УДК 532.526

© 1996 г. В.Н. Диесперов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ СЛОЕВ СМЕШЕНИЯ

Рассматривается классическая задача об установившемся свободном слое смешения, образующемся в результате взаимодействия двух параллельных однородных потоков, движущихся с разными скоростями и соприкасающихся в некотором сечении. При дополнительном условии положительности первой производной решения в классе автомодельных функций изучается краевая задача при значениях параметра автомодельности $m > 0$, описывающая смешение двух вязких потоков одной и той же жидкости при $m = 1$ [1] и $m = 2$ [2]. Используемый метод исследования [3–5] позволяет свести нелинейное уравнение третьего порядка к уравнению первого порядка и построить соответствующие решения $\Phi(\zeta)$ в параметрической форме в зависимости от значений m. Знание поведения профиля скорости основного потока может быть использовано при исследовании устойчивости течения. Полученные результаты лежат в основе последующего построения решения задачи Лока [6] и исследования единственности найденных решений.

Как известно [1, 7–9], течение в слое смешения описывается уравнением пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления. Последнее допускает класс автомодельных решений. Автомодельная функция $\Phi(\zeta)$ (ζ – автомодельная переменная) удовлетворяет известному нелинейному дифференциальному уравнению, коэффициенты которого содержат параметр автомодельности m [3–5].

Решение краевой задачи, которая описывает течение в слое смешения, ищется в классе автомодельных функций при $m = 1$ [1, 3–5]. В дальнейшем эта задача при $m = 1$ была обобщена [6] на случай смешения двух плоскопараллельных потоков жидкости, имеющих разные плотности и коэффициенты вязкости. Как показывают эксперименты [8], слой смешения на поверхности контакта двух разных сред часто оказывается более устойчивым, чем свободный слой смешения в однородной жидкости.

В связи с развитием теории свободного взаимодействия появились также неклассические задачи для слоев смешения со значениями $m \in (1, 2]$ [2, 10–12]. Было исследовано [2] течение в окрестности задней кромки пластины, когда с нее сходят два вязких потока одной и той же жидкости с разными скоростями. Течение в возникающем несимметричном следе Гольдштейна описывается краевой задачей, которой должна удовлетворять автомодельная функция $\Phi(\zeta)$ при $m = 2$.

Во всех перечисленных работах исследования проводились на основе численных и асимптотических методов. Вопрос о существовании и единственности решения остался открытым.

1. Течение несжимаемой жидкости в слоях смешения описывается в первом приближении уравнением пограничного слоя с нулевым градиентом давления для функции тока ψ

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) допускает решения в классе автомодельных функций [7–9]

$$\psi=\left[\frac{m}{m+1}\right]^{-1/2}x^{\frac{m}{m+1}}\Phi(\zeta),\quad \zeta=\left[\frac{m}{m+1}\right]^{1/2}yx^{-\frac{1}{m+1}}$$

Для определения $\Phi(\zeta)$ получается нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{m-1}{m}\left(\frac{d\Phi}{d\zeta}\right)^2-\Phi\frac{d^2\Phi}{d\zeta^2}=\frac{d^3\Phi}{d\zeta^3} \tag{1.2}$$

Краевые условия для уравнения (1.2) формулируются следующим образом [3–5]:

$$\Phi=b_1\zeta^m+\ldots,\ \ \zeta\to+\infty,\ \ b_1>0,\ \ m>0 \tag{1.3}$$

$$\Phi=0,\ \ \zeta=0 \tag{1.4}$$

$$\Phi=b_2(-\zeta)^m+\ldots,\ \ \zeta\to-\infty,\ \ b_2<0 \tag{1.5}$$

При $m = 1$ и $m = 2$ краевая задача типа (1.2), (1.3) – (1.5) исследовалась в работах [1, 2]. В описываемых ею физических задачах ось x ортогональной системы координат (x, y) совпадает с нулевой линией тока. Краевая задача (1.2), (1.3) – (1.5) имеет также самостоятельный математический интерес. Уравнение (1.2) инвариантно относительно преобразования сдвига. Его порядок поэтому понижается, если положить

$$f=\frac{d\Phi}{d\zeta}\left(\frac{d^2\Phi}{d\zeta^2}=f\frac{df}{d\zeta},\ \ \frac{d^3\Phi}{d\zeta^3}=f\left[\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2+f\frac{d^2f}{d\xi^2}\right],\ \ \xi\equiv\Phi\right)$$

Для определения $f(\xi)$ получается краевая задача

$$f\frac{d^2f}{d\xi^2}+\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2+\xi\frac{df}{d\xi}-\frac{m-1}{m}f=0 \tag{1.6}$$

$$f=mb_1^{\frac{1}{m}}\xi^{\frac{m-1}{m}}+\ldots,\ \ \xi\to+\infty;\ \ f=m(-b_2)^{\frac{1}{m}}(-\xi)^{\frac{m-1}{m}}+\ldots,\ \ \xi\to-\infty$$

Уравнение (1.6) в свою очередь инвариантно относительно преобразования растяжения $f\to\alpha^2 f$, $\xi\to\alpha\xi$, $\alpha\neq 0$. Это означает, что порядок уравнения (1.6) понизится, если произвести подстановку

$$f=\xi^2F(\xi),\ \ \xi dF/d\xi=\Psi \tag{1.7}$$

В результате уравнение (1.2) сводится к уравнению первого порядка [3–5]

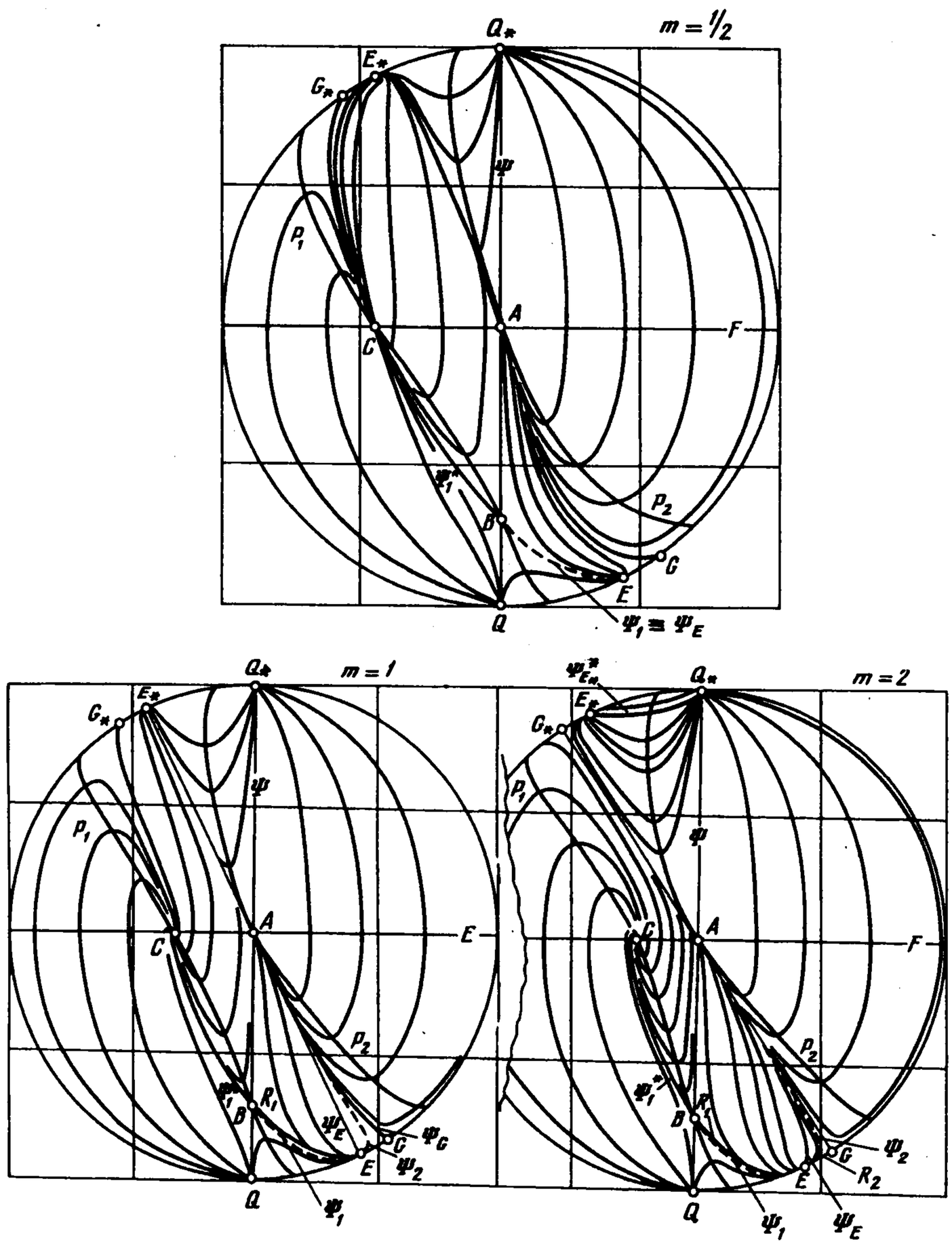
$$\frac{d\Psi}{dF}=-\frac{\Psi^2+7F\Psi+6F^2+\Psi+\frac{m+1}{m}F}{F\Psi}=-\frac{P(F,\Psi)}{F\Psi} \tag{1.8}$$

Производные функций $f(\xi)$ и $\Phi(\zeta)$ связаны с F и Ψ соотношениями

$$\frac{d\Phi}{d\zeta}=\xi^2F,\ \ \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2}=\xi^3F(\Psi+2F),\ \ \frac{d^3\Phi}{d\zeta^3}=-\xi^4F(\Psi+\frac{m+1}{m}F) \tag{1.9}$$

$$\frac{df}{d\xi}=\xi(\Psi+2F),\ \ \frac{d^2f}{d\xi^2}=-\frac{(\Psi+2F)^2+\Psi+\frac{m+1}{m}F}{F}=-\frac{R(F,\Psi)}{F}$$

Уравнения $P = 0$ и $R = 0$ определяют кривые P_1, R_1, проходящие через точку B и P_2, R_2 – проходящие через точку A (фигура).



Таким образом, задача об исследовании интегральных кривых (ИК) уравнения (1.2) в результате последовательных групповых преобразований свелась к задаче об изучении картины поведения ИК уравнения первого порядка (1.8). Для ее построения необходимо знать характер особых точек уравнения (1.8) и найти, каким требованиям должны удовлетворять ИК, чтобы выполнялись поставленные граничные условия.

Уравнение (1.8) имеет три особые точки $A(0, 0)$, $B(0, -1)$, $C(-(m + 1)/6m, 0)$ в конечной части плоскости и три бесконечно удаленные. Их удобно обозначать $E - E_*$, $G - G_*$, $Q - Q_*$, так как каждая из этих особых точек на экваторе единичной полусферы Пуанкаре расслаивается на две тождественные, лежащие симметрично относительно центра. Те из них, в которые кривые входят или выходят при $\Psi < 0$, обозначим через E, G, Q, а при $\Psi > 0$ – через E_*, G_*, Q_*. Полусфера затем проектируется на единичный круг (фигура) на котором особые точки $E - E_*$, $G - G_*$ и $Q - Q_*$ имеют координаты $(\pm 1/\sqrt{5} \mp 2/\sqrt{5}), (\pm 2/\sqrt{3}, \mp 3/\sqrt{13})$ и $(0, \mp 1)$ соответственно. Ось $F = 0$ интегральные кривые уравнения (1.8) могут проходить только через особые точки A, B, $Q - Q_*$.

Изучим поведение ИК уравнения (1.8) в окрестностях особых точек.

Особая точка $A(0, 0)$. Особая точка A характеризуется тем, что одно из характеристических чисел уравнения (1.8) равно нулю, а другое отлично от нуля. Обозначим области, в которых $d\Psi/dF < 0$ через $\Omega = \{F > 0, P(F, \Psi) < 0\}$, $\Omega_* =$

$= \{F < 0, \Psi > 0, P(F, \Psi) < 0\}$. ИК, попадающие в точку A, в некоторой ее окрестности принадлежат либо Ω, либо Ω_* [13–16]. Если $(F, \Psi) \in \Omega_*$, то в A входит единственная ИК, которую обозначим Ψ_A^*. Если ИК в области Ω попадает в некоторую окрестность точки A, то она обязательно при $F \to +0$ входит в точку A. Рассмотрим дугу KL радиуса $\rho(0 < \rho < 1)$, точка K которой лежит на отрицательной части оси Ψ, а L – на кривой P_2. Криволинейный сектор ALK, границей которого является отрезок AK, дуга KL и часть кривой P_2–AL, содержит одно исключительное направление [17, 18].

Используя технику, разработанную в [15–18], можно показать, что все ИК, попадающие в сектор ALK, при $F \to +0$ входят в точку A, касаясь прямой $\Psi = -[(m + 1)/m]F$. Сделаем замену $\Psi = [-(m + 1)/m + \omega]F$. Для функции $\omega(F)$ получаем уравнение

$$F^2 \frac{d\omega}{dF} = \left[\omega + \frac{(m-1)(m-2)}{m^2} F + \frac{3m-4}{m} F\omega + 2\omega^2 F\right] \left(\frac{m+1}{m} - \omega\right)^{-1} \tag{1.10}$$

Из сказанного выше вытекает, что $\omega(F) \to 0$ при $F \to +0$. Уравнение (1.10) в окрестности точки (0, 0) является уравнением Бендиксона [13, 16]. Отсюда следует, что существует окрестность точки (0, 0), в которую попадают все ИК уравнения (1.8) из сектора ALK и достигают (0, 0), касаясь прямой $\omega = -[(m - 1)(m - 2)/m^2]F$. Это означает, что любая ИК, содержащаяся в секторе ALK, при $F \to +0$, имеет вид $\omega = [(m - 1)(m - 2)/m^2]F + \omega_1(F)F$. Функция $\omega_1(F) \to 0$ при $F \to +0$ и в некоторой окрестности точки (0, 0) опять удовлетворяет уравнению Бендиксона.

Следовательно, для любой ИК, попадающей в точку A при $F \to +0$, при некотором $\delta_0 > 0$ справедливо представление

$$\Psi = -\frac{m+1}{m} F - \frac{(m-1)(m-2)}{m^2} F^2 + \omega_2(F), \quad \omega_2(F) = O(F^3) \tag{1.11}$$

$F \in [0, \delta_0]$

Выделим одну из ИК $\Psi = \mu(F)$ и выясним, как остальные ИК уравнения (1.8) отличаются от нее при $F \to +0$. Будем искать решение уравнения (1.8) в виде $\Psi = \mu + v$. Подстановка в уравнение (1.8) дает

$$E\mu \frac{dv}{dF} = -\left(1 + 7F + 2\mu + F\frac{d\mu}{dF}\right)v - v^2 - Fv\frac{dv}{dF} \tag{1.12}$$

Решение усеченного уравнения (1.12), полученного отбрасыванием нелинейных членов, имеет вид

$$v = Cv_0 = C\omega_3(F)F^l \exp\left[-\frac{m}{m+1}F^{-1}\right], \quad \omega^3(F) = 1 + O(F) \tag{1.13}$$

$$l = \frac{3m^2 + 4m - 5}{m(m+1)}, \quad C = \text{const}, \quad F \in (0, \delta_0]$$

Все встречающиеся ниже функции вида $F^q v_0(F)$ (величина q произвольна) в нуле доопределяются по непрерывности нулем. Положим $v = C(F)v_0$. Для определения $C(F)$ получаем интегральное уравнение

$$C(F) = A(C; D)$$

$$A(C; D) = -\int_0^F F^{-1}\mu^{-1} \frac{d(Fv_0)}{dF} \frac{C^2}{1 + \mu^{-1}v_0 C} dF + D, \quad D = \text{const} \tag{1.14}$$

Рассмотрим пространство непрерывных функций на отрезке [0, δ] с метрикой $\|\varphi\| = \sup|\varphi|$, $F \in [0, \delta]$. Обозначим через L ограниченное и замкнутое множество функций, удовлетворяющих условиям

$$\|\varphi(F) - D\| \leqslant M, \quad \varphi \in C[0,\delta], \quad M = \text{const}$$

Покажем, что оператор $A(\varphi; D)$ сжимает L. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись одновременно соотношения (1.11), (1.13) и

$$\int_0^\delta \left| F^{-1}\mu^{-1}\frac{d(Fv_0)}{dF}\right| dF \leqslant \frac{Mq_1^2(1-q_2)^2}{(|D|+M)^2}, \quad 0 < q_1^2 < \frac{1}{3}$$

$$\left|\mu^{-1}\right| v_0(|D|+M) \leqslant q_1 < 1$$

Тогда имеем

$$\varphi \in L \to A(\varphi; D) \in C[0,\delta], \quad \|A(\varphi, D) - D\| \leqslant M$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in L \to \|A(\varphi_1; D) - A(\varphi_2; D)\| \leqslant \theta^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad \theta^2 < 1$$

Отсюда вытекает, что уравнение (1.14) имеет единственное решение $C^*(F) \in L$, $F \in [0, \delta]$. Следовательно, любое решение уравнения (1.8) в области Ω при $F \to +0$ можно представить в виде

$$\Psi = \mu(F) + Dv_0 - v_0 \int_0^F \tau^{-1}\mu^{-1}\frac{d(\tau v_0)}{d\tau}\frac{C^{*2}}{1+\mu^{-1}v_0 C^*}\, dF = \mu(F) + Dv_0 + o(v_0) \tag{1.15}$$

Из дальнейшего станет ясно, что в качестве $\Psi = \mu(F)$ лучше всего брать ИК Ψ_E, которая будет определена ниже.

Асимптотическое поведение решений уравнения (1.8) при $\zeta \to +\infty$, соответствующих (1.5), будет следующим [3–5]:

$$\Phi = b_1(\zeta + l_A)^m - \frac{(m-1)(m-2)}{m+1} O\left[(\zeta + l_A)^{-(m+2)}\right] + \tag{1.16}$$

$$+ D_2(\zeta + l_A)^{\beta_1} \exp\left[-\frac{b_1}{m+1}(\zeta + l_A)^{m+1}\right], \quad \beta_1 = -\frac{3m^2 + 5m - 4}{m+1}; \quad D_2, l_A = \text{const}$$

Особая точка B. Особая точка B – седло. Через нее при любом $m > 0$ проходит единственная ИК, которая при $F \to 0$ описывается разложением [3–5]

$$\Psi = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k F^k, \quad b_1 = -\frac{6m-1}{2m}, \quad b_2 = \frac{1}{3}\left[2b_1^2 + 7b_1 + 6\right] \tag{1.17}$$

$$b_k = \frac{1}{k+1}\left[\frac{k+2}{2}\sum_{n=2}^{k} b_{k-1}b_{k-n+1} + 7b_{k-1}\right], \quad k \geqslant 3$$

Ее часть при $F > 0$ обозначим Ψ_1, а при $F \leqslant 0$ – Ψ_1^*. Решения уравнения (1.6), отвечающие разложению (1.17), представимы в виде

$$f = -c(\xi - c) - \frac{1}{4m}(\xi - c)^2 + O[(\xi - c)^3], \quad \xi \to c \neq 0 \tag{1.18}$$

Кривой Ψ_1 соответствуют решения, описываемые разложением (1.18) при $f > 0$, а кривой Ψ_1^* – при $f < 0$. Решения уравнения (1.2), соответствующие Ψ_1 и Ψ_1^* при $F \to 0$, при $c\zeta \to +\infty$ ведут себя следующим образом:

$$\Phi = c - \text{sign}(cf)\exp\left[-c(\zeta + l_B)\right] + \ldots, \quad l_B = \text{const} \tag{1.19}$$

В дальнейшем ζ с индексом означает некоторое конечное значение ζ, а C с индексом – постоянную.

Особая точка $E - E_*$. Для исследования бесконечно удаленной особой точки $E - E_*$ произведем в уравнении (1.8) замену переменных

$$2F - \frac{m-1}{m} = \frac{1}{t}, \quad \Psi = \frac{\sigma - 1}{t}$$

В результате σ и t получим уравнение

$$t(1-\sigma)(1+\frac{m-1}{m}t)\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma}{2} - 2\sigma^2 - \frac{5m-3}{2m}\sigma t - \tag{1.20}$$

$$-\frac{(2m-1)(m-1)}{m^2}t^2 - \frac{m-1}{m}t\sigma^2$$

Его решение при $0 \leqslant t < r\,(C_E)$ можно представить в виде сходящегося ряда (r – радиус сходимости) [3–5, 19]

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^{k/2} = C_E t^{1/2} J_1(t; C_E) + J_2(t; C_E)$$

$$J_1(t, C_E) = J_1(t; -C_E), \quad J_2(t; C_E) = J_2(t; -C_E), \quad 0 \leqslant t < r(C_E) \tag{1.21}$$

Аналогично строится решение при $t \to 0$. Из сказанного следует, что точка $E - E_*$ – узел. Согласно (1.21), решения уравнения (1.8) при $F \to +\infty$ в окрестности точки E ведут себя следующим образом:

$$\Psi = -2F + \frac{m-1}{m} + C_E\sqrt{2F - \frac{m-1}{m}} + \ldots, \quad F \to +\infty \tag{1.22}$$

Найдем, каким образом F зависит от ξ в окрестности точки E. Введем новую функцию τ, положив $t = \tau^2$. Для определения $\tau = \tau(\xi)$ из (1.7) получим уравнение, общим интегралом которого будет

$$\Phi(\xi, \tau; a, C_E) = a\xi - \tau \exp\left[\int_0^{\tau} \frac{z(\theta; C_E)d\theta}{\theta(1 - z(\theta; C_E))}\right] = 0, \quad a \neq 0$$

$$z(\tau; C_E) = C_E \tau J_1(\tau^2; C_E) + J_2(\tau^2; C_E) \tag{1.23}$$

Так как $z\,(\theta;\, C_E) = z\,(-\theta;\, -C_E)$, то

$$\Phi(\xi, -\tau; -a, -C_E) = -\Phi(\xi, \tau; a, C_E)$$

ИК, которые при $F \to +\infty$ описываются разложениями (1.22) с $C_E = \alpha > 0$, будем обозначать $\Psi = \Psi(F;\, \alpha)$, а с $C_E = \beta < 0$ – $\Psi = \Psi(F;\, \beta)$. Соответствующие им функции $z\,(\tau;\, C_E)$ через $z\,(\tau;\, \alpha)$ и $z\,(\tau;\, \beta)$.

Если мы находимся на кривой $\Psi = \Psi(F;\, \alpha)$ и $a = a_2 > 0$, то для определения зависимости τ от ξ служит уравнение (1.23). Его решением будет $\tau_2 = \xi\varkappa(\xi; a_2, \alpha), |\xi| < r_\varepsilon(a_2, \alpha)$, где $\varkappa$ – голоморфная функция и $\varkappa\,(0;\, a_2,\, \alpha) = a_2$.

Пусть мы находимся на кривой $\Psi = \Psi(F;\, \beta)$ и $a = a_1 < 0$. Зависимость τ от ξ найдем как решение уравнения (1.23). Обозначим его $\tau_1 = \xi\varkappa(\xi; a_1, \beta), |\xi| < r_E(a_1, \beta)$, $\varkappa(0; a_1, \beta) = a_1$.

Из непрерывности $f(\xi)$ и ее производной в точке ξ следует, что $a_1^2 = a_2^2$ и $\alpha\, a_2 = \beta a_1$. Так как α и β должны быть разных знаков, то решением этой системы будет $\beta = -\alpha$, $a_1 = -a_2$.

Положив $\beta = -\alpha$, $a_1 = -a_2 = -a_0 < 0$, из соотношения (1.23) получаем, что $\tau_1(\xi;-a_0,-\alpha) = -\tau_2(\xi,a_0,\alpha)$, $|\xi| < r_E(a_0,\alpha)$.

Отсюда, используя (1.7), имеем

$$f_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{m-1}{m}\xi^2 + \varkappa^{-2}(\xi;-a_0,-\alpha)\right],\ f_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m-1}{m}\xi^2 + \right. \tag{1.24}$$

$$\left. +\varkappa^{-2}(\xi;a_0,\alpha)\right],\ f_1 \equiv f_2,\ 0 \leqslant |\xi| < r_E(a_0,\alpha)$$

Следовательно, каждое дважды непрерывно дифференцируемое решение $f(\xi)$ в окрестности точки ($\xi = 0, f(0) \neq 0$) отображается в окрестности точки E на две ИК $\Psi = \Psi(F; -\alpha)$, $\Psi = \Psi(F; \alpha)$, объединение которых также будем называть ИК. Обратно, если продолжить ИК $\Psi = \Psi(F; -\alpha)$ ИК $\Psi = \Psi(F; \alpha)$, то в классе дважды непрерывно-дифференцируемых функций соответствующие им решения в окрестности точек ($\xi = 0, f(0) \neq 0$) будут описываться разложениями (1.24). В плоскости (ζ, Φ) соответствующие им решения уравнения (1.2) имеют вид

$$\Phi = \frac{a_0^{-2}}{2}(\zeta - \zeta_E) + \frac{a_0^{-3}}{4}\alpha(\zeta - \zeta_E)^2 + \frac{m-1}{24m}a_0^{-4}(\zeta - \zeta_E)^3 + \ldots \tag{1.25}$$

Обратно, каждое решение $\Phi(\zeta)$ уравнения (1.2) в окрестности точки $\zeta = \zeta_E$, $\Phi(\zeta_E) = 0$ с $d\Phi/d\zeta_E > 0$ изображается в соответствующей окрестности точки E двумя ветвями ИК уравнения (1.8) с $C_E = \alpha > 0$ и $C_E = \beta = -\alpha < 0$.

Если $\beta \neq -\alpha$ и первая производная $\Phi'(\zeta)$ непрерывна, то при прохождении точки E описанным выше способом вторая производная $\Phi''(\zeta)$ будет терпеть разрыв в точке $\zeta = \zeta_E$.

При прохождении точки E_* описанным выше способом соответствующие решения уравнения (1.2) в окрестности точек оси ζ ведут себя следующим образом:

$$\Phi = -\frac{a_0^{-2}}{2}\left(\zeta - \zeta_{E_*}\right) + \frac{a_0^{-3}}{4}C_{E_*}\left(\zeta - \zeta_{E_*}\right)^2 + \frac{m-1}{24m}a_0^{-4}(\zeta - \zeta_{E_*})^3 + \ldots \tag{1.26}$$

ИК, выходящую из E при $F \to +\infty$ и описываемую (1.22) с $C_E = 0$, обозначим Ψ_E. Каждое из соответствующих ей решений уравнения (1.2) описывается разложением (1.25) с $\alpha = 0$.

Аналогично определяется ИК Ψ_{E_*}. Ей в плоскости (ζ, Φ) соответствуют кривые, описываемые (1.26) с $C_{E_*} = 0$.

Особая точка $Q - Q_*$. Особая точка $Q - Q_*$ – узел. В ее окрестности ИК ведут себя так:

$$\Psi = \frac{C_Q}{F} - 1 + \ldots,\ F \to 0,\ C_Q \neq 0$$

В плоскости (ζ, Φ) точка $Q - Q_*$ соответствует точкам локального экстремума решений уравнения (1.2). В окрестности точки экстремума $\zeta = \zeta_Q$ решение представимо в виде

$$\Phi = c + \frac{C_Q c^3}{2}\left(\zeta - \zeta_Q\right)^2 - \frac{C_Q c^4}{6}\left(\zeta - \zeta_Q\right)^3 + \ldots$$

Из этого разложения видно, что при переходе через точку $Q - Q_*$ постоянная C_Q должна сохраняться. Пусть, например, ИК попадает в точку Q с $C_Q < 0$ при $F \to +0$. Чтобы получить решение $\Phi(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = \zeta_Q$, необходимо выйти из точки Q_* вдоль ИК с $C_{Q_*} = C_Q$ при $F \to -0$.

Особая точка $G - G_*$. Особая точка $G - G_*$ – седло. В нее при $F \to +\infty$ входит единственная ИК

$$\Psi_G = -\frac{3}{2}F + \frac{m-2}{5m} + O(F^{-1}), \quad F \to +\infty, \quad m > 0$$

В плоскости (ζ, Φ) ей соответствуют ИК, тождественно не равные нулю, которые касаются оси ζ [11, 12].

Особая точка C. Особая точка C при $m > m_* = (-17 + 12\sqrt{6}) / 23 > 1/2$ – фокус, а при $0 < m \leqslant m_*$ – узел. При приближении ИК $\Psi = \Psi(F)$ к особой точке C соответствующие ей в плоскости (ζ, Φ) ИК при $\zeta \to \zeta_c$ ведут себя следующим образом:

$$\Phi = \frac{6m}{m+1}(\zeta - \zeta_C)^{-1} + o\left[(\zeta - \zeta_C)^{-1}\right]$$

2. Таким образом, если ИК $\Psi = \Psi(F)$ при $F \to +0$ попадает в точку A при $\xi > 0$, то выполняется условие (1.3). Если она попадает в точку A при $\xi < 0$, то выполняется условие (1.5). Переход в точке $E - E_*$ с ИК $\Psi = \Psi(F; C_E)$ с $C_E = \alpha > 0$ на ИК $\Psi = \Psi(F; -\alpha)$ означает, что соответствующие ей ИК уравнения (1.2) пересекают ось ζ.

Если точка $E - E_*$ достигается вдоль Ψ_E или Ψ_{E_*}, то в нуль обращается одновременно $\Phi(\zeta)$ и $\Phi''(\zeta)$. Прохождение особой точки $Q - Q_*$ описанным выше способом показывает, что отвечающие ИК $\Psi = \Psi(F)$ решения уравнения (1.2) имеют локальный экстремум. При приближении ИК $\Psi = \Psi(F)$ к точке C соответствующие ей ИК уравнения (1.2) ведут себя как $Q[(\zeta - \zeta_c)^{-1}]$.

Было доказано [3–5], что кривая Ψ_1 при $m > 1/2$ входит в точку E с определенным значением $C_E = \beta^* < 0$. Продолжим ее кривой Ψ_2 с $C_E = -\beta^* = \alpha^* > 0$. Кривая Ψ_2 при $F \to +0$ попадает в точку A. Было также показано, что Ψ_G и Ψ_E при $m > 1/2$ и $F \to +0$ также достигают точки A (фигура).

Рассмотрим граничное условие

$$d\Phi / d\zeta \to 0, \quad \zeta \to -\infty \tag{2.1}$$

Краевая задача (1.2) – (1.4), (2.1) при $m = 1$ дает решение задачи Чепмена [20, 21], а при $m = 5/3$, 2 описывает течение в слое смешения, который возникает в теории локального отрыва [10–12].

Решение краевой задачи (1.2) – (1.4), (2.1) отображается на кривую $K = \Psi_1 \cup \Psi_2$ [3, 5]. В дальнейшем исследовании кривая K будет играть кардинальную роль. Поэтому рассмотрим решение задачи (1.2) – (1.4), (2.1) подробнее и найдем ее решение в параметрическом виде, считая поведение кривой K известным. В плоскости (ξ, f) кривым Ψ_1 и Ψ_2 соответствуют ИК, заданные параметрически

$$\Psi_1 : \xi = \frac{c_1}{\sqrt{F+1}} \exp \Delta_1, \quad f = \frac{c_1^2 F}{F+1} \exp(2\Delta_1)$$

$$\Delta_1(F) = \int_0^F \left[\frac{1}{\Psi_1} + \frac{1}{2(F+1)}\right] dF, \quad 0 \leqslant F < +\infty$$

$$\Psi_2 : \xi = \frac{c_2}{\sqrt{F}} \exp(-\Delta_2), \quad f_2 = c_2^2 \exp(-2\Delta_2)$$

$$\Delta_2(F) = \int_F^\infty \left[\frac{1}{\Psi_2} + \frac{1}{2F}\right] dF, \quad 0 \leqslant F < +\infty$$

Положим $c_1 < 0$ и $c_2 = -c_1 \exp[\Delta_1(\infty)]$. Тогда функция, обратная к функции

$$\zeta = \int_0^{\Phi} \frac{d\xi}{f(\xi)}, \quad f(\xi) = \begin{cases} f_1(\xi), & \xi \in (c_1, 0) \\ c_1^2 \exp[2\Delta_1(\infty)], & \xi = 0 \\ f_2(\xi), & \xi \in (0, \infty) \end{cases}$$

дает решение задачи (1.2) – (1.4), (2.1) при $m > 1/2$. Значения постоянных c_1 и b_1 связаны между собой:

$$c_1 = -m^{\frac{m}{m+1}} b_1^{\frac{1}{m+1}} \exp\left\{-\Delta_1(\infty) + \int_0^1 \left[\frac{1}{\Psi_2} + \frac{m}{(m+1)F}\right] dF + \Delta_2(1)\right\} = -k_1(m) b_1^{\frac{1}{m+1}} \tag{2.2}$$

Из сказанного следует, что решение задачи (1.2) – (1.4), (2.1) существует при $m > 1/2$ и единственно, как видно из условия (1.5) задачи (1.2) – (1.5), при $m \geqslant 1$. Чтобы выделить единственное решение при $m > 1/2$, вместо условия (2.1) можно потребовать $\Phi \to c + O[\exp(-c\,\zeta)]$, $c < 0$ при $\zeta \to -\infty$. Однако постоянная c связана с постоянной b_1 соотношением (2.2) и не может быть положена произвольной. Коэффициент k_1 в (2.2) при каждом m вычисляется один раз и навсегда. Так как особая точка B – седло, то условий $\Phi \to c < 0$ и $d\Phi/d\zeta > 0$, $\zeta \in (-\infty, +\infty)$ достаточно для выделения единственного решения при $m > 1/2$ [4, 22]. Если c взять равной c_1, то мы получим решение задачи (1.2) – (1.4), (2.1). Чтобы не вводить в краевые условия постоянную, которую необходимо определять в процессе решения, краевое условие при $\zeta \to -\infty$ можно сформулировать следующим образом: $(-\zeta)^{1+k^2}\Phi'(\zeta) \to 0$, $\zeta \to -\infty$ при любом k.

Все кривые, расположенные между Ψ_E и Ψ_1 в окрестности точки A, при $F \to +\infty$ попадают в точку E и продолженные описанным выше способом при $F \to +0$ возвращаются в точку A [4, 5]. Кривые, расположенные в окрестности точки А между Ψ_2 и Ψ_G, при $F \to +\infty$ попадают в точку E, затем продолженные, они при $F \to +0$ попадают в точку Q.

Докажем это. В некоторой малой окрестности точки B проведем дугу TD, соединяющую кривые P_1 и Ψ_1. Возьмем ИК $\Psi = \Psi(F)$, которая, выходя из точки E, в некоторой ее окрестности описывается разложением (1.21) или (1.22) при $C_E = \beta > \beta^*$. Возьмем некоторую точку (F_*, Ψ_*) на кривой $\Psi = \Psi(F; \beta)$ в окрестности точки E. Проведем прямую $F = F_*$. Она пересечет кривые Ψ_1 и P_1 в точках N и M. Рассмотрим область Ω_1, границей которой служат дуга TD, часть кривой $P_1 - TM$, часть кривой $\Psi_1 - DN$ и отрезок прямой $F = F_* - MN$. В области Ω_1 наклон ИК отрицателен.

При продолжении ИК она может пересечь границу области Ω_1 только в точках TD или TM. Если ИК пересекает TD, то она (при условии малости радиуса дуги TD) выйдет из сектора BTD через его сторону BT [15–17]. Таким образом, ИК $\Psi = \Psi(F)$ при ее продолжении обязательно пересечет кривую P_1 в некоторой точке (F_0, Ψ_0). Возьмем кривую

$$\Psi_\gamma = -\left(C_\gamma F^{-2} - 3F^2 - \frac{2}{3}\frac{m+1}{m}F\right)^{1/2}, \quad F \in (0, F_0]$$

Постоянную C_γ выберем такой, чтобы кривая Ψ_γ проходила через точку (F_0, Ψ_0). При $F \to +0$ кривая Ψ_γ попадает в точку Q. Можно показать, что в точках кривой Ψ_γ справедливы неравенства

$$0 < \frac{d\Psi}{dF}(F, \Psi_\gamma) < \frac{d\Psi_\gamma}{dF}$$

Из неравенств следует, что любая интегральная кривая, выходящая из точки E ниже кривой Ψ_1, достигает точки Q при $F \to +0$. Продолженная через точку $Q - Q_*$, она попадает в область, в которой $F < 0$.

ИК, выходящие из точки A выше Ψ_G, сначала пересекают ось F, затем при $F \to +0$ приходят в точку Q_* и затем продолженные попадают в точку C.

3. Рассмотрим задачу (1.2) – (1.5) при $m > 1/2$ [4, 5] и дополнительном условии $d\Phi/d\zeta > 0, \zeta \in (-\infty, +\infty)$. Кривую, выходящую из точки A между кривыми Ψ_E и Ψ_2, обозначим Ψ_b, а между Ψ_E и осью $\Psi - \Psi_H$. Потребуем, чтобы кривые Ψ_b и Ψ_H были продолжением друг друга описанным выше способом через точку E. В плоскости (ξ, f) ИК Ψ_b будут соответствовать ИК

$$\xi = \frac{c_b}{\sqrt{F}} \exp[-\Delta_b(F)], \quad f_b = c_b^2 \exp[-2\Delta_b(F)], \quad c_b = \text{const}$$

$$\Delta_b = \int_F^\infty \left(\frac{1}{\Psi_b} + \frac{1}{2F} \right) dF, \quad F \in (0, \infty)$$

Эти формулы будут также описывать ИК в плоскости (ξ, f), которые соответствуют Ψ_H, если в них вместо Ψ_b, Δ_b и c_b подставить Ψ_H, Δ_H и c_H ($c_H = \text{const}$).

Положим $c_b = -c_H$. Тогда можно показать, что функция

$$f(\xi) = \begin{cases} f_H(\xi), & \xi \in (-\infty, 0) \\ c_b^2, & \xi = 0 \\ f_b(\xi), & \xi \in (0, +\infty) \end{cases}$$

дважды непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (1.6). Постоянная $c_b > 0$. Тогда при $|\xi| \to \infty$ ($F \to +0$) имеем

$$f_b = \left\{ c_b \exp\left[-\int_0^1 \left[\frac{1}{\Psi_b} + \frac{m}{(m+1)F} \right] dF - \int_1^\infty \left[\frac{1}{\Psi_b} + \frac{1}{2F} \right] dF \right] \right\}^{\frac{m+1}{m}} \xi^{\frac{m-1}{m}} + \ldots \tag{3.1}$$

$$f_H = \left\{ -c_H \exp\left[-\int_0^1 \left[\frac{1}{\Psi_H} + \frac{m}{(m+1)F} \right] dF - \int_1^\infty \left[\frac{1}{\Psi_H} + \frac{1}{2F} \right] dF \right] \right\}^{\frac{m+1}{m}} (-\xi)^{\frac{m-1}{m}} + \ldots$$

Сравнивая найденные асимптотики с граничными условиями (1.6), получаем

$$b_2 = -b_1 \exp\left[-(m+1) \int_0^\infty \left(\frac{1}{\Psi_H} - \frac{1}{\Psi_b} \right) dF \right], \quad c_b > 0 \tag{3.2}$$

При $c_b < 0$ решением уравнения (1.6) будет также функция

$$f(\xi) = \begin{cases} f_b(\xi), & \xi \in (-\infty, 0); \\ c_b^2, & \xi = 0; \\ f_H(\xi), & \xi \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Если $c_b < 0$, то

$$b_2 = -b_1 \exp\left[(m+1) \int_0^\infty \left(\frac{1}{\Psi_H} - \frac{1}{\Psi_b} \right) dF \right], \quad c_b < 0 \tag{3.3}$$

Так как $\Psi_H^{-1} - \Psi_b^{-1} \geqslant 0$, то в случае (3.2) имеем $(-b_2) \leqslant b_1$, а в случае (3.3) – $(-b_2) \geqslant b_1$.

Решением задачи (1.2) – (1.5) является функция, обратная к

$$\zeta = \int_0^{\Phi} \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Psi_H} - \frac{1}{\Psi_b}\right] dF = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Psi_H} - \frac{1}{\Psi_E}\right] dF + \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Psi_E} - \frac{1}{\Psi_b}\right] dF = I_1 + I_2$$

Функции $I_1(\beta), I_2(-\beta), \beta \in (\beta^*, 0]$ являются монотонно убывающими и непрерывными. При $\beta = 0$ они равны нулю. Покажем, что функция $I_1(\beta)$ неограниченна. Проведем прямую $\Psi = -1$. Пусть на интервале $(0, F_\delta)$ решение $\Psi = \Psi_E(F)$ имеет асимптотическое представление (1.11), а прямая $F = F_\delta$ сначала пересекает Ψ_E, а затем $\Psi = -1$.

Точки пересечения прямой $F = F_\delta$ с Ψ_E и прямой $\Psi = -1$ обозначим соответственно L_1 и L_2. Область, ограниченную кривой Ψ_E и отрезками AB, BL_2, L_1L_2, обозначим Ω_2. Рассмотрим в ней дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi}{dF} = -\frac{\Psi_E^2 + 7F\Psi_E + 6F^2 + \Psi + \frac{m+1}{m}F}{F\Psi_E} = N(F, \Psi) \tag{3.4}$$

Его решением является $\Psi = \Psi_E(F)$. Интегральная кривая уравнения (3.4), выходящая из любой точки $(F_0, -1)$, $F_0 \in (0, F_\delta)$, расположена между Ψ_E и интегральной кривой уравнения (1.8), так как

$$-\frac{P(F, \Psi)}{F\Psi} > N(F, \Psi), \ (F, \Psi) \in \Omega_2$$

Уравнение (3.4) – линейное. Его общим решением является

$$\Psi = \Psi_E + D_E \exp\left[-\int_{F_0}^{F} \frac{1 + 7F}{F\Psi_E} dF\right], \ D_E = \text{const}$$

Через точку $(F_0, -1)$ проходит интегральная кривая

$$\tilde{\Psi} = \Psi_E - [1 + \Psi_E(F_0)] F_0^{-\beta_a} \exp\left[\frac{m}{(m+1)F_0}\right] \left[F^{\beta_a} \exp\left(\int_{F_0}^{F} \omega_2(F) dF\right)\right] \exp\left[-\frac{m}{(m+1)F}\right]$$

Оценим интеграл I_1:

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\Psi_H} - \frac{1}{\Psi_E}\right] dF \geqslant \int_0^{F_0} \left[\frac{1}{\tilde{\Psi}} - \frac{1}{\Psi_E}\right] dF + \int_{F_0}^{F_\delta} \left[-1 - \frac{1}{\Psi_E}\right] dF +$$

$$+ \int_{F_\delta}^{\infty} \left[\frac{1}{\tilde{\Psi}_H} - \frac{1}{\Psi_E}\right] dF \geqslant \frac{m}{m+1} \ln \frac{F_\delta}{F_0} + O(F_\delta - F_0)$$

Здесь $\tilde{\Psi}_H$ – интегральная кривая уравнения (1.8), проходящая через точку $(F_\delta, -1)$. При $F \to F_0$ величина $\beta \to \beta_*$. Следовательно,

$$\lim_{\beta \to \beta^*} I = \infty$$

так как функция $I_2(-\beta)$ $(\beta \in (\beta^*, 0])$ ограниченна. Значит, $(-b_1 / b_2) \in (0, \infty)$, и можно произвольно выбирать значения постоянных b_1 и b_2.

Таким образом, если задать отношение $(-b_1/b_2)$, то из формул (3.2) или (3.3) получим вполне определенные значения $C_E = \beta_0 < 0$ и $C_E = \alpha_0 = -\beta_0 > 0$ и тем самым выделим единственным образом пару интегральных кривых Ψ_H и Ψ_b. Этой паре в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций отвечает семейство решений краевой задачи (1.6), для которых соотношение $(-b_1/b_2)$ имеет одно и то же значение. Зная b_1 или b_2, определим c_b или c_H (при $c_b > 0$ из (3.1)) и получим единственное решение задачи (1.6). При $\xi = 0$ имеем

$$\frac{df_H}{d\xi} = \sqrt{2}c_H\beta_0, \quad \frac{df_b}{d\xi} = \sqrt{2}c_b\alpha_0 = (\sqrt{2}c_H\beta)$$

Следовательно, краевая задача (1.6) может быть заменена задачей Коши для уравнения (1.6) с начальными условиями

$$f(0) = c_b^2 (c_b \neq 0), \quad \frac{df}{d\xi}(0) = \sqrt{2}c_b\alpha_0, \quad \alpha_0 \in [0, \alpha^*)$$

После ее решения решение краевой задачи (1.2) – (1.5) определяется как функция, обратная к

$$\zeta = \int_0^{\Phi} \frac{d\xi}{f(\xi)} \tag{3.5}$$

Ее асимптотическое поведение при $|\zeta| \to \infty$ имеет вид

$$\Phi = b_1\left(\zeta + l_A^{(1)}\right)^m + \ldots, \quad \zeta \to +\infty; \quad l_A^{(1)} = -\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{m b_1^{\frac{1}{m}} \xi^{\frac{m-1}{m}}}\right] d\xi$$

$$\Phi = b_2\left(-\zeta + l_A^{(2)}\right)^m + \ldots, \quad \zeta \to -\infty; \quad l_A^{(2)} = -\int_{-\infty}^{0} \left[\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{m(-b_2)^{\frac{1}{m}} (-\xi)^{\frac{m-1}{m}}}\right] d\xi$$

Поведение производных решения (3.5) определяется по формулам (1.9). При $m = 1$ имеем $d\Phi/d\zeta > 0$, а также $d^2\Phi/d\zeta^2 > 0$, если $c_b > 0$ $d^2\Phi / d\zeta^2 < 0$, если $c_b < 0$.

Без дополнительного условия $d\Phi/d\zeta > 0$ решение краевой задачи (1.2) – (1.5) при $m > 1$ перестает быть единственным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17363).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lessen M.* On the stability of the laminar boundary layer between parallel streams // NACA Tech. Note. 1949. № 1929. 31 p.
2. *Daniels P.G.* Viscous mixing at a trailing edge // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1977. V. 30. Pt. 3. P. 319–342.
3. *Диесперов В.Н.* О существовании и единственности автомодельных решений, описывающих течение в слоях смещения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. Т. 6. С. 1341–1346.
4. *Диесперов В.Н.* Поведение автомодельных решений уравнения пограничного слоя с нулевым градиентом давления. М.: ВЦ АН СССР, 1986. 39 с.

5. *Диесперов В.Н.* Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смешения // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 403–414.
6. *Lock R.C.* The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1951. V. 4. Pt. 1. P. 42–57.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
8. *Батчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758.
9. Laminar boundary layer / Ed. by Rosenhead I. Oxford: Univ. Clarencton Press, 1963. 687 p.
10. *Нейланд В.Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
11. *Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В., Королев ГЛ.* Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. 255 с.
12. *Stewartson K., Williams P.G.* Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
13. *Bendixon I.O.* Sur les courbes definies par des equations differentielles // Acta Math. 1900. V. 24. 88 p.
14. *Хаимов Н.Е.* Исследование уравнения, правая часть которого содержит линейные члены // Учен. зап.физ.-мат. ф-та Душанбинского пед. ин-та. 1952. Т. 2. С. 3–31.
15. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.
16. *Sansone G., Conti R.* Non-linear differential equations. L.: Pergamon Press, 1964. 536 p.
17. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
18. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 351 с.
19. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979. 743 с.
20. *Chapman D.R.* Laminar mixing of a compressible fluid // Naca Report. 1949. № 1800. 19 p.
21. *Диесперов В.Н.* О течении в слое смешения Чепмена // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 305–309.
22. *Диесперов В.Н.* Некоторые решения уравнения Кармана, описывающие трансзвуковое обтекание точки излома профиля с криволинейной образующей // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 68–77.

Москва

Поступила в редакцию
21.II.1995