони. Разложения функций ψ, θ, f и собственного числа λ в ряды по m_H с точностью до членов $o(m_H^2)$ имеют вид

$$\psi = m_H\psi_1 + m_H^2\psi_2, \quad \theta = 1 + m_H\theta_1 + m_H^2\theta_2$$

$$f = m_Hf_1 + m_H^2f_2, \quad \lambda = m_H\lambda_1 + m_H^2\lambda_2$$

Здесь [2]

$$\psi_1 = \frac{y^2}{4}(y-1), \quad \theta_1 = -\frac{\text{Pr}}{16}y^3\left(\frac{4}{3}-y\right) \quad (2.1)$$

$$f_1 = y\left(\frac{3}{2}y-1\right), \quad \lambda_1 = -\frac{3}{2}$$

Для второго приближения краевая задача имеет вид

$$\psi_2''' + \psi_1\psi_1'' - \psi_1'^2 + \lambda_2 = 0, \quad f_2 = \psi_1^2 + 2\psi_1' \quad (2.2)$$

$$\theta_2'' - \text{Pr}(\psi_1'\theta_1 + \psi_2' - \psi_1\theta_1') = 0 \quad (2.3)$$

$$y=0: \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_2' = 0, \quad \theta_2 = 0 \quad (2.4)$$

$$y=1: \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_2'' = 2\theta_1, \quad \theta_2' = 0 \quad (2.5)$$

Используя результат (2.1), получаем

$$\psi_2''' = \frac{3}{16}y^4 - \frac{y^3}{4} + \frac{y^2}{8} - \lambda_2$$

Интегрируя это соотношение с учетом двух первых граничных условий (2.4), найдем

$$\psi_2 = \frac{y^7}{1120} - \frac{y^6}{480} + \frac{y^5}{480} - \frac{\lambda_2}{6}y^3 + \frac{C_1}{2}y^2$$

Действуя аналогично, из (2.3) находим

$$\theta_2'' = \text{Pr}\left(-\frac{\text{Pr}}{64}y^6 + \frac{\text{Pr}}{32}y^5 - \frac{\text{Pr}}{48}y^4 + \frac{y^6}{160} - \frac{y^5}{80} + \frac{y^4}{96} - \frac{\lambda_2}{2}y^2 + C_1y\right)$$

откуда после интегрирования с использованием третьего граничного условия (2.4) следует

$$\theta_2 = \text{Pr}\left(-\frac{\text{Pr}}{3584}y^8 + \frac{\text{Pr}}{1344}y^7 - \frac{\text{Pr}}{1440}y^6 + \frac{y^8}{8960} - \frac{y^7}{3360} + \frac{y^6}{2880} - \frac{\lambda_2}{24}y^4 + \frac{C_1}{6}y^3 + A_1y\right)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов C_1 , A_1 и собственного числа λ_2 имеем три граничных условия (2.5), которые дают линейную систему, решение которой таково:

$$A_1 = \frac{\text{Pr}^2}{840}, \quad C_1 = \frac{\text{Pr}}{48} + \frac{19}{3360}, \quad \lambda_2 = \frac{\text{Pr}}{16} + \frac{5}{224}$$

Таким образом, функции ψ_2 , θ_2 , f_2 второго приближения приобретают вид

$$\psi_2 = \frac{y^7}{1120} - \frac{y^6}{480} + \frac{y^5}{480} = \left(\text{Pr} + \frac{5}{14}\right)\frac{y^3}{96} + \left(\text{Pr} + \frac{19}{70}\right)\frac{y^2}{96}$$

$$\theta_2 = \text{Pr}\left[\left(\frac{\text{Pr}}{2} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{y}{8}\right)\frac{y^2}{224} - \left(\text{Pr} - \frac{1}{2}\right)\frac{y^6}{1440} - \left(\text{Pr} + \frac{5}{14}\right)\frac{y^4}{384} + \left(\text{Pr} + \frac{19}{70}\right)\frac{y^3}{288}\right] + \frac{\text{Pr}^2}{840}y$$

$$f_2 = \frac{y^4}{16}(y-1)^2 + \left(\frac{y^2}{10} - \frac{y}{5} + \frac{1}{6}\right)\frac{y^4}{8} - \left(\text{Pr} + \frac{5}{14}\right)\frac{y^2}{16} + \left(\text{Pr} + \frac{19}{70}\right)\frac{y}{24}$$

Для собственного числа получаем

$$\lambda = -\frac{3}{2}m_H + \left(\text{Pr} + \frac{5}{14}\right)\frac{m_H^2}{16} + o(m_H^2)$$

Как видно, гидродинамическое и тепловое поля в канале, а также коэффициент давления λ во втором приближении по числу Марангони, в отличие от первого, уже зависят от числа Прандтля, т.е. поле течения и процесс теплопереноса в слое становятся взаимозависимыми.

3. Численное интегрирование. Ниже предложен алгоритм численного анализа системы (1.2)–(1.4) при любых значениях числа Марангони m_H . Основным приемом исследования является сведение указанной краевой задачи к задаче Коши (задаче с начальными данными).

Ограничим рассмотрение предельным случаем идеально теплопроводной жидкости: $\text{Pr} = 0$. В рассматриваемом пределе тепловой и гидродинамический аспекты задачи "расцепляются". Именно, из уравнения (1.3) следует $\theta'' = 0$, откуда после удовлетворения "тепловым" граничным условиям в (1.4) находим $\theta = 1$, так что течение жидкости не оказывает влияния на распределение температуры в ней: поддерживаемый у дна температурный профиль распространяется без искажений поперек слоя.

Для определения поля течения жидкости получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \psi''' + \psi\psi'' &= \psi'^2 + \lambda = 0 \\ y = 0: \quad \psi &= 0, \quad \psi' = 0 \\ y = 1: \quad \psi &= 0, \quad \psi'' = m_H \end{aligned} \tag{3.1}$$

Подвергнем дифференциальное уравнение в (3.1) действию линейной группы преобразований $\psi(y) \rightarrow \bar{\psi}(\bar{y})$ [3]

$$\psi = B^{\gamma_1}\bar{\psi}, \quad y = B^{\gamma_2}\bar{y} \tag{3.2}$$

где $B \neq 0$ – параметр преобразования, а γ_1 и γ_2 – неизвестные пока показатели степени. Преобразованное уравнение имеет вид

$$\bar{\psi}''' + B^{\gamma_1+\gamma_2}\bar{\psi}\bar{\psi}'' - B^{\gamma_1+\gamma_2}\bar{\psi}'^2 + B^{-\gamma_1+3\gamma_2}\lambda = 0$$

Требую его инвариантности относительно параметра преобразования B , найдем $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$, так что

$$\bar{\psi}''' + \bar{\psi}\bar{\psi}'' - \bar{\psi}'^2 + \bar{\lambda} = 0$$

где $\bar{\lambda} = B^{-4\gamma}\lambda$ – модифицированное собственное значение.

Граничные условия в первой точке в результате преобразования (3.2) не меняются: $\bar{y} = 0$, $\bar{\psi} = 0$, $\bar{\psi}' = 0$. Недостающим начальным условием при $\bar{y} = 0$ является, очевидно, условие на вторую производную $\bar{\psi}''$. Для получения этого условия потребуем выполнения равенства $\psi''(0) = B$ (недостающее начальное значение до преобразования равно параметру B преобразования). После выполнения (3.2) это дает $B^{3\gamma}\bar{\psi}''(0) = B$. Потребовав и в этом случае инвариантности относительно B , найдем $\gamma = 1/3$, в результате чего искомое начальное условие приобретает вид $\bar{\psi}''(0) = 1$.

Форма краевых условий (3.1) в конечной точке $y = 1$ после преобразования (3.2) такова:

$$\bar{\psi}(B^{1/3}) = 0, \quad \bar{\psi}''(B^{1/3}) = m_H / B \tag{3.3}$$

Описанные действия позволяют дать следующую схему построения спектра $\lambda = \lambda(m_H, 0)$ краевой задачи (3.1). Задается значение $\bar{\lambda} \in (-\infty, +\infty)$ модифицированного коэффициента давления, и задача Коши

$$\bar{\psi}''' + \bar{\psi}\bar{\psi}'' - \bar{\psi}'^2 + \bar{\lambda} = 0 \quad (3.4)$$

$$\bar{\psi}(0) = 0, \quad \bar{\psi}'(0) = 0, \quad \bar{\psi}''(0) = 1$$

интегрируется до тех пор, пока не будет выполнено условие $\bar{\psi} = 0$. Пусть это происходит при некотором значении аргумента $\bar{y} = \bar{y}_0$. В соответствии с первым условием (3.3) получаем отсюда значение параметра преобразования: $\bar{y}_0 = B^{1/3}$, $B = \bar{y}_0^3$. Далее, по второй производной решения задачи (3.4) в этой точке находим значение числа Марангони: $m_H = B\bar{\psi}''(\bar{y}_0) = \bar{\psi}''(\bar{y}_0)\bar{y}_0^3$. И наконец, получаем собственное значение исходной задачи (3.1) в виде $\lambda = B^4\bar{\lambda} = \lambda\bar{y}_0^4$.

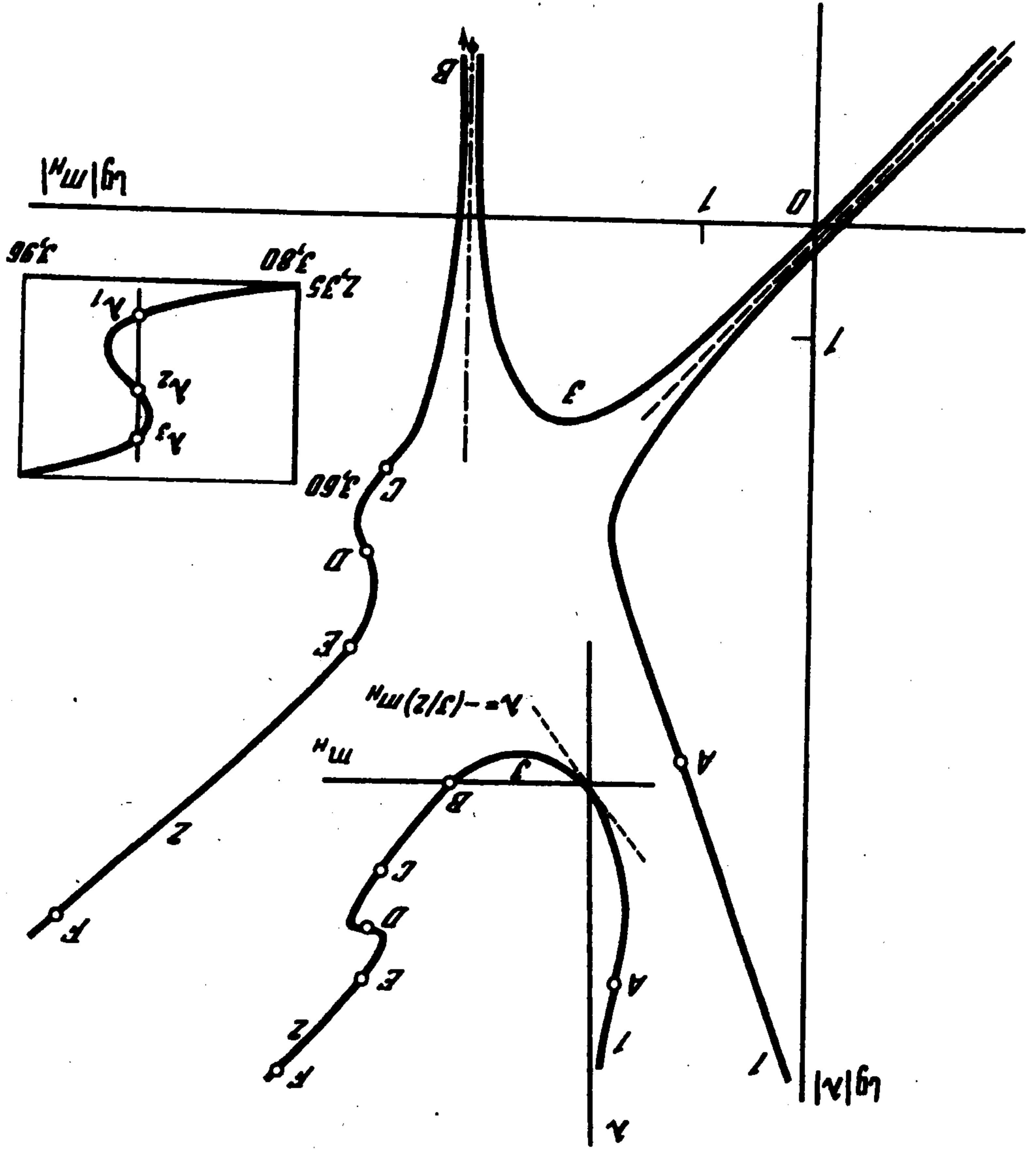
Отметим, что в процессе реализации описанного алгоритма учитывалась возможность неединственности корня \bar{y}_0 уравнения $\bar{\psi}(\bar{y}) = 0$. Кроме того, поскольку знак параметра B преобразования (3.2) может быть любым, интегрирование начальной задачи (3.4) должно быть отдельно выполнено в областях $\bar{y} \in [0, +\infty)$ и $\bar{y} \in (-\infty, 0]$.

На фиг. 1 схематически представлено поведение функции $\bar{\psi}(\bar{y})$ при $\bar{y} \in [0, +\infty)$ в зависимости от значения модифицированного коэффициента давления $\bar{\lambda}$. Видно, что в промежутке $\bar{\lambda} \in (\bar{\lambda}_*, +\infty)$ ($\bar{\lambda}_* \in (0,75667; 0,75668)$) имеется два корня \bar{y}_{0i} ($i = 1, 2$) уравнения $\bar{\psi}(\bar{y}) = 0$ (кроме начального значения $\bar{y} = 0$) с различными знаками $\bar{\psi}''(\bar{y}_{0i})$, порождающие соответствующие ветви спектра $\lambda = \lambda(m_H, 0)$ для отрицательных (\bar{y}_{01}) и положительных (\bar{y}_{02}) чисел Марангони. В промежутке $\bar{\lambda} \in (-\infty, \bar{\lambda}_*)$ функция $\bar{\psi}(\bar{y})$ не имеет нулей при $\bar{y} \in (0, +\infty)$. В предельном случае $\bar{\lambda} \rightarrow +\infty$ она может быть аппроксимирована в правой окрестности точки $\bar{y} = 0$ кубической кривой $\varphi(\bar{y}) = -\bar{\lambda}\bar{y}^3/6 + \bar{y}^2/2$, что дает $\bar{y}_{01} \sim 3/\bar{\lambda}$, $\lambda \sim 81/\bar{\lambda}^3$, $m_H \sim -54/\bar{\lambda}^3$, т.е. $\lambda_{m_H \rightarrow 0} \sim \frac{3}{2}m_H$ и соответствует найденной в [2] асимптотике (1.5) при $m_H < 0$ (ветвь 1 на фиг. 3).

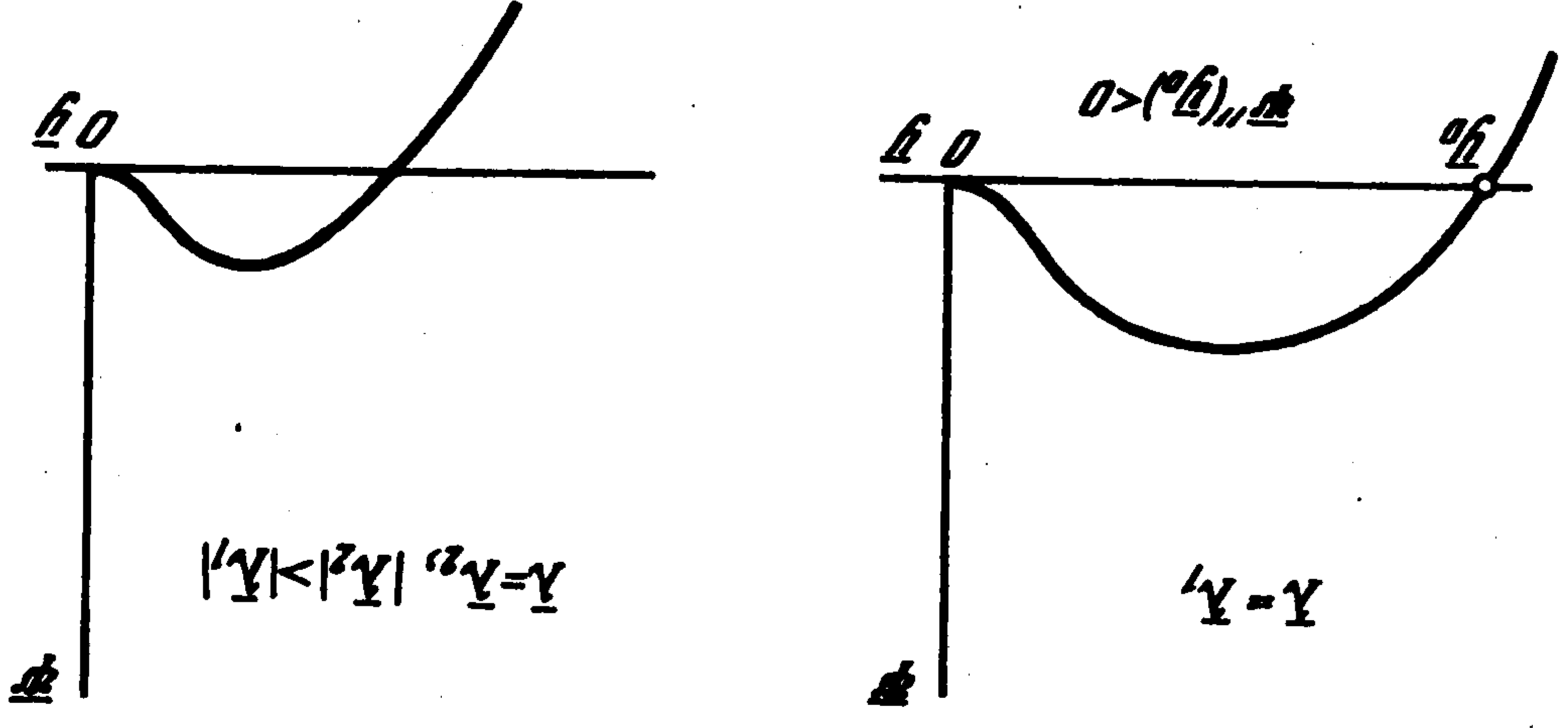
В случае $\bar{y} \in (-\infty, 0)$ уравнение $\bar{\psi}(\bar{y}) = 0$ имеет единственный корень \bar{y}_0 при любом значении модифицированного коэффициента давления $\bar{\lambda} \in (-\infty, +\infty)$, причем $\bar{\psi}''(\bar{y}_0) < 0$, $m_H > 0$. Поведение функции $\bar{\psi}(\bar{y})$ в этом случае изображено схематически на фиг. 2. Значения $\bar{\lambda} \geq 0$ вместе с корнем \bar{y}_{02} (см. выше) дают ветвь 2 зависимости λ ($m_H, 0$), соответствующую положительным числам Марангони. Значения $\bar{\lambda} < 0$ порождают ветвь 3 спектра при $m_H > 0$, один из концов которой соответствует асимптотике (1.5), а другой при $\bar{\lambda} \rightarrow 0 - 0$ стремится к общей с ветвью 2 вертикальной асимптоте при $\lg m_H \cong 3,0582$.

Построенный численно спектр $\lambda(m_H, 0)$ изображен схематически на фиг. 3 в логарифмических координатах. Эта же зависимость в координатах (m_H, λ) представлена в верхней части фиг. 3. Сравнение полученных численных результатов и асимптотической теории [2] при $m_H \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ для функции $\psi'(y) = \bar{y}_0^2\bar{\psi}'(\bar{y})$, характеризующей продольную компоненту u скорости жидкости в слое при $m_H \cong -5,4046 \cdot 10^{-11}$, $\lambda = 8,1061 \cdot 10^{-11}$ ($\lambda = 10^4$, ветвь 1), показывает, что относительное отклонение расчетного профиля от асимптотического при выбранном значении числа Марангони не превосходит 0,1%. Компонента u отличается от

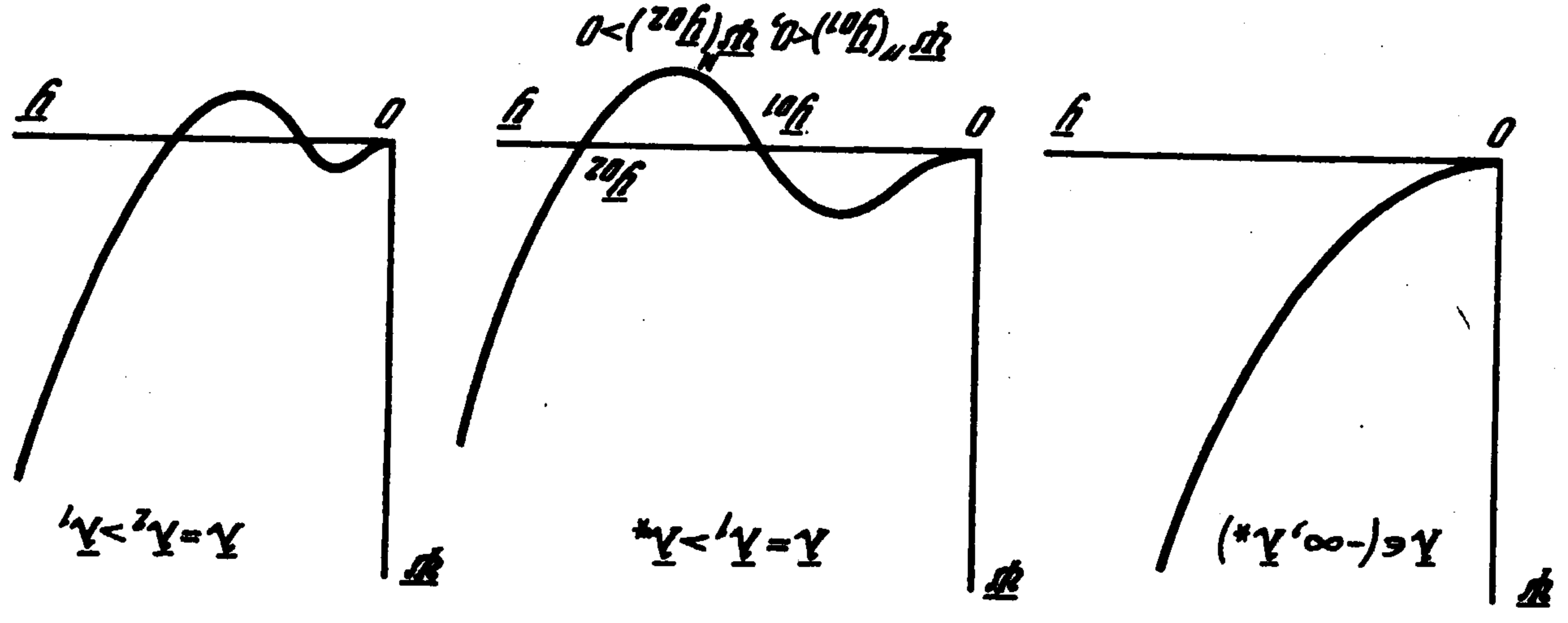
Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 1



$\psi'(y)$ множителем xv/H , так что в вертикальных сечениях слоя, равноотстоящих от плоскости $x = 0$, являющейся поверхностью тока, профили скорости и зеркально симметричны.

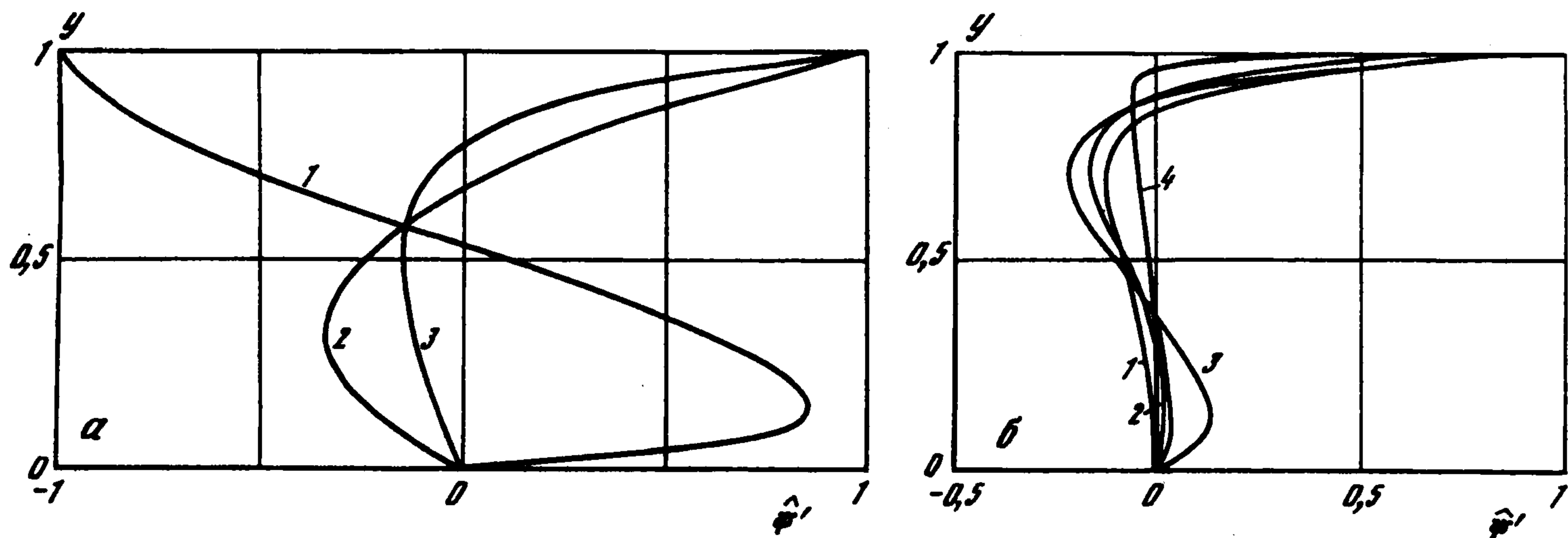
Одной из характерных особенностей нелинейных задач рассмотренного типа является неединственность решения, возможность которой обсуждалась [2] на основании аналогии между краевой задачей (1.2)–(1.4) и задачей, исследованной численно в работе [4], где рассматривалось течение жидкости в плоском и цилиндрическом каналах со стенками, испытывающими линейное растяжение с постоянной скоростью. Установлено [4], что фиксированному значению числа Рейнольдса может соответствовать от одного до трех значений коэффициента давления, а в осесимметричном случае в некотором диапазоне чисел Рейнольдса решение вообще отсутствует.

Выше установлено, что спектр $\lambda(m_H, 0)$ задачи (3.1) обладает аналогичными свойствами. В частности, на ветви 1 ($m_H < 0$) имеется не более двух решений в рассматривавшемся диапазоне модифицированных собственных чисел $\bar{\lambda} \in (0, 75668; 10^4)$ (первому значению, близкому к $\bar{\lambda}_*$, соответствуют $\lambda \cong 6,9111 \cdot 10^{11}$, $m_H \cong -0,13553$, а второму — $\lambda \cong 8,1061 \cdot 10^{-11}$, $m_H \cong -5,4046 \cdot 10^{-11}$, так что изображающая точка фактически лежит на асимптоте (1.5) — штриховая линия на фиг. 3). При достаточно больших по модулю отрицательных значениях числа Марангони ($\lg|m_H| \cong 1,685$) краевая задача (3.1) не имеет решений ни при каких λ , что физически означает невозможность осуществления установившегося режима течения.

На ветвях 2, 3 ($m_H > 0$) имеется от одного до трех значений собственного числа λ , отвечающих фиксированному значению числа Марангони (на ветви 3 — одно решение). Участок ветви 2 с неединственным решением представлен в увеличенном масштабе на фиг. 3. Отметим также, что имеется не менее двух решений с нулевым собственным значением: одно соответствует асимптотике (1.5), $m_H = 0$, а второе — значению числа Марангони $m_H \cong 1143,3$ (общая вертикальная асимптота ветвей 2 и 3).

4. Структура течения. Данные о характере циркуляции жидкости, возникающей в слое в результате действия термокапиллярных сил, представлены на фиг. 4. Профили горизонтальной компоненты скорости изображены для ряда характерных точек спектра $\lambda(m_H, 0)$ (по оси абсцисс отложены значения функции $\hat{\psi}'(y) = \psi'(y) / \max_{y \in [0,1]} \psi'(y)$). Кривая 1 на фиг. 4, а соответствует точке А на ветви 1

($\bar{\lambda} = 0,78$; $m_H < 0$). Противоток в слое возникает примерно в середине его глубины, причем максимумы скорости в противоположных направлениях близки по величине. На фиг. 4, а сравниваются также скоростные профили, соответствующие двум



Фиг. 4

решениям для нулевого собственного числа: предельный профиль из [2] при $\lambda \rightarrow 0$, $m_H \rightarrow 0$ (кривая 2) и профиль, отвечающий предельному положению точки B на фиг. 3: $\lambda = 0$, $m_H = 1143,3$ (кривая 3). Динамика изменения структуры потока при движении по ветви 2 ($m_H > 0$) отражена на фиг. 4, б кривыми 1–4, соответствующими точкам C, D, E, F ($\bar{\lambda} = 10^5$; 1,2; 0,9; 0,76). Наиболее интересная особенность – возникновение в потоке с ростом m_H структуры "трехслойного сэндвича" и тенденция приповерхностного разгона жидкости силами поверхностного натяжения относительно ее более медленно движущихся внутренних слоев при $m_H \rightarrow +\infty$.

Отметим в заключение, что, применяя процедуру продолжения по параметру [3], в качестве которого в рассматриваемой задаче выступает число Прандтля, можно проследить за эволюцией спектра $\lambda(m_H, 0)$ при ненулевых значениях Pr , когда тепловое и гидродинамическое поля взаимодействуют более сложным образом в соответствии с полной системой (1.2)–(1.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Subramanian R.S.* The motion of bubbles and drops in reduced gravity // Transport processes in bubbles, drops and particles. N.Y. etc.: Hemisphere, 1992. P. 1–42.
2. *Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С.* О термокапиллярном движении жидкости со свободной поверхностью при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 132–137.
3. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 294 с.
4. *Brady J.F., Acrivos A.* Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier – Stokes equations with reverse flow // J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 127–150.

Нижний Новгород, Москва

Поступила в редакцию
12.XII.1995