УДК 539.3

© 1996 г. С.В. Кузнецов

НЕКОТОРЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для сред с произвольной упругой анизотропией на основе метода мультипольных разложений [1] осуществляется построение сингулярных решений, соответствующих "двойным силам без момента", "центру растяжения – сжатия", "двойным силам с моментом", полученным ранее для изотропной среды [2, 3] дифференцированием фундаментального решения Кельвина.

1. Основные соотношения. Рассматривается анизотропная упругая среда, уравнения равновесия которой записываются в виде

$$\mathbf{A}(\partial_x)\mathbf{u} \equiv -\mathrm{div}_x \mathbf{C} \cdot\cdot \nabla_x \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{A}$ – матричный дифференциальный оператор уравнений равновесия, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\mathbf{C}$ – четырехвалентный тензор упругости. Предполагается, что исследуемая среда гиперупругая, а тензор $\mathbf{C}$ строго эллиптичен.

Фундаментальные решения уравнений (1.1) в R^3 в замкнутом виде известны лишь для некоторых частных видов упругой анизотропии [4]. При произвольной анизотропии среды для построения фундаментальных решений используют либо метод разложения на плоские волны [5], либо применяют метод мультипольных разложений [1]. И в том, и в другом случае используется интегральное преобразование Фурье, позволяющее преобразованное по Фурье фундаментальное решение (символ) записать в виде

$$\mathbf{E}^\wedge(\xi) = \mathbf{A}^\wedge(\xi)^{-1} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{A}^\wedge(\xi) \equiv (2\pi)^2 \xi \cdot \mathbf{C} \cdot \xi$ – символ дифференциального оператора уравнений (1.1). Формула (1.2) показывает, что символ $\mathbf{E}^\wedge$ положительно однороден степени –2 и строго эллиптичен, ввиду строгой эллиптичности тензора $\mathbf{C}$.

Для обращения по Фурье выражения (1.2) и построения собственно фундаментального решения осуществляется разложение символа $\mathbf{E}^\wedge$ в ряд по мультиполям (ряд по поверхностным сферическим гармоникам) [1]

$$\mathbf{E}^\wedge(\xi) = |\xi|^{-2} \sum_{n=0,2,4,\dots} \sum_k \mathbf{E}_{nk} Y_n^k(\xi'), \quad \xi' = \frac{\xi}{|\xi|} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{E}_{nk}$ – матричные коэффициенты, определяемые интегрированием по сфере единичного радиуса, Y_n^k – поверхностные сферические гармоники, всюду суммирование по k ведется от $k = 1$ до $k = 2n + 1$. Далее используется формула [6], определяющая обращение по Фурье символов интегральных операторов со слабой (интегрируемой) особенностью, что позволяет представить искомое фундаментальное решение также в виде мультипольного ряда:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-1} \sum_{n=0,2,4,\dots} \gamma_n \sum_k \mathbf{E}_{nk} Y_n^k(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$
$$\gamma_n = (-1)^n \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \tag{1.4}$$

(γ_n – множители перехода от пространства изображений к исходному пространству). Вопросы сходимости разложений вида (1.3), (1.4) рассмотрены в [1].

2. Сингулярные решения. *Двойная сила без момента.* Рассматривается система двух сил, расположенных на расстоянии h друг от друга и действующих вдоль одной прямой в противоположные стороны. Каждая из сил по величине равна P/h. Имея в виду, что поле смещений от единичной силы в безграничной среде определяется фундаментальным решением $\mathbf{E}$ и предполагая, что параметр h стремится к нулю, получим

$$\mathbf{u} = \nabla_n \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} P \tag{2.1}$$

($\mathbf{n}$ – вектор единичной длины, направленный вдоль линии действия сил).

Непосредственное дифференцирование выражения (1.4) для получения поля смещений $\mathbf{u}$ по (2.1) весьма сложно. Ситуацию можно упростить, если в (2.1) обе части преобразовать по Фурье:

$$\mathbf{u}^\wedge(\xi) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}^\wedge(\xi) \cdot \mathbf{n} P, \quad \mathbf{V}^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi \otimes \mathbf{E}^\wedge(\xi) \tag{2.2}$$

Видно, что тензорный (ранга 3) символ $\mathbf{V}^\wedge$ положительно однороден по ξ степени -1. Дальнейшие вычисления, связанные с методом мультипольных разложений, обсуждаются ниже.

Центр растяжения – сжатия. Так называется совокупность трех "двойных сил без момента", действующих вдоль трех взаимно ортогональных направлений. В соответствии с этим определением поле смещений в среде определяется выражением

$$\mathbf{u} = \operatorname{div}(\mathbf{E}) P \tag{2.3}$$

Преобразование Фурье обеих частей (2.3) можно представить также в терминах символа $\mathbf{V}^\wedge$

$$\mathbf{u}^\wedge(\xi) = \operatorname{tr} \mathbf{V}^\wedge(\xi) P \equiv V_{ij}^{\wedge j}(\xi) P \tag{2.4}$$

В формуле (2.4) используется правило суммирования по повторяющемуся индексу.

Двойная сила с моментом. Этот случай отличается от случая двойной силы без момента тем, что здесь противоположно направленные силы образуют пару сил. Поле перемещений в этом случае имеет вид

$$\mathbf{u} = \nabla_n \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\perp P \tag{2.5}$$

где $\mathbf{n}_\perp$ – вектор единичной длины, определяющий направление "плеча" пары, тогда как $\mathbf{n}$ – афинный вектор, указывающий направление действия одной из сил. Формуле (2.5) можно придать также кососимметричный вид

$$\mathbf{u} = (\nabla_n \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\perp - \nabla_{n_\perp} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) P / 2 \tag{2.6}$$

Преобразование Фурье выражения (2.6) дает

$$\mathbf{u}^\wedge(\xi) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}^\wedge(\xi) \cdot \mathbf{n}_\perp - \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{V}^\wedge(\xi) \cdot \mathbf{n}) P / 2 \tag{2.7}$$

Иногда этот случай нагружения называют "центром вращения относительно оси $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_\perp$" [7].

3. Поля смещений. Для определения поля смещений разложим символ $\mathbf{V}^\wedge$ в мультипольный ряд

$$\mathbf{V}^\wedge(\xi) = |\xi|^{-1} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \sum_k \mathbf{V}_{nk} Y_n^k(\xi') \tag{3.1}$$

По аналогии с (1.3) тензорные (ранга 3) коэффициенты $\mathbf{V}_{nk}$ определяются интегрированием символа $\mathbf{V}^\wedge$ по единичной сфере S:

$$\mathbf{V}_{nk} = \int_S \mathbf{V}^\wedge(\xi') Y_n^k(\xi') d\xi'$$

Обращение по Фурье мультипольного ряда (3.1) немедленно получается из (3.1) введением множителей Бохнера γ_n:

$$\begin{gathered} \mathbf{V}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \gamma_n \sum_k \mathbf{V}_{nk} Y_n^k(\mathbf{x}') \\ \gamma_n = i^n \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \end{gathered} \tag{3.2}$$

При этом ввиду (2.2) существенно, что суммирование в (3.2) осуществляется по сферическим гармоникам нечетных степеней.

В заключение остается осуществить свертку оператора $\mathbf{V}$ и домножить на P. Таким образом, с помощью мультипольного разложения символа $\mathbf{V}^{\wedge}$ удается построить поля смещений в анизотропной среде от действия основных сингулярных воздействий.

Автор благодарит Р.В. Гольдштейна за постановку и обсуждение задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (M7Y000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов С.В.* Фундаментальные решения уравнения Ламе для анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50–54.
2. *Dougall J.* A general method of solving the equations of elasticity // Proc. Math. Soc. Edinburgh. 1898. V. 16. № 1. P. 82–98.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
4. *Kroner E.* Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen // Z. Phys. 1953. V. 136. N 4. P. 402–410.
5. *Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н.* О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. Вып. 9. С. 783–791.
6. *Bochner S.* Harmonic Analysis and the Theory of Probability. Berkeley: Univ. Calif. Press, 1955. 176 p.
7. *Sternberg E., Eubanks R.A.* On the concept of concentrated loads and an extenssion of the uniqueness theorem in the linear theory of elasticity // J. Ration. Mech. Anal. 1955. V. 4. N 1. P. 135–168.

Москва

Поступила в редакцию
22.VIII.1994