

©1996 г. Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын

КОНЕЧНЫЕ ПРОГИБЫ И ПРОЩЕЛКИВАНИЕ ТОНКИХ УПРУГИХ ПОЛОГИХ ПАНЕЛЕЙ

Гордиться славою своих предков
не только можно, но и должно;
не уважать оную есть постыдное
малодушие.

А.С. Пушкин.

Обсуждается проблема нелинейного поведения и потери устойчивости стержней и оболочек при конечных прогибах. Подробно описывается одномерная модель, которая сыграла первостепенную роль в формулировке нелинейных проблем устойчивости. В этой связи авторы анализируют задачу Ивана Григорьевича Бубнова о поведении тонкой упругой цилиндрической панели, решенную им в 1902 г. и представляющую собой первое исследование по конечным прогибам тонких оболочек, и рассматривают значение этого результата для теории оболочек само по себе и в свете дальнейшего развития теории. Отмечается важное значение результатов И.Г. Бубнова в теории оболочек, к которым можно было бы присоединить и его решения по нелинейному поведению круговых пластин и плоских упругих панелей и, тем самым, считать его предшественником в формулировке уравнений конечных прогибов упругих тонкостенных поверхностей Фёпpla – Кармана – Маргерра.

На развитие теории тонких упругих оболочек конечного прогиба, особенно в связи с проблемой устойчивости, существенно повлияли работы в области нелинейного поведения и прощелкивания пологих плоских стержней. Именно эти работы позволили установить новый механизм потери устойчивости, происходящей при конечных прогибах за счет скачка прогиба – прощелкивания, в противовес эйлеровой потере устойчивости при малых прогибах.

Впервые этот процесс был описан С.П. Тимошенко [1] (1925 г.) в статье, посвященной потере устойчивости биметаллической плоской пологой синусоидальной полосы с жестко опертыми концами при равномерном по ее толщине и длине нагреве. Было установлено, что за счет изгиба и сжатия полосы в продольном направлении происходит ее прощелкивание в сторону центра кривизны при температуре

$$T_- = (1+c) \left[\frac{3}{16} \frac{l^2}{Hh} (\alpha_2 - \alpha_1) \right]^{-1} \quad (0.1)$$

где

$$c = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{(1-m)^{3/2}}{m}, \quad m = \frac{h^2}{3H^2}$$

H – высота подъема центральной оси полосы, h и l – ее толщина и длина, α_1 и α_2 – коэффициенты линейного температурного расширения слоев биметалла. При последующем охлаждении прощелкивание полосы совершается в противоположную сторону при температуре

$$T_+ = \frac{1-c}{1+c} T_- \quad (0.2)$$

Эти температуры по современной терминологии могут быть названы верхней T_- и нижней T_+ критической температурой. Тимошенко получил и выражения для прогибов, при которых происходит прощелкивание, полагая, что прогибы при этом изменяются вдоль оси по полуволне синуса. Таким образом, был описан новый механизм потери устойчивости, хорошо известный из практики использования биметаллических элементов термостатов и плоско-сферических флаконов для духов. В обсуждаемой статье внимание уделялось только элементам биметалла в термостатах; вместо биметаллического стержня введен эквивалентный однородный стержень. В ней очень тонко обойдены вопросы, которые при традиционном подходе привели бы исследователя в тупик. Эта статья была замечена специалистами по биметаллу, но совершенно проигнорирована специалистами по теории пластин и оболочек.

Спустя десять лет С.П. Тимошенко в статье "Выпучивание пологих стержней и слегка искривленных пластин" [2] рассмотрел пологий синусоидальный жестко опертый по концам стержень при равномерном поперечном давлении q , направленном к центру кривизны стержня. Он получил зависимость прогиба центральной оси стержня от поперечного давления, дал анализ форм равновесия стержня и их устойчивости (этот анализ представлен ниже в ином, чем у Тимошенко, виде) и определил значения нагрузки, при которой происходит прощелкивание стержня вниз (q_-) и вверх (q_+) относительно центра первоначальной кривизны. Поскольку в приближенное решение был введен параметр амплитуды прогиба жестко опертого нагруженного только поперечной нагрузкой стержня, то появилась возможность распространить это решение на другие случаи нагружения путем соответствующей замены этого параметра. Для биметалла приведены выражения критических температур, аналогичные (0.1) и (0.2). Отмечены предшествующие решения Навье [3] (1826 г.), Надаи [4] (1915 г.) и Бицено [5] (1929 г.) для случая воздействия центральной сосредоточенной силы на жестко опертый по концам пологий стержень. Однако в этих работах отсутствует описание всего процесса прощелкивания.

Установленный Тимошенко механизм прощелкивания стержня, найденные им критические значения нагрузок q_- и q_+ позволили взглянуть с этой точки зрения на проблему потери устойчивости тонких оболочек, а также получить первые результаты по нелинейному поведению сферической оболочки при равномерном радиальном давлении и цилиндрической круговой оболочки при равномерном продольном сжатии. Это работы Т.Кармана и Цзян Сюэ-сю [6, 7] (1939–41 гг.).

Результаты С.П. Тимошенко [2] были обобщены Э.И. Григолюком [8] (1951 г.) на случай несимметричного прощелкивания пологого стержня, и была установлена полная картина механики этого процесса. В работе [8] путем решения методом Бубнова уравнения конечного прогиба пологого синусоидального поперечно нагруженного равномерным давлением q стержня с жестко опертыми концами и представления прогиба в виде двухпараметрической функции

$$w = w_0 \sin \pi \xi + w_1 \sin 2\pi \xi \quad (\xi = x / l)$$

получены следующие соотношения:

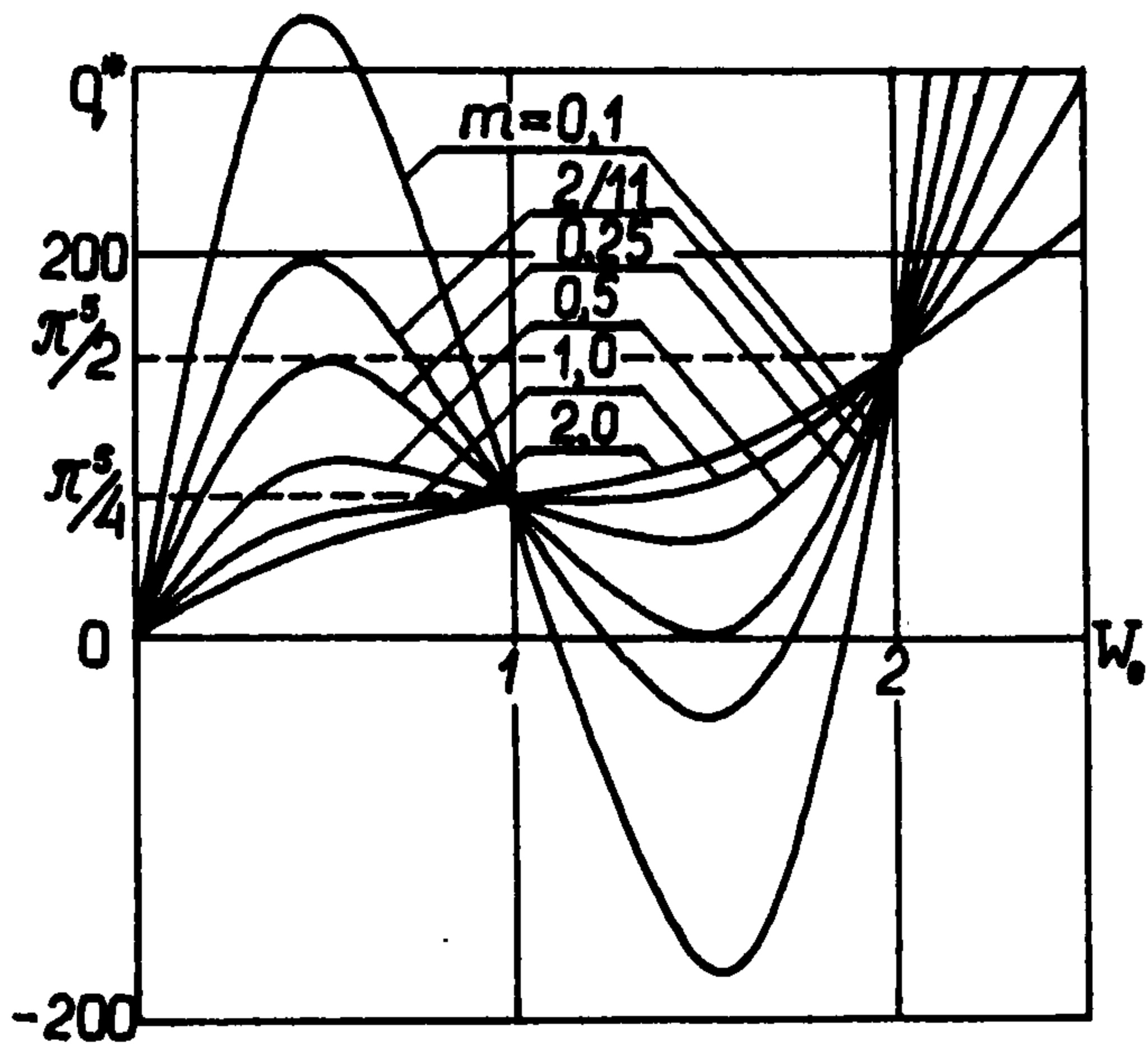
$$W_0^3 - 3W_0^2 + (4W_1^2 + 2 + m)W_0 - 4W_1^2 = \frac{4}{\pi^5} q^* m$$

$$W_1^3 + \left(\frac{1}{4} W_0^2 - \frac{1}{2} W_0 + m \right) W_1 = 0 \quad (0.3)$$

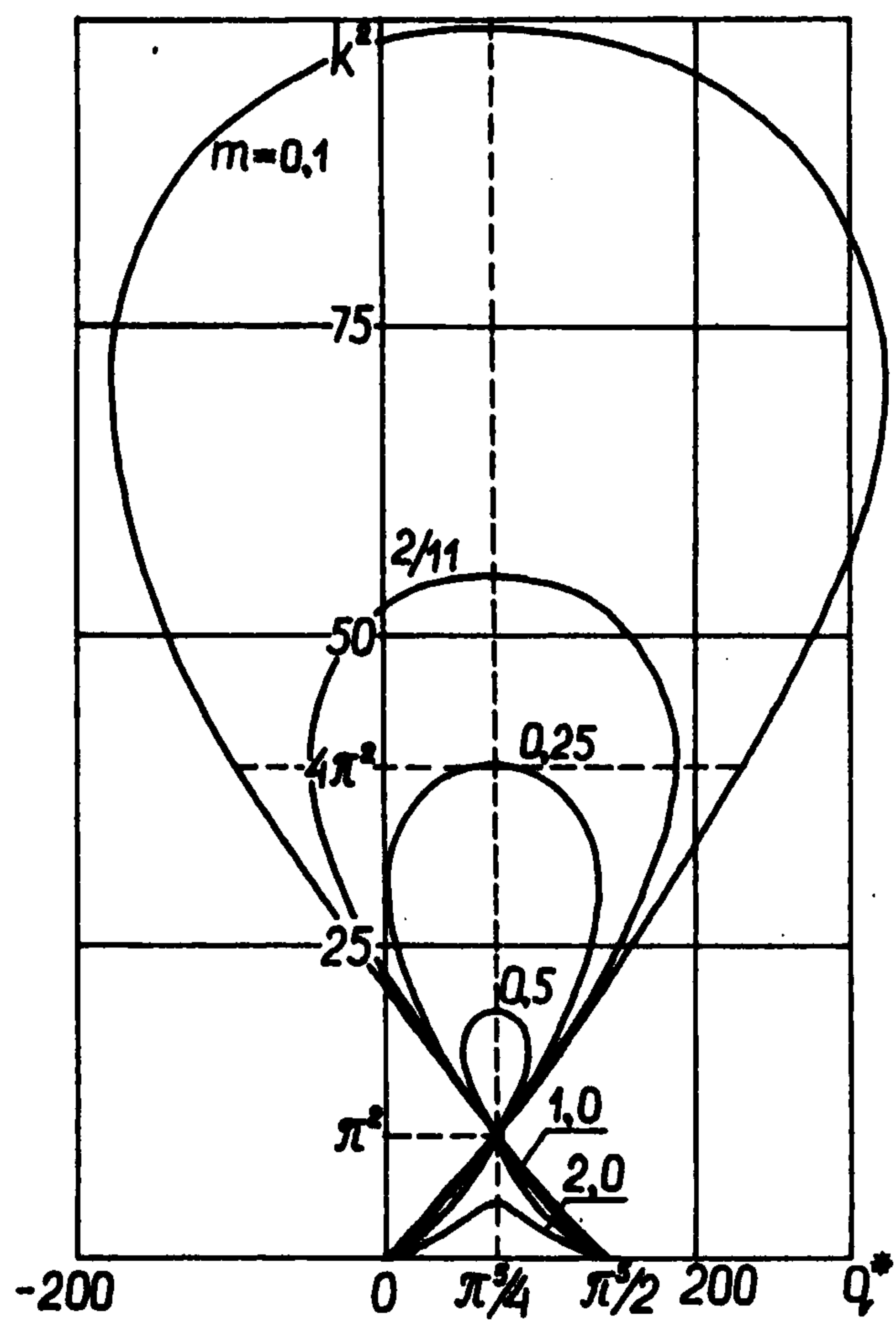
$$k^2 = -\frac{\pi^2}{m} (W_0^2 - 2W_0 + 4W_1)$$

$$W_0 = \frac{w_0}{H}, \quad W_1 = \frac{w_1}{H}, \quad q^* = \frac{ql^4}{EJH}, \quad m = \frac{4J}{FH^2}, \quad k^2 = -\frac{Nl^2}{EJ}$$

Здесь l – длина стержня, x – продольная координата, E – модуль Юнга, J – момент инерции поперечного сечения стержня, H – стрела подъема стержня, N – продольная сила, F – площадь поперечного сечения стержня.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из них при $W_1 = 0$ следует решение для осесимметричного прощелкивания стержня:

$$W_0^3 - 3W_0^2 + (2+m)W_0 = \frac{4}{\pi^5} q^* m, \quad k^2 = -\frac{\pi^2}{m} (W_0^2 - 2W_0)$$

$$q^{*2} - \frac{\pi^5}{2} q^* + \frac{\pi^4}{16} [mk^6 - (1+2m)\pi^2 k^4 + (2+m)\pi^4 k^2] = 0$$

которое дает следующие выражения для приведенных верхней q_+^* и нижней q_-^* критических нагрузок, полученных Тимошенко [2]:

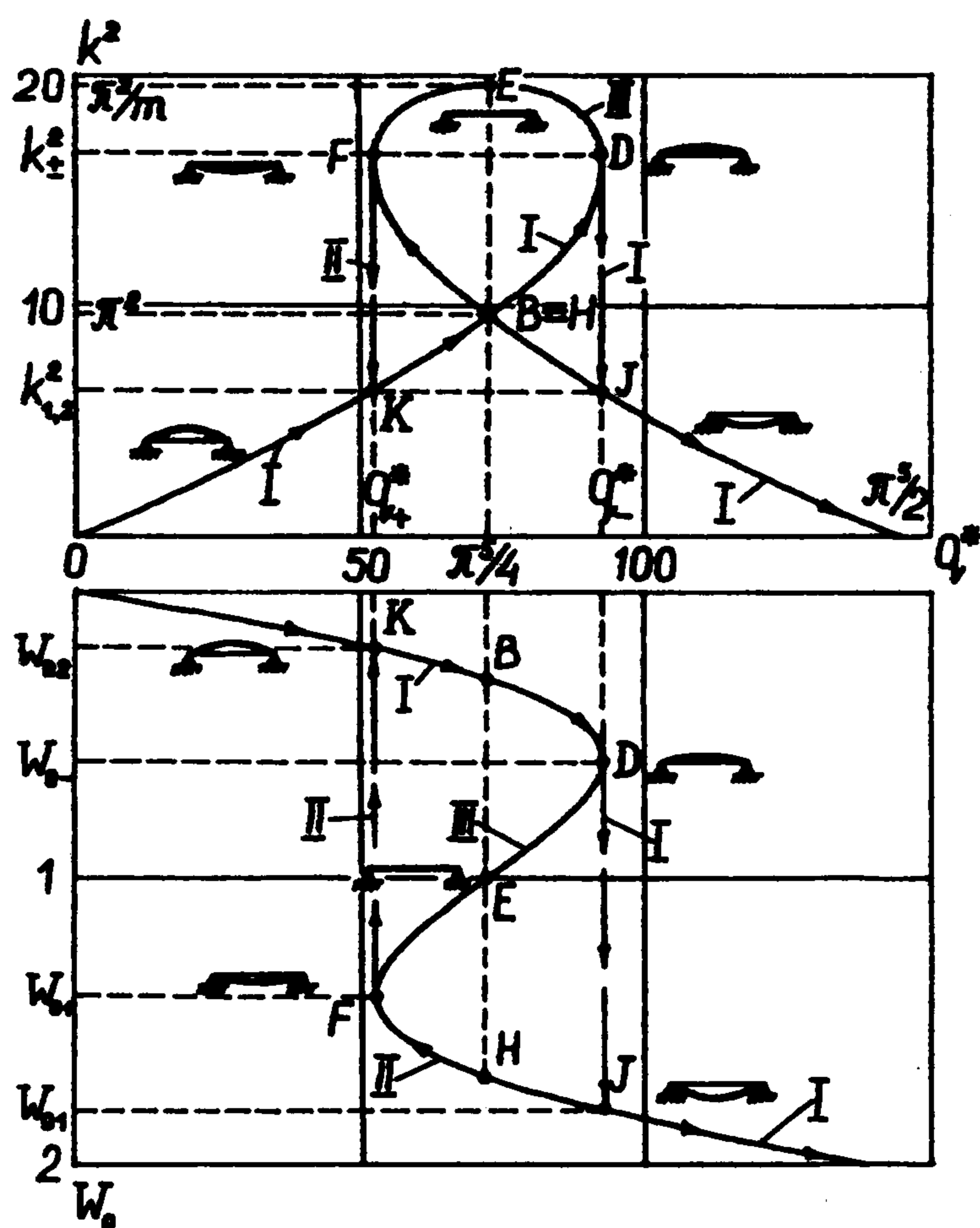
$$q_{\mp}^* = \frac{\pi^4}{4} \left[1 \pm \frac{2\sqrt{3} (1-m)^{3/2}}{9m} \right]$$

и соответствующие им прогибы и параметры продольной силы

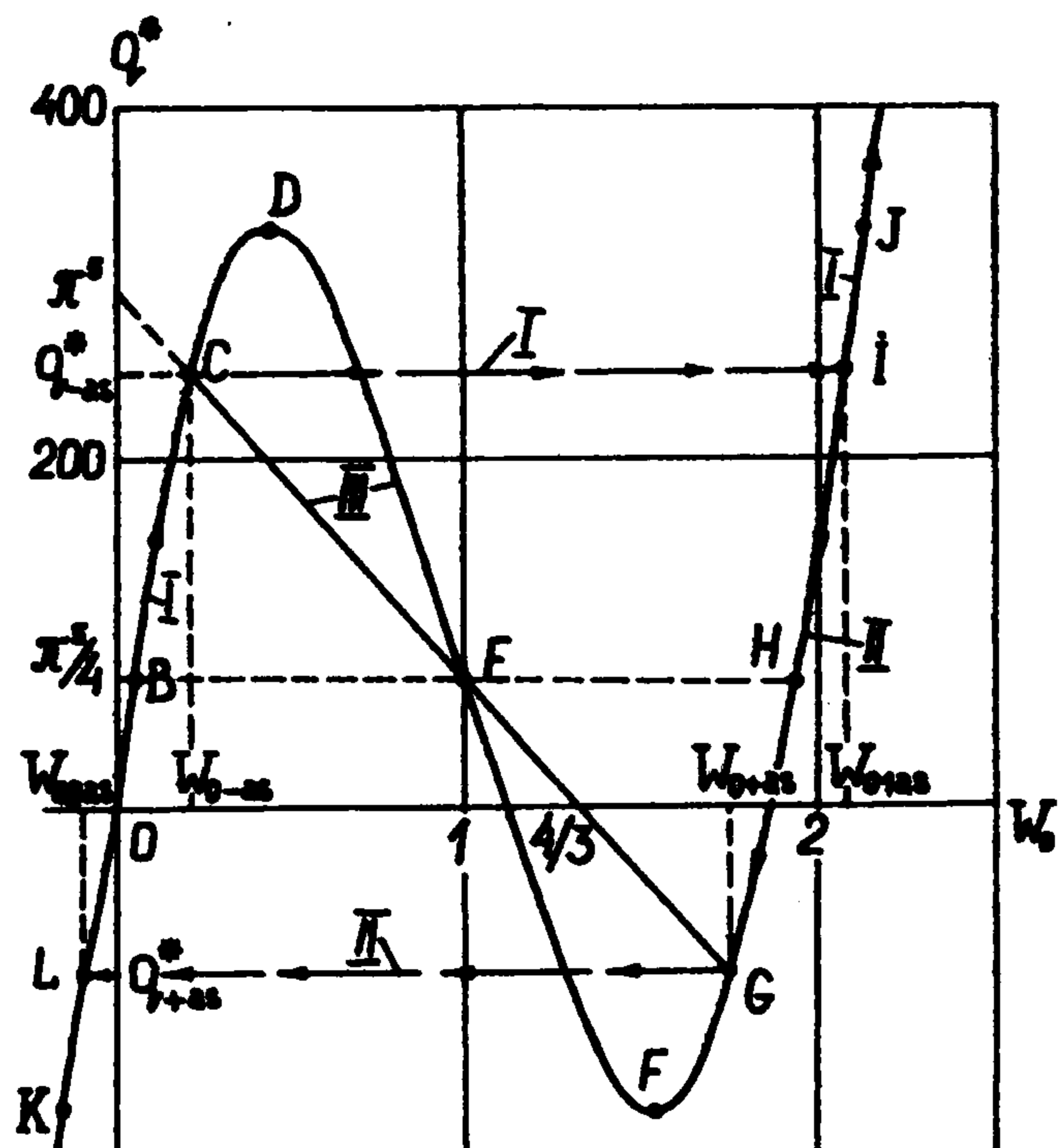
$$W_{0\mp} = 1 \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1-m}, \quad W_{0,1,2} = 1 \pm 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1-m}$$

$$k_{\mp}^2 = -\frac{\pi^2}{3} \left(1 + \frac{1}{m} \right), \quad k_{1,2}^2 = -\frac{\pi^2}{3} \left(4 - \frac{1}{m} \right)$$

Прощелкивание стержня возможно, когда $0 < m \leq 1$, при этом $q_{\mp}^* \rightarrow \infty$, если $m = 0$. Диаграммы $q^* = q^*(W_0)$ и $k^2 = k^2(q^*)$ представлены на фиг. 1 и 2 для различных значений параметра геометрии m . На фиг. 3 приведены аналогичные кривые при $m = 0,5$. На их примере показан процесс симметричного прощелкивания стержня при нагружении (I) и при его разгрузке (II). Цифрой III обозначена зона неустойчивого равновесия стержня.



Фиг. 3



Фиг. 4

Когда прощелкивание несимметрично ($W_1 \neq 0$), уравнения (0.3) допускают решение

$$W_0 = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{q^*}{\pi^5} \right), \quad k^2 = 4\pi^2 \Leftrightarrow P_{cr2}^{Euler} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$$

Следовательно, при несимметричном прощелкивании продольное усилие равно второй эйлеровой критической силе для прямолинейного стержня и несимметричное прощелкивание происходит при нагрузках

$$q_{\mp as}^* = \frac{\pi^5}{4} (1 \pm 3\sqrt{1-m})$$

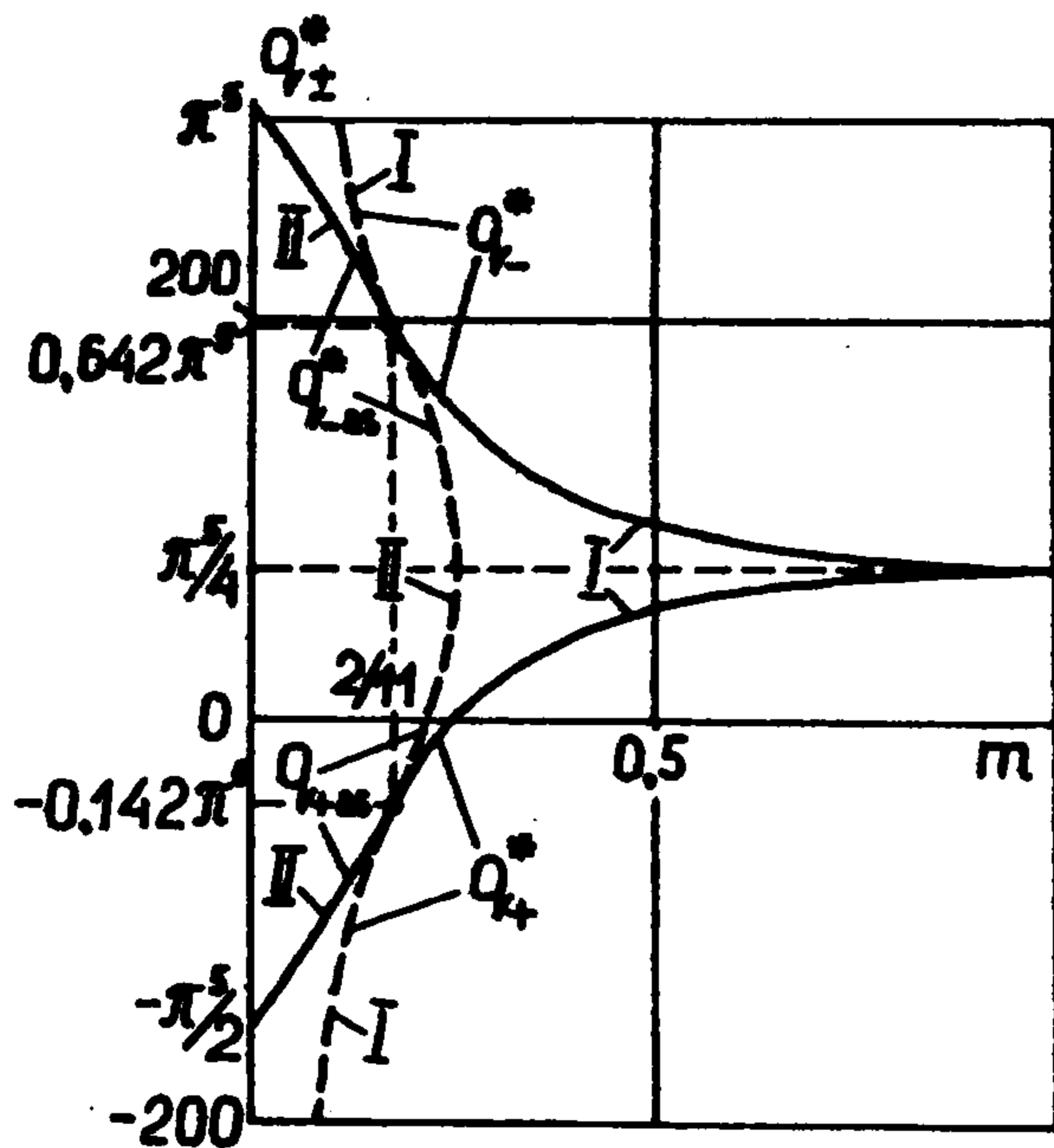
которым соответствуют прогибы

$$W_{0\mp as} = 1 \mp \sqrt{1-4m}$$

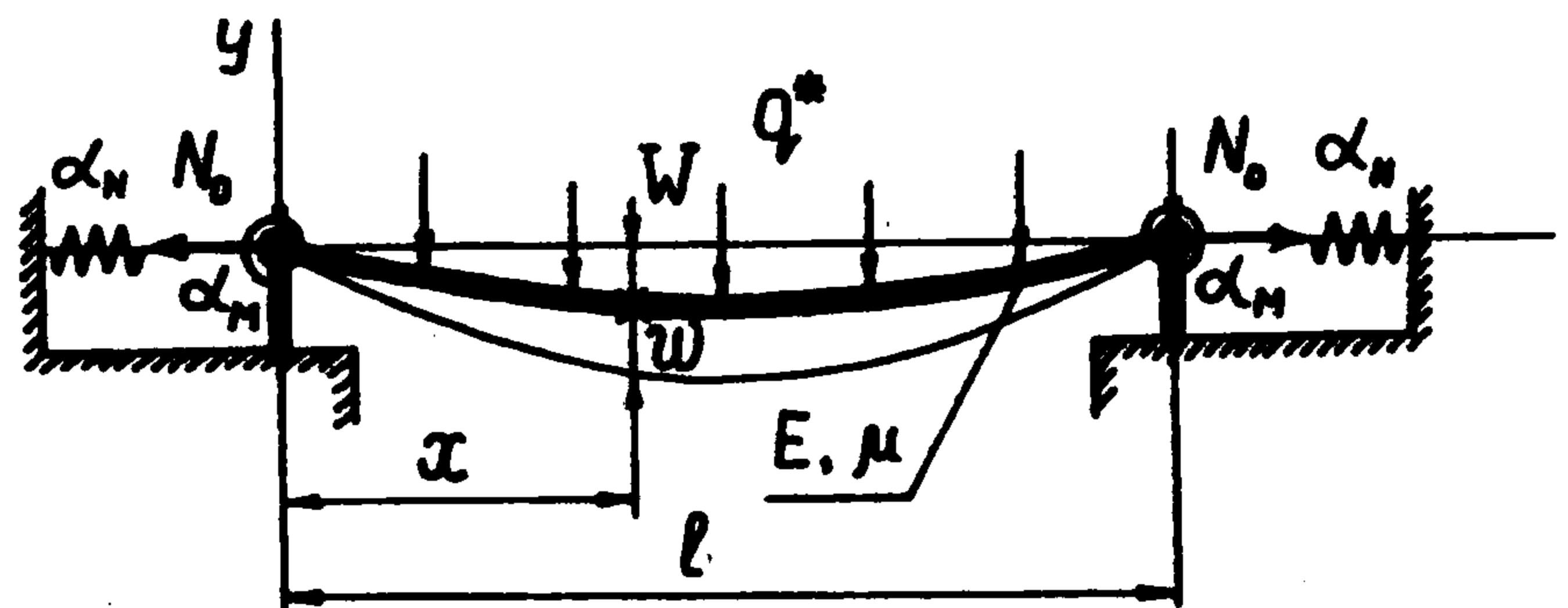
$$W_{0\pm 1,2 as} = 1 \pm \frac{1}{2} (\sqrt{1-4m} + \sqrt{1+8m})$$

Из условия $q_{\mp}^* = q_{\mp as}^*$ получается граница раздела форм прощелкивания: $m = 2/11$. Зависимости $q^* = q^*(W_0)$ при симметричном и несимметричном прощелкивании для $m = 0,1$ представлены на фиг. 4. Цифрами I и II обозначены участки кривой деформирования стержня при его нагружении и разгрузке, а цифрой III – участки его симметричного и несимметричного состояния неустойчивого равновесия. На фиг. 5 даны графики верхних q_-^* и нижних q_+^* критических нагрузок стержня при симметричном (С.П. Тимошенко, кривые I) и несимметричном (Э.И. Григолюк, кривые II) прищелкивании.

Достоинством приближенных решений [1, 2, 8] оказалась возможность получить в явном виде необходимые параметры задачи о потере устойчивости стержня и наглядно выявить механизм его поведения при различных значениях параметра геометрии m .



Фиг. 5



Фиг. 6

Этот экскурс позволит глубже понять место исследований И.Г.Бубнова в рассматриваемой проблеме.

Уместно заметить, что в работах И.Г. Бубнова [9, 10] был рассмотрен не стержень, а цилиндрическая параболическая поперечно нагруженная панель бесконечной протяженности. Он в полном объеме получил все необходимые уравнения для решения этой задачи, и, следовательно, уже в 1902 г. формально им было дано математическое описание процесса прощелкивания.

1. Параболическая панель конечного прогиба. Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую панель, срединная поверхность которой очерчена по параболе второй степени. Ее расчетная схема показана на фиг. 6. Опишем процесс деформирования этой слабо искривленной панели, считая, что она упруго закреплена по параллельным сторонам так, что опорные ложементы сопротивляются повороту опорных граней с жесткостью α_M и их сближению в процессе деформирования за счет жесткости α_N . В вертикальном направлении панель нагружена равномерным давлением q , а в горизонтальном – постоянными по длине ее продольных опорных граней растягивающими удельными усилиями N_0 . Она имеет ширину l , толщину h и изготовлена из материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ .

Для описания состояния равновесия панели воспользуемся уравнениями

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad D \frac{d^4 w}{dx^4} - N \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = q \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.1)$$

где w и x – прогиб панели и расстояние вдоль оси, соединяющей опоры панели, $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ – цилиндрическая жесткость панели, $W = -4H(x/l)(1 - x/l)$ – форма первоначальной срединной поверхности панели, H – наибольшее отклонение срединной поверхности панели от плоскости. Удельное усилие N распора в панели будет связано с касательными перемещениями срединной поверхности u и прогибом w соотношением, вытекающим из закона Гука

$$N = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left[\frac{du}{dx} + \frac{d^2 W}{dx^2} w + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \quad (1.2)$$

Граничные условия, соответствующие выбранному способу опирания панели, будут следующие:

$$w = 0, \quad M = -\alpha_M \frac{dw}{dx}, \quad N = \alpha_N u + N_0 \quad \text{при } x = 0 \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad M = \alpha_M \frac{dw}{dx}, \quad N = -\alpha_N u + N_0 \quad \text{при } x = l$$

где $M = -Dd^2w/dx^2$ – удельный изгибающий момент в пластине.

Описанная выше краевая задача имеет следующее решение:

$$w^* = \frac{q^* - k^2 \lambda}{2k^2} \left\{ \frac{\omega}{k} \left[\operatorname{ch}(k\xi) - 1 - \operatorname{th} \frac{k}{2} \operatorname{sh}(k\xi) \right] + \xi - \xi^2 \right\} \quad (1.4)$$

$$u^* = \frac{1 + \alpha_N^* \xi}{2(2 + \alpha_N^*)} I(1) - \frac{1}{2} I(\xi) + \frac{N_0^*}{12(2 + \alpha_N^*)} (2\xi - 1)$$

$$I(\xi) = \int_0^\xi \left[2\lambda w^* + \left(\frac{dw^*}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi, \quad \omega = \frac{2 + \alpha_M^*}{k + \alpha_M^* \operatorname{th}(k/2)}$$

и взаимосвязь внешней нагрузки с внутренними усилиями

$$k^2 - \frac{2N_0^*}{2 + \alpha_N^*} = \frac{6\alpha_N^*}{2 + \alpha_N^*} I(1) \quad (1.5)$$

Здесь использованы следующие безразмерные величины: $\xi = x/l$ – поперечная координата, $u^* = ul/h^2$ и $w^* = w/h$ – горизонтальные и вертикальные перемещения срединной поверхности пластины, $q^* = ql^4/(Dh)$ и $N_0^* = N_0 l^2/D$ – вертикальная и горизонтальная распределенные нагрузки, $k^2 = Nl^2/D$ – параметр распора, $\lambda = 8H/h$ – параметр, обозначающий безразмерную стрелу первоначальной параболической неправильности панели, $\alpha_N^* = \alpha_N l h^2 / (12D)$ и $\alpha_M^* = \alpha_m l / D$ – жесткости опорных ребер пластины в ее поперечном направлении и на изгиб.

Соотношение (1.5) после вычисления интеграла $I(\xi)$ дает квадратное уравнение относительно величины безразмерной вертикальной поперечной нагрузки

$$\begin{aligned} & \left[3k\omega^2 \frac{\operatorname{sh} k - k}{\operatorname{ch}^2(k/2)} + 48\omega \left(\operatorname{th} \frac{k}{2} - \frac{k}{2} \right) + 2k^2 \right] (q^* - k^2 \lambda)^2 + \\ & + 4\lambda k^2 \left[12\omega \left(\operatorname{th} \frac{k}{2} - \frac{k}{2} \right) + k^2 \right] (q^* - k^2 \lambda) + \\ & + \left[8k^6 \frac{N_0^*}{\alpha_N^*} - 4k^8 \left(\frac{2}{\alpha_N^*} + 1 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

В результате наибольший прогиб панели, наблюдаемый в центре ее пролета, с использованием (1.4) определится следующим образом:

$$w_{\max}^* = w^* \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2k^2} \left\{ \frac{\omega}{k} \left[\frac{1}{\operatorname{ch}(k/2)} - 1 \right] + \frac{1}{4} \right\} (q^* - k^2 \lambda) \quad (1.7)$$

а напряжения на верхней и нижней сторонах панели в центре ее пролета и на опорных гранях – формулами

$$\sigma^* \left(\frac{1}{2} \right) = k^2 \mp \frac{3}{k^2} \left[\frac{\omega k}{\operatorname{ch}(k/2)} - 2 \right] (q^* - k^2 \lambda) \quad (1.8)$$

$$\sigma^*(0) = \sigma^*(1) = k^2 \mp \frac{3}{k^2} (\omega k - 2) (q^* - k^2 \lambda)$$

где $\sigma^* = \sigma h l^2 / D$ – безразмерные напряжения.

2. Решение И.Г. Бубнова. Теперь сравним приведенное решение задачи о деформировании панели с тем, что получил И.Г. Бубнов. Для параболической, заземленной продольными краями панели с учетом упругости продольных ложементов в горизонтальной плоскости он привел ([9]; раздел "Добавление 1-е. Влияние кривизны листа", формула (40)) следующее уравнение связи параметра распора с величиной вертикальной нагрузки:

$$\frac{(1-\alpha)^2}{F_2(u)} + \frac{315}{u^3} \alpha(1-\alpha)[1-\chi_2(u)] = \left[\frac{64}{35} (1-\mu^2)^3 \left(\frac{p}{E}\right)^2 \left(\frac{a}{t}\right)^8 \frac{T}{t+T} \right]^{-1}$$

где

$$F_2(u) = \frac{1}{945} u^4 \left[\frac{5}{12} u + \frac{25}{16} - \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{u}}{2 \operatorname{th} \sqrt{u}} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\chi_2(u) = \frac{3}{u} \left(\frac{\sqrt{u}}{\operatorname{th} \sqrt{u}} - 1 \right)$$

Здесь p – распределенная вертикальная нагрузка (в данной статье она обозначена через q), E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины, t и a – толщина и полуширина пластины (h и $l/2$), u – коэффициент распора в пластине ($k^2/4$), $T = \alpha_N^* h / [2(1-\mu^2)]$ – жесткость опорного ложементов пластины на растяжение – сжатие в ее плоскости, α – параметр, который определяет степень кривизны панели и записывается как

$$\alpha = \frac{1}{6(1-\mu^2)} \frac{\eta t^3 E}{a^4 p} u$$

где η – наибольшая стрела первоначальной погиби панели (в обозначениях данной статьи – величина H). В результате параметр α соответствует дроби $k^2 \lambda / q^*$ и приведение уравнения связи Бубнова к обозначениям данной статьи дает уравнение

$$\left[3k \frac{\operatorname{sh} k - k}{\operatorname{sh}^2(k/2)} + 48 \left(1 - \frac{k}{2} \operatorname{cth} \frac{k}{2} \right) + 2k^2 \right] (q^* - k^2 \lambda)^2 +$$

$$+ 4\lambda k^2 \left[12 \left(1 - \frac{k}{2} \operatorname{cth} \frac{k}{2} \right) + k^2 \right] (q^* - k^2 \lambda) - 4k^8 \left(\frac{2}{\alpha_N^*} + \frac{1}{1-\mu^2} \right) = 0$$

Оно совпадает с предельным случаем уравнения (1.6) при $N_0^* = 0$ и $\alpha_M^* \rightarrow \infty$ во всем, кроме последнего слагаемого, которое должно записываться иначе: $4k^8 (2/\alpha_N^* + 1)$. Это является следствием допущенной автором неточности. Уравнение, отмеченное Бубновым номером (40), в правой части должно иметь вместо дроби $T/(t+T)$ дробь $T/[t+(1-\mu^2)T]$.

Избавленное от неточностей обобщенное решение рассматриваемой задачи для упруго закрепленной панели Бубнов дал в [10, 11; § 25]. Им приведены следующие формулы, описывающие процесс деформирования панели.

Уравнение связи параметра распора и вертикальной нагрузки

$$\frac{9\varepsilon(1-\varepsilon)}{4u^6} \left\{ 1 - \left[\varkappa + (1-\varkappa) \frac{\operatorname{th} u}{u} \right] \varkappa(u) \right\} + \tag{2.1}$$

$$+(1-\varepsilon)^2 F(\varkappa, u) = \frac{1}{K(1-\mu^2)^2} \left(\frac{E}{p_x^0} \right)^2 \left(\frac{h}{2a} \right)^8 \left(1 - \frac{p_z^0}{p_z} \right)$$

где $\varepsilon = 2p_z h c_0 / (p_x^0 a^2)$ – приведенная начальная неправильность панели (c_0 – наибольшая стрела начальной погиби), являющаяся в рамках обозначений настоящей статьи, как и параметр α , из [9], аналогом выражения $k^2 \lambda / q^*$. Остальные величины и функции, входящие в

это уравнение связи, описываются следующим образом:

$$F(\alpha, u) = (1 - \alpha)U_0 + \alpha U_1 - \alpha(1 - \alpha)U_2$$

$$U_0 = \frac{9}{8u^6} - \frac{27}{16} \frac{5(u - \operatorname{th} u) - u \operatorname{th}^2 u}{u^9}$$

$$U_1 = \frac{45}{16u^6} - \frac{27}{16} \frac{(u - \operatorname{th} u)(u + 4 \operatorname{th} u)}{u^8 \operatorname{th}^2 u}$$

$$U_2 = \frac{27}{16} \frac{(u - \operatorname{th} u)^2}{u^9 \operatorname{th}^2 u} (u \operatorname{th}^2 u - u + \operatorname{th} u)$$

h и a – толщина и полуширина пластины (в данной статье они обозначены h и $l/2$), p_z – растягивающие напряжения в панели (N/h), p_z^0 – растягивающие напряжения на опорных гранях панели (N_0/h), p_x^0 – равномерно распределенная вертикальная нагрузка (q), K и α – безразмерные жесткости опорных ложементов панели на ее растяжение, – сжатие в поперечном направлении и на изгиб, описываемые в обозначениях данной статьи формулами

$$K = \frac{\alpha_N^*}{2 + \alpha_N^*(1 - N_0^*/k^2)^{-1}}, \quad \chi = \frac{\alpha_M^* \operatorname{th}(k/2)}{k + \alpha_M^* \operatorname{th}(k/2)}$$

При этом под параметром распора u понимается несколько другая величина, чем в [9]. В терминах настоящей статьи он $k/2$, а не $k^2/4$, как было ранее.

Соотношение для максимального прогиба панели

$$\xi_{\max} = (1 - \mu^2)(1 - \varepsilon) \frac{p_x^0}{E} \frac{(2a)^4}{h^3} f(\alpha, u)$$

где

$$f(\alpha, u) = \frac{5}{32}(1 - \alpha)f_0(u) + \frac{1}{32}\alpha f_1(u)$$

$$f_0(u) = \frac{12}{5u^2} \left(1 - \frac{2}{u^2} + \frac{2}{u^2} \operatorname{ch} u \right)$$

$$f_1(u) = \frac{12}{u^2} \left(1 - \frac{\operatorname{th}(u/2)}{u/2} \right)$$

Эти соотношения Бубнова полностью совпадают с уравнениями (1.6) и (1.7), если их переписать в обозначениях данной статьи.

3. Обсуждение результатов И.Г. Бубнова. В [10, 11; § 25, черт. 78] И.Г. Бубнов привел график численного исследования уравнения (2.1) (Он воспроизведен на фиг. 7), который был получен следующим образом. Для конкретных значений жесткости опорных ложементов на изгиб α и правой части уравнения связи задавались значения параметра распора панели u и из квадратного уравнения для приведенной кривизны панели ε определялись значения наибольшей стрелы начальной погиби панели c_0 . Было отмечено, что "при отрицательных стрелках погиби пластины кривая состоит из двух ветвей, причем ветвь ВС соответствует неустойчивому равновесию пластины, при стрелках же, превышающих по абсолютной величине критическую стрелку c_0'' , пластина будет устойчивой (ветвь АВ). При этой критической стрелке в пластине под действием изгибающей нагрузки p_x^0 возникнут сжимающие напряжения p_z , равные эйлеровым, и мнимый аргумент u достигнет своего предельного значения ($u = \pi\sqrt{-1}/2$ при $\alpha = 0$ и $u = \pi\sqrt{-1}$ при $\alpha = 1$); всякое дальнейшее увеличение нагрузки p_x^0 заставит пластину изменить свою кривизну на обратную, так что стрелка c_0 станет положительной и равновесие пластины – устойчивым".

Из этого видно, что И.Г. Бубнов вплотную подошел к решению задачи о прощелкивании слабо искривленных пластин и пологих оболочек. Однако он ограничился ее качественным

рассмотрением, показав на приведенном им черт. 78 только возможные способы поведения панелей, а не процесс нагружения конкретной панели. Кроме этого, черт. 78 является лишь небольшим фрагментом реальной картины.

На самом деле поведение панели описывается бесконечным количеством кривых, которые образуют семейство линий, неограниченное в области отрицательных значений квадрата параметра распора u . Это можно видеть на фиг. 8, где для шарнирно опертой панели с параметрами $K=1$, $\alpha=0$, $\mu=0,3$,

$$p_z^0 = 0 \text{ и } (1-\mu^2)(p_x^0/E)(2a/h)^4 = 30$$

просчитана зависимость $c_0^* = c_0/h$ от u^2

с помощью уравнения (2.1). Здесь для отрицательных значений параметра u^2 применялось видоизмененное уравнение типа (2.1), в котором u было заменено на iu .

Аналогичное уравнение в обозначениях [8], в частности для шарнирно опертого параболического стержня под равномерной вертикальной нагрузкой, можно записать в виде [12]

$$\frac{1}{2k^6} \left[2 + \frac{k^2}{12} + \frac{k-5\sin k}{2k \cos^2(k/2)} \right] (q^* - 8k^2)^2 - \quad (3.1)$$

$$-\frac{8}{k^3} \left[\frac{\sin k}{k^2 \cos^2(k/2)} - \frac{k}{12} - \frac{1}{k} \right] (q^* - 8k^2) + \frac{m}{4} k^2 = 0$$

где безразмерная нагрузка q^* , параметр распора k и параметр геометрии стержня m определяются следующим образом:

$$q^* = \frac{ql^4}{EJH}, \quad k^2 = -\frac{Nl^2}{EJ}, \quad m = \frac{4J}{FH^2}$$

q – вертикальная равномерно распределенная по длине стержня нагрузка, N – усилие распора в стержне, l и H – длина и стрела подъема стержня, E – модуль упругости материала, F и J – площадь поперечного сечения стержня и его момент инерции.

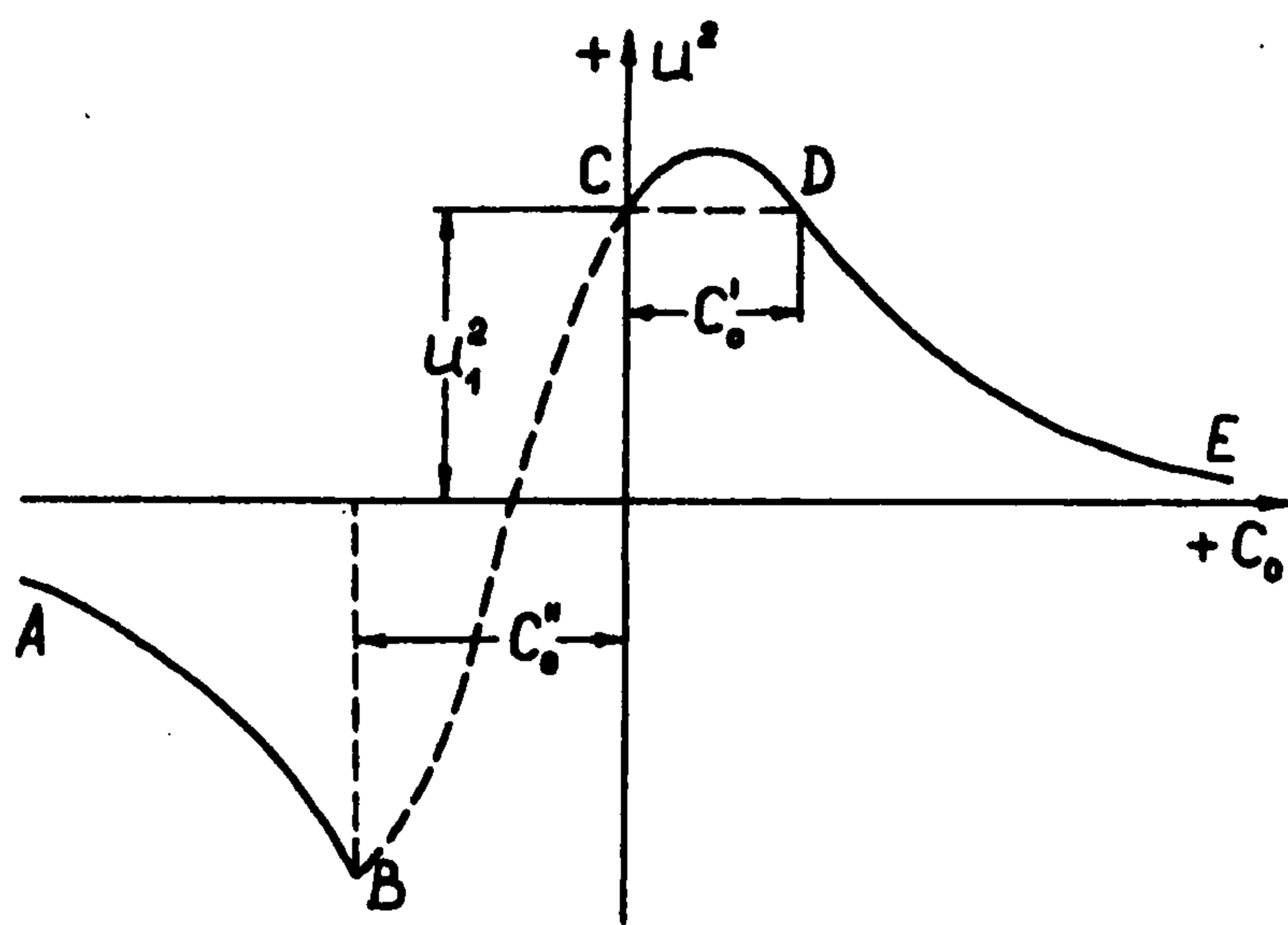
С параметрами уравнения Бубнова (2.1), которые помечены индексом [B], а также с параметрами уравнений настоящей статьи (они отмечены индексом [H]), параметры уравнения (3.1), помеченные индексом [G], соотносятся следующим образом:

$$k_{[G]}^2 = -\frac{4}{1-\mu^2} u_{[B]}^2 = -12 \frac{P_{z[B]}}{E} \left(\frac{2a}{h} \right)^2 = -\frac{k_{[H]}^2}{1-\mu^2}$$

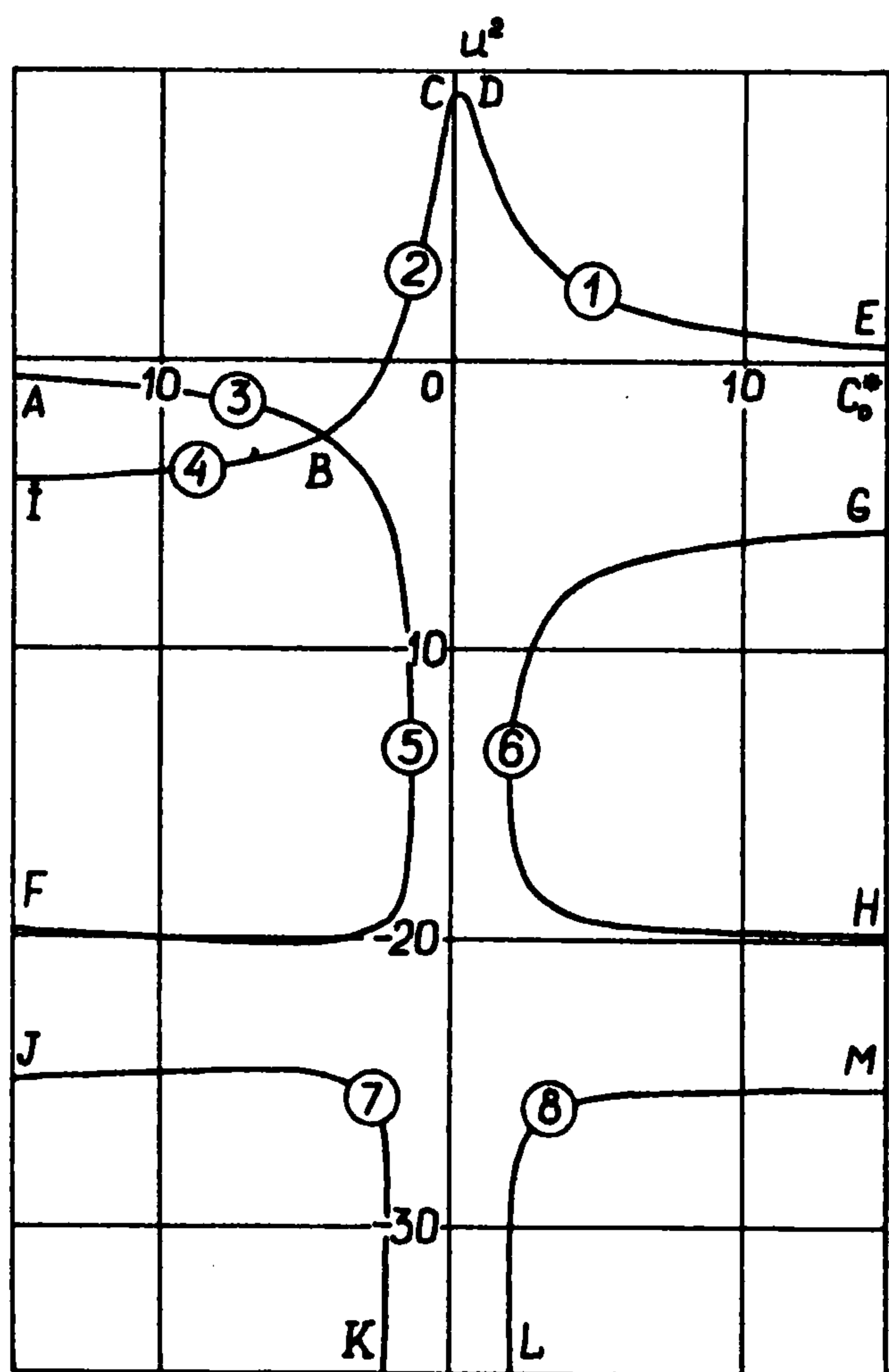
$$q_{[G]}^* = 12 \frac{P_{x[B]}^0}{E} \left(\frac{2a}{h} \right)^4 \frac{h}{c_0} = \frac{q_{[H]}^*}{1-\mu^2} \frac{h}{H} \quad (3.2)$$

$$m_{[G]} = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{c_0} \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{H} \right)^2, \quad \varepsilon_{[B]} = -8 \frac{k_{[G]}^2}{q_{[G]}^*}$$

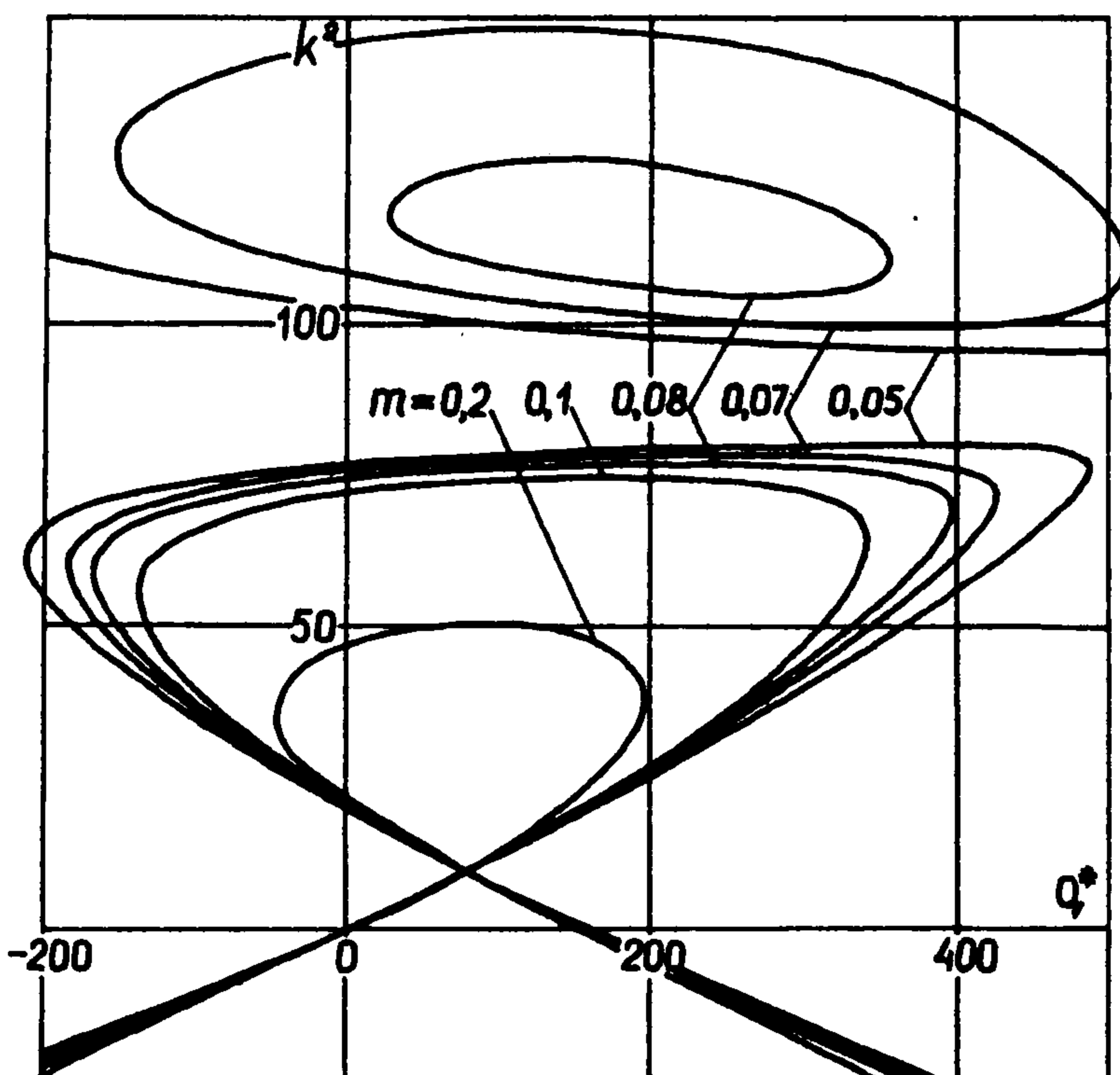
При этом уравнения (1.6) и (2.1), записанные для шарнирного опирания панели ($\alpha_N^* \rightarrow \infty$, $\alpha_M^* = 0$, $N_0^* = 0$ и $K=1$, $\alpha=0$, $p_z^0 = 0$ соответственно), при выпуклости, направленной против вертикальной нагрузки, полностью переходят в уравнение (3.1) только в том случае, если при переводе параметров пренебречь множителем $(1-\mu^2)$. Это означает замену изгибной и продольной жесткостей стержня при смене параметров на цилинд-



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

рическую жесткость панели и на ее жесткость на растяжение – сжатие. Для полной идентичности вышеперечисленных уравнений вместо соотношений связи (3.2) надо пользоваться следующими:

$$k_{[G]}^2 = -4u_{[B]}^2 = -12(1-\mu^2) \frac{P_{z[B]}}{E} \left(\frac{2a}{h}\right)^2 = -k_{[H]}^2$$

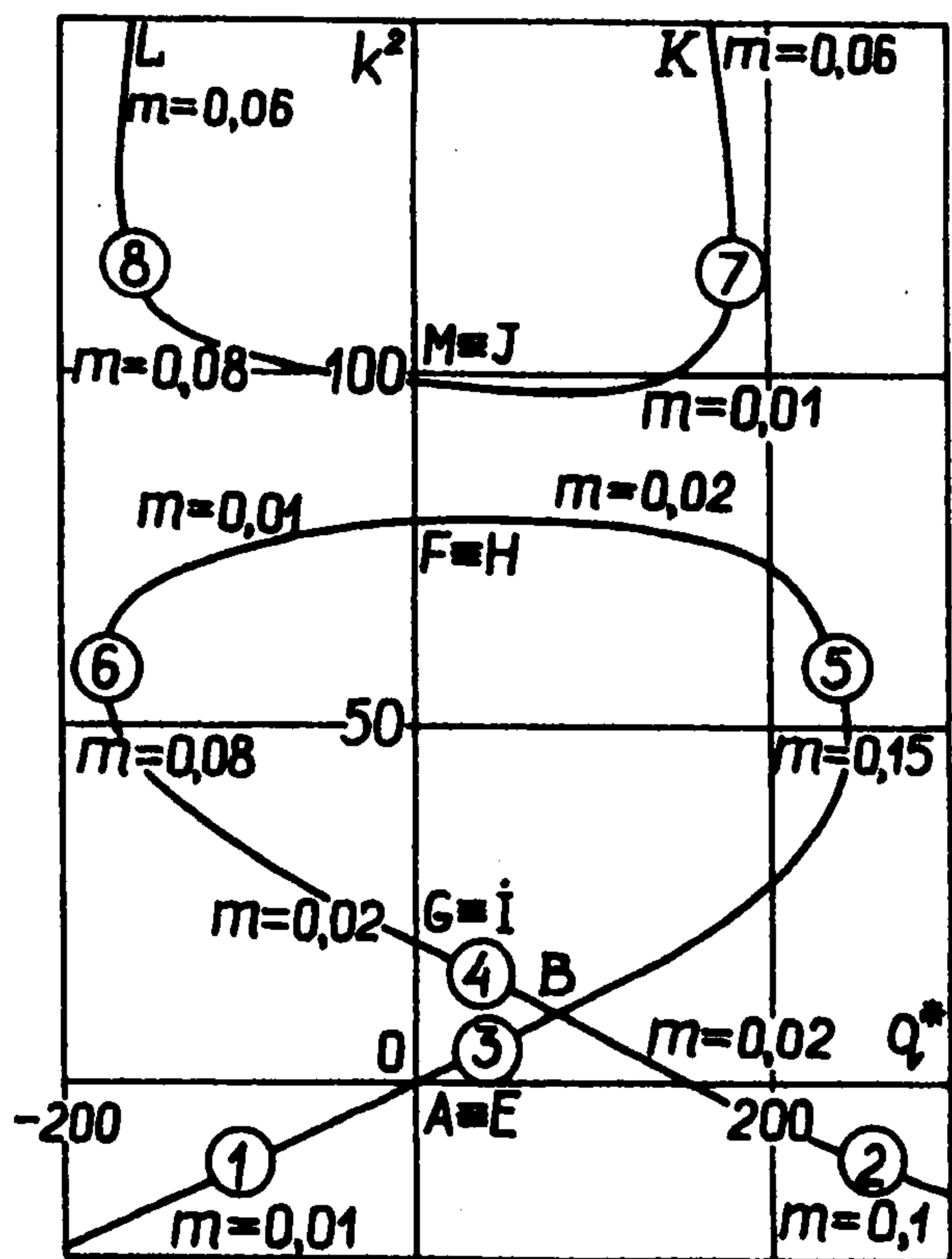
$$q_{[G]}^* = 12(1-\mu^2) \frac{P_{x[B]}^0}{E} \left(\frac{2a}{h}\right)^4 \frac{h}{c_0} = q_{[H]}^* \frac{h}{H}$$

$$m_{[G]} = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{c_0}\right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{H}\right)^2, \quad \epsilon_{[B]} = -8 \frac{k_{[G]}^2}{q_{[G]}^*}$$

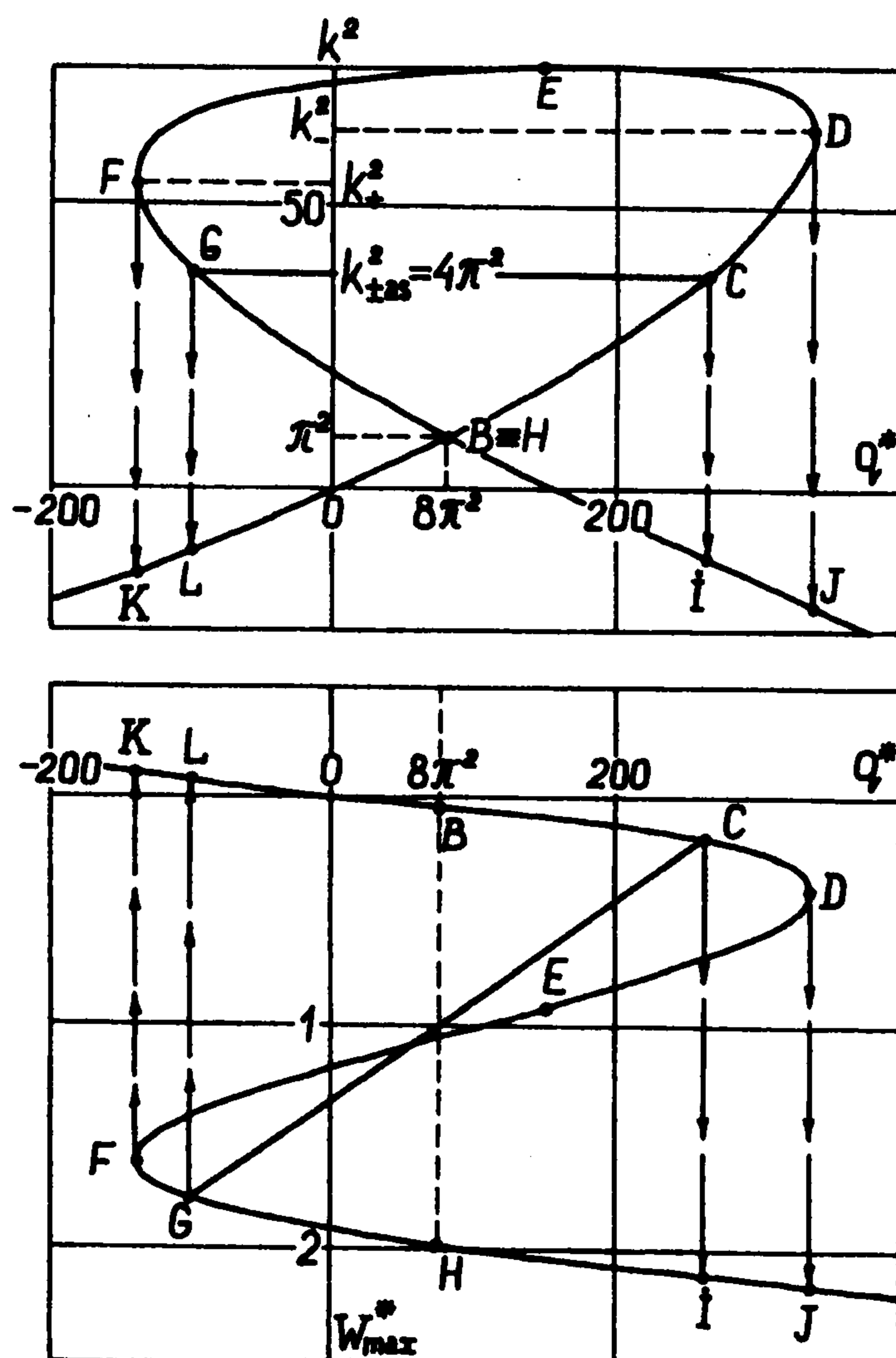
При такой замене появляется возможность перестроить полученные в [8, 12] кривые решений уравнения связи (3.1), которые отражают реальный процесс нагружения арки или панели, на поле кривой черт. 78 из [10, 11], показывающей возможные состояния равновесия различных панелей, и наоборот. Для шарнирно опертого равномерно поперечно нагруженного стержня (панели) с различными значениями параметра геометрии m кривые нагружения выглядят, как показано на фиг. 9. Если перестроить фиг. 8 в поле координат фиг. 9, то кривая Бубнова (фиг. 10) будет представлять собой геометрическое место точек, описывающих устойчивые и неустойчивые состояния равновесия панелей, которые связаны друг с другом зависимостью, выражающейся соотношением

$$\frac{q_{[G]}^{*2}}{m_{[G]}} = 432(1-\mu^2)^2 \left(\frac{P_{x[B]}^0}{E}\right)^2 \left(\frac{2a}{h}\right)^8 = 388800$$

Отдавая И.Г. Бубнову приоритет в разработке математической модели деформирования слабоискривленной панели, нельзя не отметить, что он до конца не представлял, как панель теряет устойчивость. Обсуждая процесс деформирования панели, он допускает неточность в идентификации устойчивых и неустойчивых ветвей траектории нагружения, утверждая, что



Фиг. 10



Фиг. 11

потеря устойчивости шарнирно опертой панели произойдет при значении параметра распора равном первой эйлеровой критической силе $k_{[G]}^2 = -4u_{[B]}^2 = \pi^2$, так как "всякое дальнейшее увеличение нагрузки p_x^0 заставит пластину изменить свою кривизну на обратную". Однако, как можно видеть на фиг. 11 для параболической панели или фиг. 4 для синусоидального стержня, это не так. При нагружении панели распределенной нагрузкой со стороны выпуклости, ее напряженно-деформированное состояние будет отображаться точкой, которая по мере увеличения нагрузки будет двигаться по линии нагружения из точки O через точку B в направлении точек C и D , причем в точке B параметр распора будет равен значению первой эйлеровой критической силе, но потери устойчивости не произойдет. Панель потеряет устойчивость по симметричной форме в точке D с перескоком процесса нагружения в точку J , либо, если значение параметра распора k_-^2 , соответствующее симметричной потере устойчивости, больше второй критической эйлеровой силы – по несимметричной форме в точке C с перескоком в точку I . За критическую же Бубнов принимает точку B , считая, по-видимому, что перескок произойдет из нее в точку H .

При несимметричной потере устойчивости значение параметра распора равно $4\pi^2$ – второй критической эйлеровой силе для плоской панели [8]. Возможно, что если бы И.Г. Бубнов не ограничился рассмотрением только первой эйлеровой критической силы, а провел бы более детальное исследование поведения панели, это навело бы его на мысль, что первая эйлерова критическая сила не является критической для панели и что панель может терять устойчивость по несимметричным формам.

Итак, фрагментарное исследование поведения параболической панели не позволило И.Г. Бубнову понять весь механизм ее поведения. Да, видимо, он и не стремился к этому, а решал как инженер поставленную кораблестроительной практикой задачу. Выбранные им параметры задачи также не соответствовали прояснению полной картины поведения панели при нагружении. Конечно, теперь поздно задавать вопрос, был ли знаком С.П. Тимошенко с результатами И.Г. Бубнова [9, 10], – ясно, что знаком. Другое дело, натолкнули ли его эти результаты на решение проблемы о прощелкивании стержня при нагружении.

Несомненно, что нет, и мысль об изучении прощелкивания стержней пришла к нему при исследовании поведения биметаллических искривленных полос, приближенную теорию которых он и развил.

Во всяком случае ясно, что И.Г. Бубнов остается предшественником в формулировке уравнений конечных прогибов тонкостенных упругих поверхностей Фёппля – Кармана – Маргерра, его результаты по изучению поведения круговых пластин, плоских и криволинейных панелей дают ему право на это. Что касается проблем прощелкивания тонкостенных поверхностей, то здесь следует помнить, что И.Г. Бубнов первый получил решение нелинейной задачи о поведении параболической цилиндрической панели, которое в принципе позволяет сделать все необходимые заключения, полученные впоследствии другими авторами (С.П. Тимошенко, Э.И. Григолюк), и сожалеть, что у него не было цели и возможности осмыслить установленные им результаты в применении к формулировке общей проблемы устойчивости оболочек. Такую задачу не ставил перед собой Тимошенко, посвятивший этой теории ряд исследований, хотя работа Кармана и Цзяна [6] по прощелкиванию сферического купола при радиальном равномерном давлении дает особенно сильно почувствовать влияние результата Тимошенко [2] на проблему потери устойчивости оболочек при конечных прогибах, поскольку модель сферического купола очень близка к модели пологого стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Timoshenko S.* Analysis of bimetal thermostats // *J. Optical Soc. Amer. and Rev. of Scient. Instruments*, 1925. V. 11. № 3. P. 233–255. Перепечатка: *Timoshenko S.P. The collected papers*. N. Y.: McGraw-Hill, 1953. P. 403–421 / Расчет биметаллических термостатов // Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 534–552.
2. *Timoshenko S.* Buckling of flat curved bars and slightly curved plates // *J. Appl. Mech.* 1935. V. 2. № 1. P. 17–20. Перепечатка: *Timoshenko S. P. The collected papers*. N.Y.: McGraw-Hill, 1953. P. 508–515. Выпучивание пологих стержней и слегка искривленных пластин // Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 662–669.
3. *Navies C.L.M.H.* Résumé des leçons données à la cole des ponts chausséets, sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions at des machines. 1 Pt. Paris: Cher Corillan-Gceury, 1826. P. 226–286.
4. *Nadai A.* Labile Gleichgewichtslagen stark gebogenen Stäbe. Technische Blätter // *Z. Deutschen Polytechn. Vereins in Böhmen*. Prague: 1915. Jahr. 47. № 3–4. S. 137–145.
5. *Biezeno C.B.* Über eine Stabilitätsfrage beim gelenking gelagerten, schwach gekrümmten Stäbe // *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschappen Amsterdam*. 1929. V. 32. № 7. P. 990–994; Das Durchschlagen eines schwach gekrümmten Stabes // *ZAMM*. 1938. Bd. 18. H. 1. S. 21–30.
6. *Kármán Th., Tsien H.-S.* The buckling of spherical shells on external pressure // *J. Aeronaut. Sci.* 1939. V. 7. № 2. P. 43–50 / Перепечатка: *Karman Th. Collected works*. London: Butterworths, 1956. V. 3. P. 368–380.
7. *Kármán Th., Tsien H.-S.* The buckling of thin cylindrical shells under axial compression // *J. Aeronaut. Sci.* 1941. V. 8. № 8. P. 303–312 // Перепечатка: *Karman Th. Collected works*. London: Butterworths, 1956. V. 4. P. 107–126.
8. *Григолюк Э.И.* К расчету устойчивости пологих арок // *Инж. сб.* 1951. Т. 9. С. 177–200.
9. *Voobnoff I.G.* On the stresses in a ship's bottom plating due to water pressure // *Trans. Inst. Naval Arch.* 1902. V. 44. P. 15–46; 51–52. Отдельный оттиск: 1902, 32 pp. См. также: Бубнов И.Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды // *Морской сб.* 1902. Т. 311. № 8. С. 117–141; Т. 312. № 9. С. 111–139. № 10. С. 119–138; № 12. С. 107–130. Отдельный оттиск: С.-Петербург: Типолитогр. А.Э. Винеке, 1904. 93 с. Перепечатка: Бубнов И.Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды. Тр. по теории пластин. М.: Гостехиздат, 1953. С. 11–100.
10. *Бубнов И.Г.* Строительная механика корабля. СПб: Типография Морск. мин-ва, 1914. Ч. 2. С. 331–640.
11. *Бубнов И.Г.* Труды по теории пластин. М.: Гостехиздат, 1953. 424 с.
12. *Григолюк Э.И., Андрианов Н.Н.* Нелинейное статистическое поведение пологих стержней // *Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек*. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 3–83.

Москва

Поступила в редакцию
13.VII.1995