

УДК 531.391

© 1996 г. В.С. Метрикин, Р.Ф. Нагаев, В.В. Степанова

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

Рассматриваются автоколебания осциллятора, который парой сухого трения связан с основанием, движущиеся с постоянной скоростью (фиг. 1). Предполагается, что коэффициент трения скольжения f_* постоянен, а коэффициент трения относительного покоя – кусочно-линейная функция продолжительности t_k предшествующего интервала длительного контакта тела с основанием (фиг. 2) [1]. Дается классификация простейших периодических и установившихся стохастических автоколебаний осциллятора и построены области их существования в пространстве параметров системы. Подробно анализируются области движений переходного типа, внутри которых существуют периодические режимы произвольной сложности. В частности, в явном виде строятся уравнения так называемых недостижимых границ [2], в малой окрестности которых существует счетное множество различных периодических траекторий рассматриваемой динамической системы.

На возможность возбуждения стохастических автоколебаний было впервые обращено внимание в работе [3]. Затем был подробно проанализирован [4] случай гладкой монотонно возрастающей характеристики коэффициента трения покоя экспоненциального типа. При этом наличие в пространстве параметров задачи конечных областей существования движений переходного типа обнаружено не было.

1. Уравнения движения. Фазовое пространство. Функция последования. Уравнения движения рассматриваемой существенно нелинейной системы внутри интервалов проскальзывания и длительного контакта имеют вид

$$m\ddot{x} + cx + f_* P \operatorname{sign}(\dot{x} - V) = 0, \quad \dot{x} \neq V \quad (1.1)$$

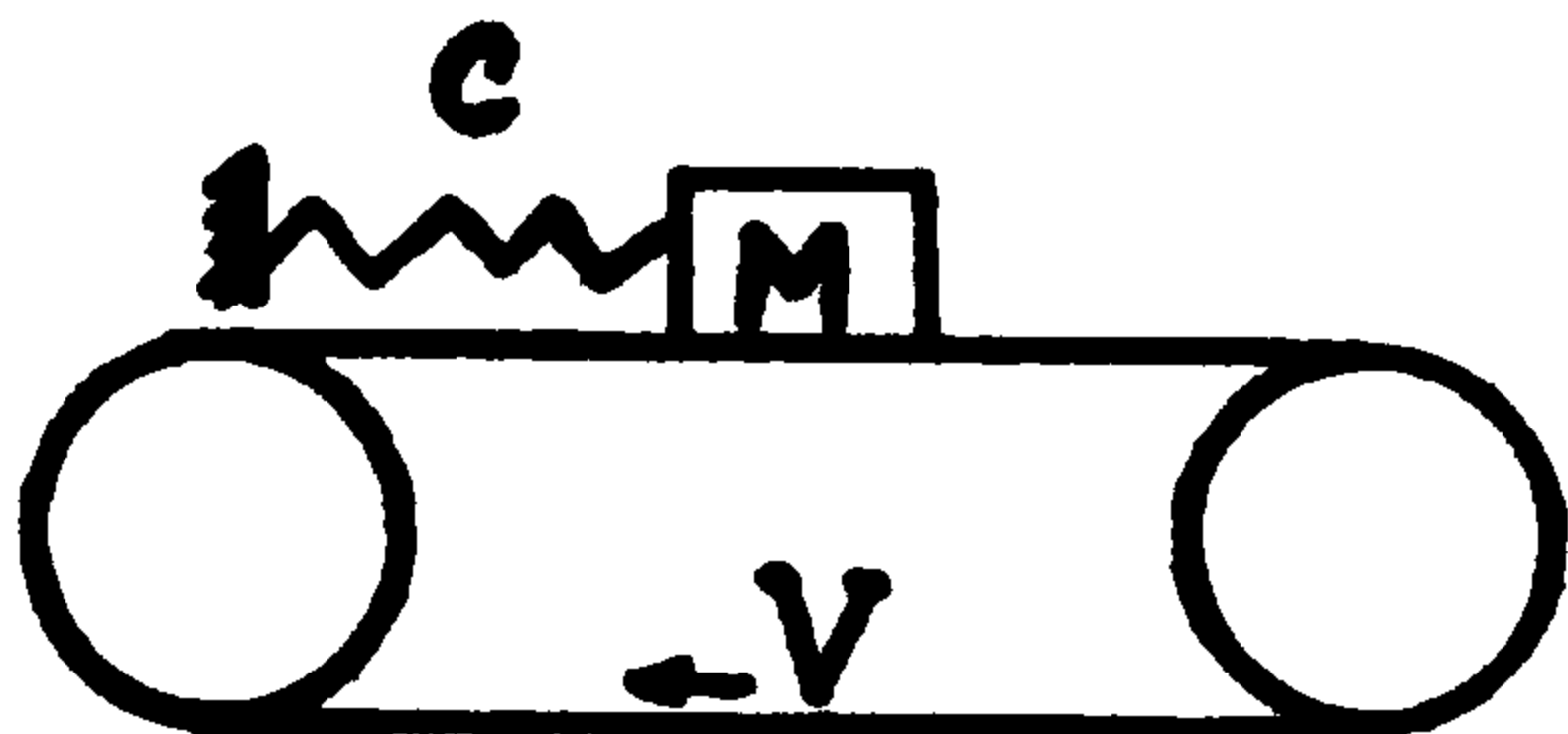
$$\dot{x} = V, \quad c|x| \leq fP \quad (1.2)$$

где m – масса, P – вес тела, c – коэффициент жесткости пружины, а коэффициент трения относительного покоя в соответствии со сказанным выше равен

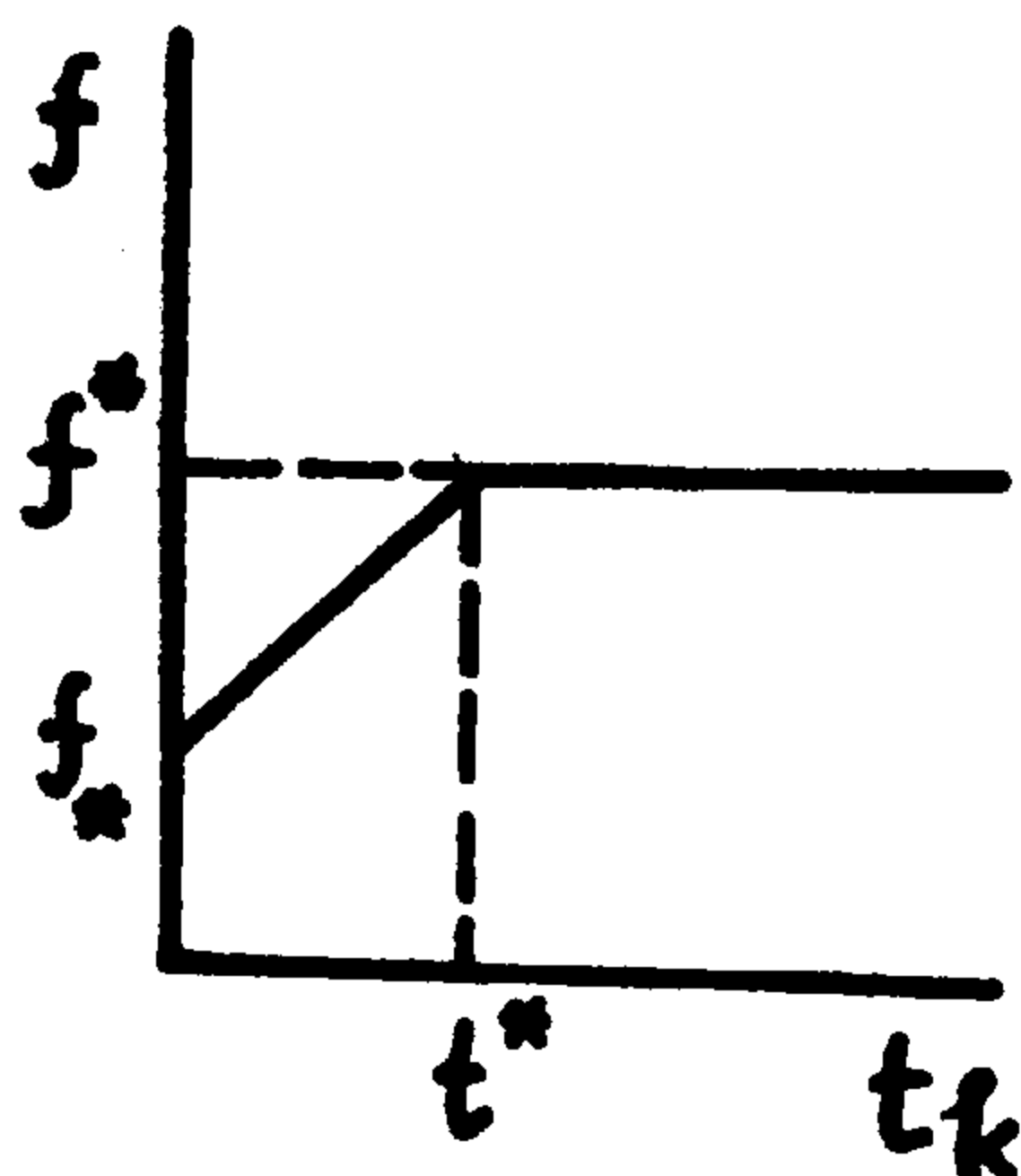
$$f = \begin{cases} f_* + (f^* - f_*)t_k / t_*, & 0 < t_k < t^* \\ f^*, & t_k > t^* \end{cases} \quad (1.3)$$

Предположим, что при $-t_k < t < 0$ тело находится в контакте с лентой, а при $t = 0$ имеем $x = f(t_k)P/c$, $\dot{x} = V$. Далее движение происходит с отставанием ($\dot{x} < V$) и завершается при $t = t^{(1)}$, когда впервые $\dot{x} = V$ ($x = x^{(1)}$). Если при этом ускорение \ddot{x} при $t = t^{(1)} + 0$ и $\dot{x} > V$ в силу уравнения (1.1) положительно ($c x^{(1)} + f_* P < 0$), то произойдет мгновенная перемена направления проскальзывания и начнется интервал движения с опережением ($\dot{x} > V$). В противном случае при $t > t^{(1)}$ неизбежен последующий длительный контакт.

Предварительный анализ [4] показывает, что, вообще говоря, возможно только конечное число последовательных интервалов проскальзывания с запаздыванием и опережением, тем большее, чем больше разность $f(t_k) - f_*$. При этом последовательные интервалы t_k и t_{k+1}



Фиг. 1



Фиг. 2

длительного контакта связаны друг с другом точечным отображением T полупрямой $L(\eta)$ в себя:

$$\Psi(\eta_{k+1}) = \Phi(\eta_k) \quad (1.4)$$

где

$$\Psi(\eta) = \beta\eta - \epsilon(\eta)$$

$$\Phi(\eta) = 1 - (-1)^j [\epsilon(\eta) - 2j + 1]$$

$$2(j-1) < \epsilon(\eta) < 2j \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.5)$$

$$\epsilon(\eta) = \begin{cases} \eta, & 0 < \eta < \epsilon_* \\ \epsilon_*, & \eta > \epsilon_* \end{cases}$$

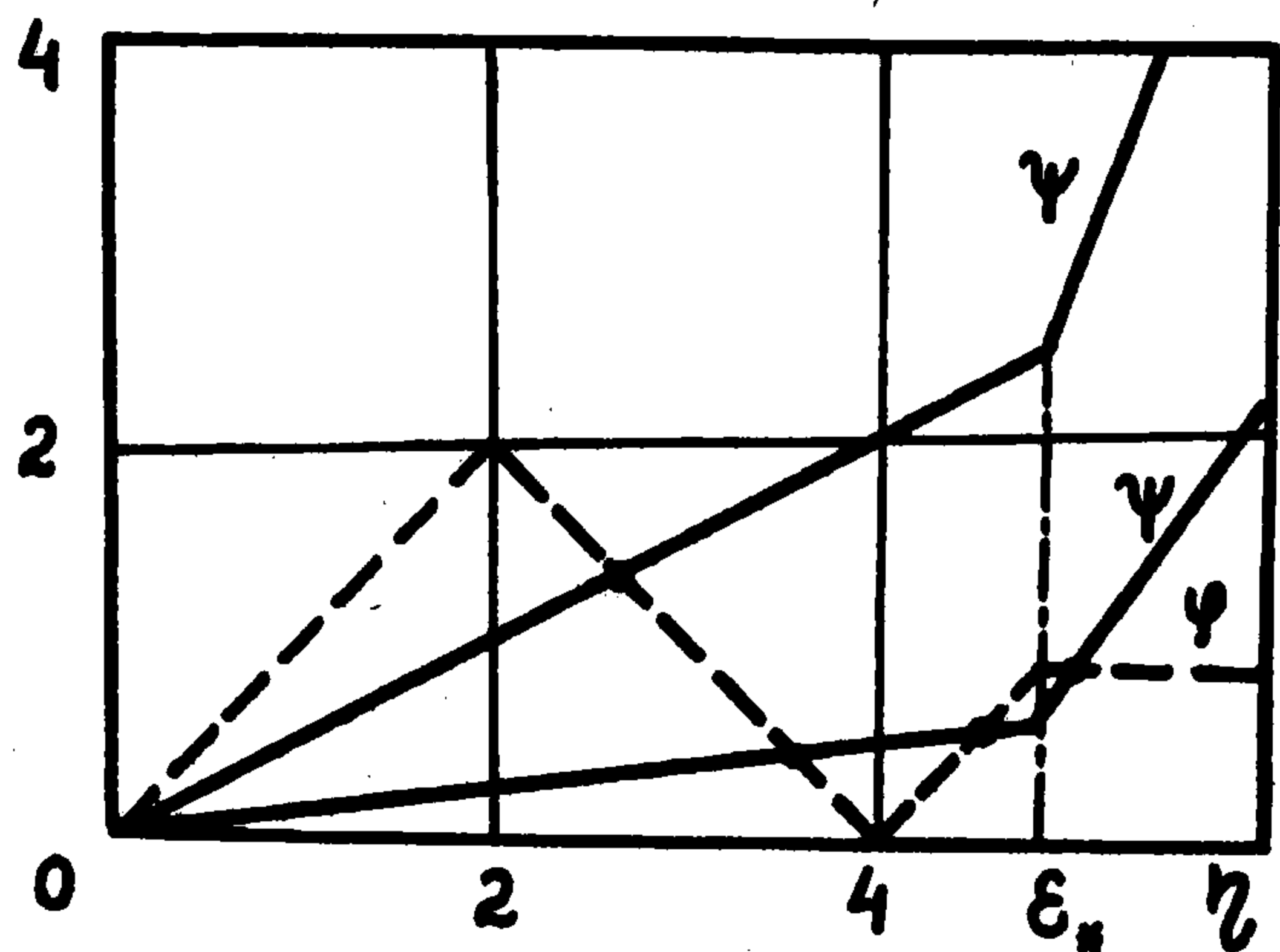
$$\beta = \frac{\sqrt{mc} V}{f_* P}, \quad \epsilon_* = \frac{f^* - f_*}{f_*}, \quad \eta_k = \frac{\epsilon_* t_k}{t^*}$$

а величина j равна числу интервалов проскальзывания при $t_k < t < t_{k+1}$. Следует заметить, что i -й этап проскальзывания существует, если $\epsilon(\eta_k) > 2(i-1)$. Качественный вид функций Ψ и Φ для $2 < \epsilon_* < 4$ приведен на фиг. 3 сплошной и штриховой линиями соответственно.

2. Функции последования. 2.1. Из (1.4), (1.5) и фиг. 3 следует, что при $\beta > 2$ всегда имеется одна устойчивая неподвижная точка $\eta_0^* = 0$ отображения T , соответствующая гармоническим колебаниям тела

$$x = \frac{f_* P}{c} + V \sqrt{\frac{m}{c}} \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t$$

без зон длительного контакта с лентой. Прямая $\beta = 2$ на плоскости параметров β, ϵ_* является границей между ТДС, соответствующими безостановочным движениям и периодическими или стохастическими типами движения с длительными контактами тела.

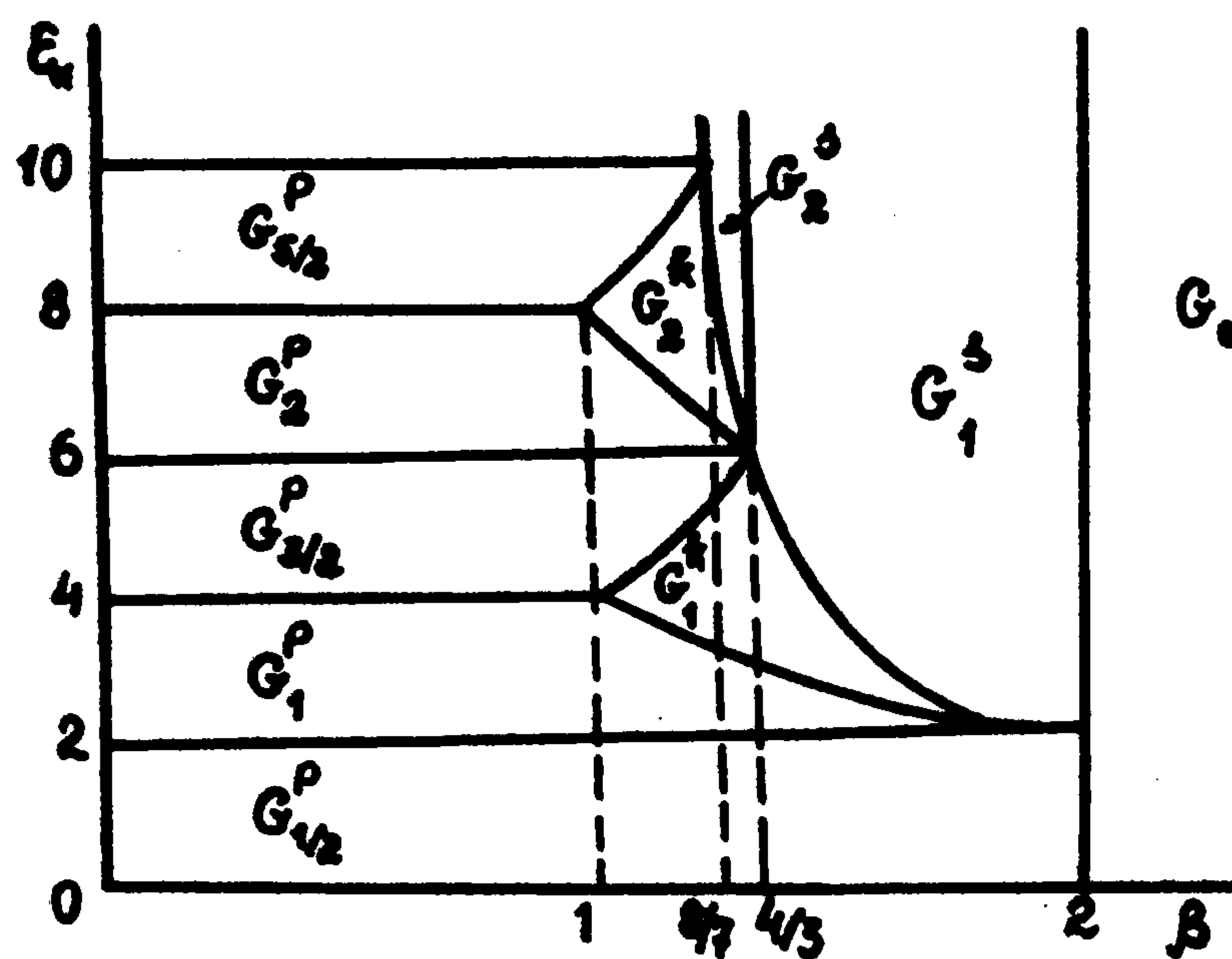


Фиг. 3

С уменьшением β ($0 < \beta < 2$) количество простых неподвижных точек отображения T , определяемых из уравнения $\Psi(\eta^*) = \Phi(\eta^*)$, увеличивается. Неподвижная точка η_0^* при этом становится неустойчивой, простые устойчивые неподвижные точки η_i^* существуют только в области параметров $\eta_i^* > \epsilon_*$ и определяются из соотношений

$$\eta_i^* = \beta^{-1} [1 + \epsilon_* - (-1)^i (\epsilon_* - 2i + 1)] \quad (2.1)$$

и им соответствует $i/2$ -оборотные ТДС с величиной длительного контакта η_i^* тела с лентой [4].



Фиг. 4

Остальные простые неподвижные точки η_k^{**} , принадлежащие интервалам $0 < \eta_k^{**} < \epsilon_*$, неустойчивые и определяются через параметры системы следующей формулой:

$$\eta_k^{**} [1 + (-1)^{k+1} (1 - 2k)] / [\beta - 1 + (-1)^k] \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.2)$$

Из (1.4) и (1.5) следует также, что если $2 < \epsilon_* < 4$ ($j = 2$), то: при $0 < \beta < 4/\epsilon_*$ существует устойчивая 1-оборотная периодическая ТДС со временем η_2^* длительного контакта тела с лентой; при $4/\epsilon_* < \beta < (2 + \epsilon_*)/\epsilon_*$ существуют устойчивые циклы кратных точек преобразования T^n ; при $(2 + \epsilon_*)/\epsilon_* < \beta < 2$ реализуется 1-оборотные стохастические ТДС.

Если $4 < \epsilon_* < 6$ ($j = 3$), то аналогично получаем, что при $0 < \beta < 2 - 4/\epsilon_*$ существует $3/2$ -оборотные устойчивые периодические ТДС со временем η_3^* длительного контакта тела с лентой, при $2 - 4/\epsilon_* < \beta < (2 + \epsilon_*)/\epsilon_*$ наблюдаются циклы кратных точек преобразования T^n и, наконец, при $(2 + \epsilon_*)/\epsilon_* < \beta < 2$ реализуется 1-оборотные стохастические ТДС с длительными контактами.

Продолжая рассматривать интервалы изменения ϵ_* ($j > 3$), можно в общем случае показать следующее.

1°. ТДС без длительных контактов тела реализуются в области G_0 ($\beta > 2, \epsilon_* \geq 0$).

2°. Устойчивые периодические $j/2$ -оборотные ТДС со временем η_j^* длительного контакта реализуются в областях $G_{j/2}^p$ ($2(j-1) < \epsilon_* < 2j; 0 < \beta < 2j/\epsilon_*$ при четных j и $0 < \beta < 2 - 2(j-1)/\epsilon_*$ при нечетных j).

3°. Циклы кратных точек существуют в областях G_j^k плоскости параметров β, ϵ_* , границы которых задаются соотношениями

$$\beta_s = 1 + 2/\epsilon_* \quad (2.3)$$

$$\beta_- = \begin{cases} 2j/\epsilon_*, & j = 2, 4, 6, \dots \\ 2 - 2(j-1)/\epsilon_*, & j = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

4°. $j/2$ -оборотные стохастические ТДС реализуются в областях $G_{j/2}^s$ между границами

$$\beta = 1 + 2/\epsilon_*, \quad \beta = 1 + 1/(j-1) \quad (j = 2, 4, 6, \dots) \quad (2.4)$$

Разбиение плоскости параметров β, ϵ_* на области существования указанных выше ТДС приведено на фиг. 4.

3. Сложные типы ТДС.

3.1. Пусть $2 < \epsilon_* < 4$. Из приведенных выше результатов следует, что при возрастании β от нуля 1-оборотные устойчивые периодические ТДС при $\epsilon_*^0 = 4/\alpha$, ($\alpha = \beta - 1$) становятся неустойчивыми. Можно показать, что при этом рождается пара устойчивых неподвижных точек преобразования T^2 , соответствующих устойчивым периодическим ТДС с удвоенным периодом, которые при $\epsilon_*^1 = 4/(1 + \alpha^2)$ теряют устойчивость, рождается устойчивая четырехкратная периодическая ТДС (появляются устойчивые неподвижные точки преобразования T^4), которая при $\epsilon_*^2 = 4(1 - \alpha^2 + \alpha^3)/(1 + \alpha^4)$ теряет устойчивость, и т.д.

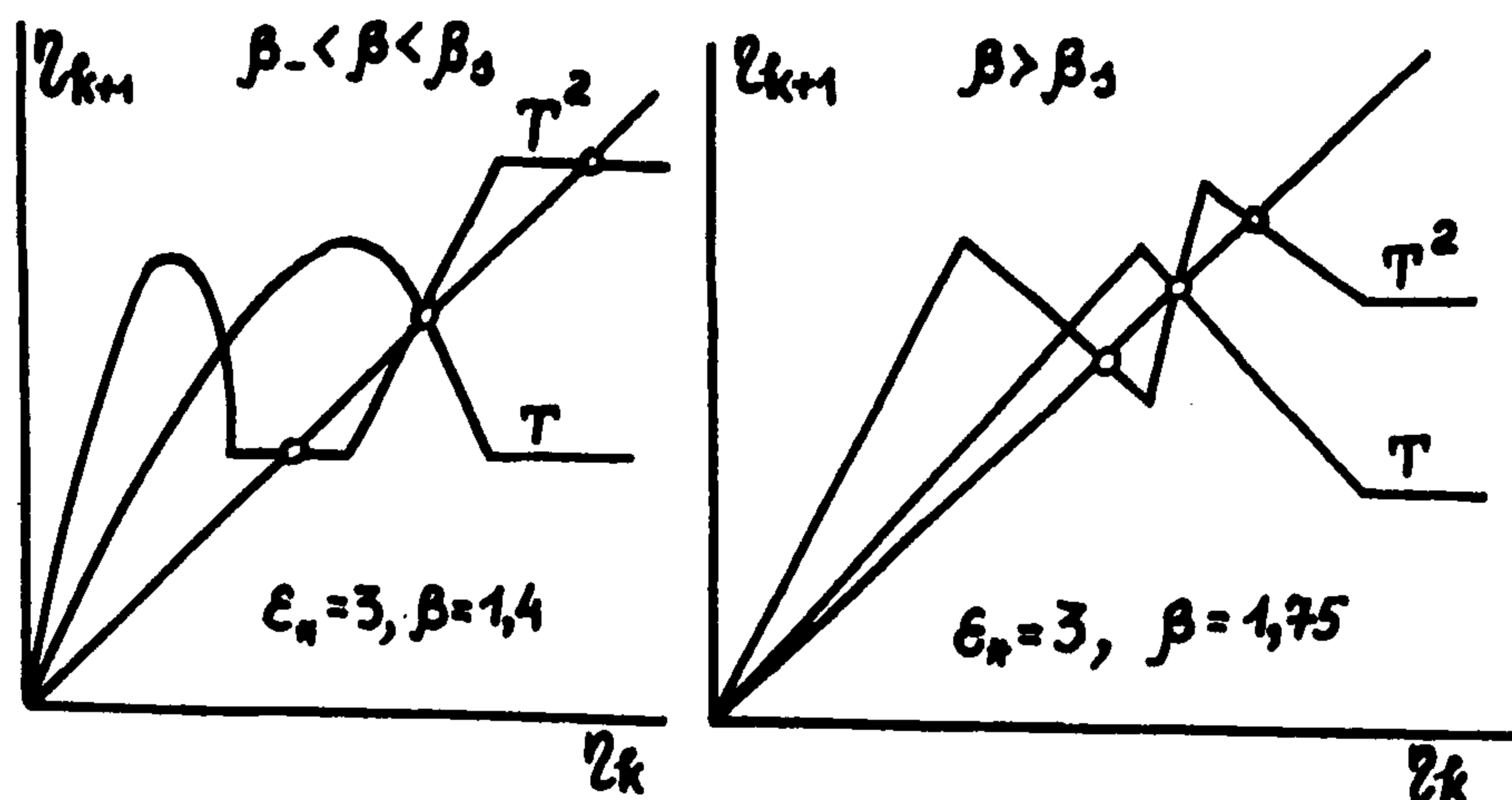
Продолжая изменять ϵ_* , можно получить, что удвоение кратности периода периодических ТДС происходит при переходе через границы Γ_Φ^n , уравнения которых можно описать формулой

$$\epsilon_*^n = \frac{4}{1 + \alpha^{2^n}} \sum_{p=0}^s \alpha^{(2^{2p}-1)} \prod_{k=2p+1}^{n-1} (1 - \alpha^{2^k}) \quad (3.1)$$

$s = n/2$ при четных n , $s = (n - 1)/2$ при нечетных n , где ϵ_*^n определяет 2^n - и 2^{n+1} -кратные периодические ТДС ($n = 0, 1, 2, \dots$).

При $\beta > \beta_-$ преобразование T простых устойчивых неподвижных точек не имеет, а, как показано выше, имеются устойчивые точки преобразования T^n . Показатель Ляпунова [5] в этом случае отрицателен ($\lambda < 0$). При $\beta > \beta_s$ показатель Ляпунова меняет знак и становится положительным ($\lambda > 0$), что соответствует наступлению хаоса.

Соответствующий вид функций последования для преобразований T и T^2 и двух наборов значений параметров $\epsilon_* = 3, \beta = 1,4$; $\epsilon_* = 3, \beta = 1,75$ приведен на фиг. 5.



Фиг. 5

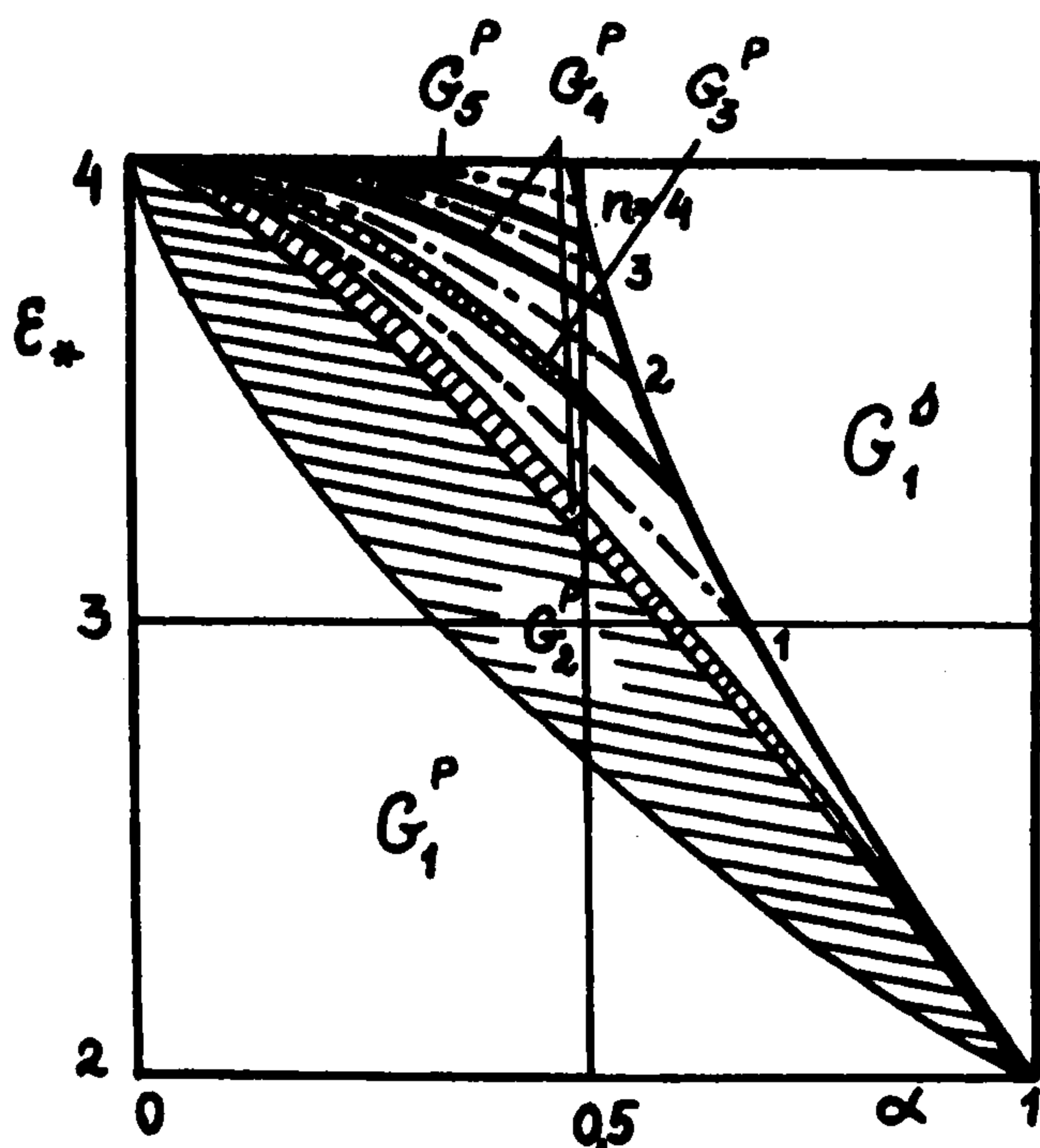
В областях (2.3) можно выделить недостижимые границы Γ_-^n , в сколь угодно малой окрестности которых существуют периодические ТДС сколь угодно высокой кратности, уравнения границ областей существования последних можно записать в виде

$$\epsilon_* = 4 \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1} - 1}, \quad \epsilon_* = \frac{4}{1 + \alpha^{n+1}} \quad (3.2)$$

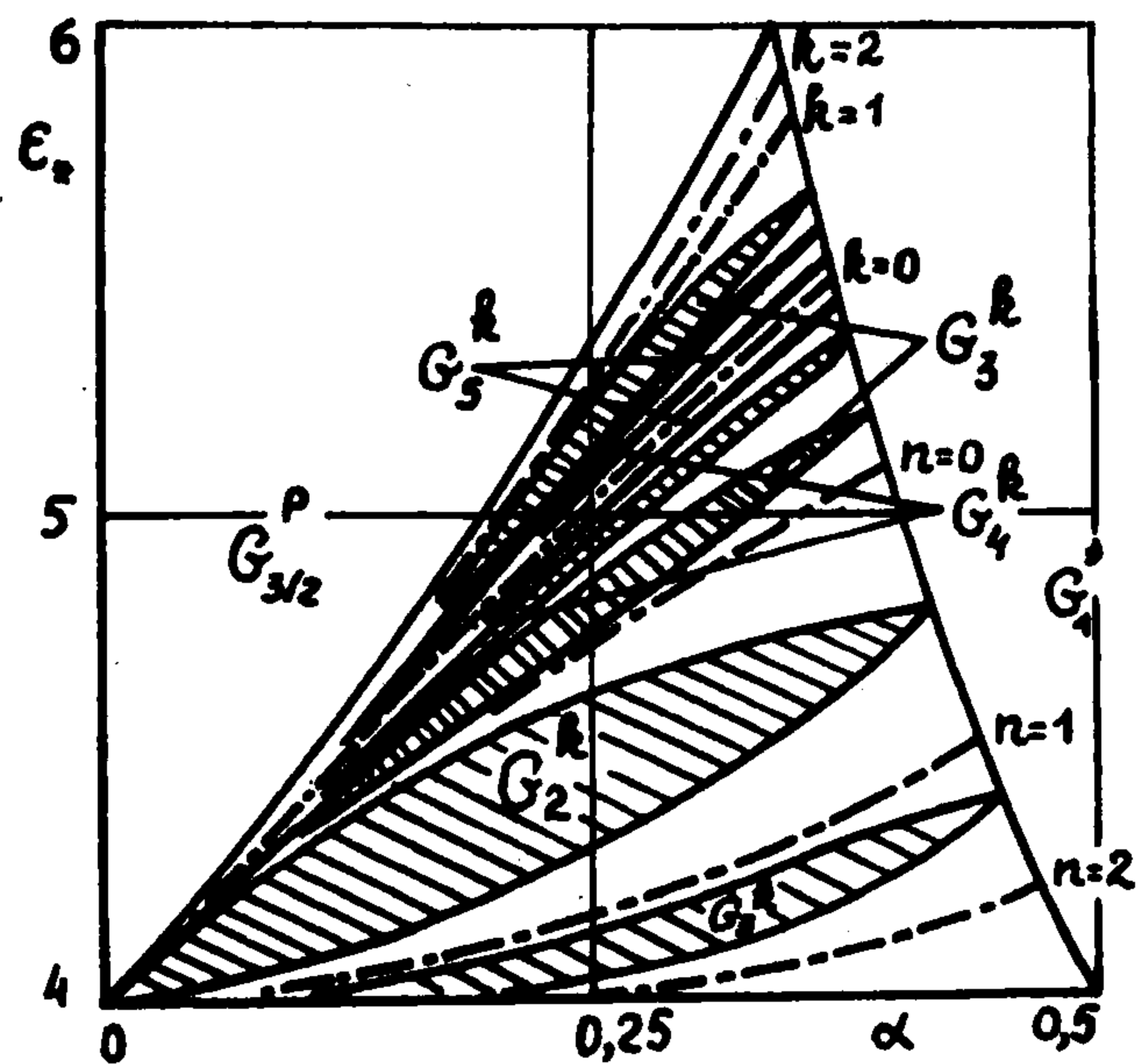
а уравнения границ Γ_-^n в виде

$$\epsilon_* = 4 \frac{1 + \alpha - \alpha^{n+1}}{1 + \alpha} \quad (3.3)$$

На фиг. 6 в плоскости параметров α, ϵ_* приведены области существования сложных ТДС. Штрихпунктирной линией обозначены недостижимые границы. При изменении параметров из заштрихованных областей в сторону недостижимых границ наблюдаются бифуркации удвоения периода. В незаштрихованных областях существуют сложные ТДС, включая стохастические.



Фиг. 6



Фиг. 7

3.2. Пусть $4 < \epsilon_* < 6$. Недостижимые границы в этом случае определяются для разных n формулой

$$\epsilon_* = 4[1 + \alpha^{n+1} / (1 + \alpha)] \quad (3.4)$$

На фиг. 7 в плоскости параметров α, ϵ_* они обозначены штрихпунктирной линией. Циклы $(n + 1)$ -кратных точек преобразования T^{n+1} существуют для значений параметров α, ϵ_* из областей, границы которых задаются соотношениями

$$\epsilon_* = 4 \frac{\alpha^n + 1}{\alpha^{n+1} + 1}, \quad \epsilon_* = \frac{4}{1 - \alpha^{n+1}} \quad (3.5)$$

Здесь, как и в случае $2 < \epsilon_* < 4$, по мере возрастания n недостижимые границы сгущаются, приближаются друг к другу и стремятся к прямой $\epsilon_* = 4$. При этом вновь наблюдается процесс удвоения периода по Фейгенбауму.

В плоскости параметров α, ϵ_* можно выделить прямую $\epsilon_* = 4(\alpha + 1)$ (фиг. 7), по обе стороны от которой находятся области G_3^P существования трехкратных периодических ТДС, ограниченные кривыми

$$\epsilon_* = 4 \frac{1 + \alpha + \alpha^3}{1 + \alpha^3}, \quad \epsilon_* = 4 \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha^3} \quad (3.6)$$

$$\epsilon_* = 4 \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha^3}, \quad \epsilon_* = \frac{1 + \alpha - \alpha^2}{1 - \alpha^3} \quad (3.7)$$

между которыми в свою очередь существуют области четырех-, пяти- и т.д. кратных периодических ТДС, ограниченные кривыми

$$\epsilon_* = 4 \frac{1 + \alpha + \alpha^n}{1 + \alpha^{n+1}}, \quad \epsilon_* = 4 \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha^{n+1}} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad (3.8)$$

Здесь с ростом n по мере приближения к прямой также наблюдается процесс удвоения периода.

Можно показать, что в плоскости параметров α, ϵ_* имеется счетное число недостижимых границ

$$\epsilon_{*k} = 4(1 - \alpha^{k+2}) / (1 - \alpha) \quad (3.9)$$

Эти недостижимые границы разделяют пары (с одинаковым числом n кратности циклов) областей существования периодических ТДС.

Так, кривая $\epsilon_{*1} = 4(1 + \alpha + \alpha^2)$ разделяет две области четырехкратных периодических ТДС, между которыми находятся пары областей пяти-, шести- и т.д. кратных периодических ТДС. По обе стороны кривой $\epsilon_{*2} = 4(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)$ находятся две области пятикратных ТДС, а между ними – области шести-, семи- и т.д. кратных ТДС. Этот процесс появления пар областей сложных периодических ТДС продолжается в направлении изменения к области 3/2-оборотных периодических ТДС. Чем ближе кривая (3.9) располагается к этой области, тем выше кратность самой простой ТДС; k -я недостижимая граница разделяет области $(k + 3)$ -, $(k + 4)$ -, $(k + 5)$ -кратных периодических ТДС, уравнения которых в общем случае записываются следующим образом:

$$\epsilon_* = [4(1 - \alpha^{k+2}) / (1 - \alpha) + \alpha^{n+k}] / (1 + \alpha^{n+k+1}) \quad (3.10)$$

$$\epsilon_* = 4(1 - \alpha^{k+2}) / (1 - \alpha)(1 - \alpha^{n+k+1})$$

а для областей, расположенных выше последней, так:

$$\epsilon_* = 4(1 - \alpha^{k+2}) / (1 - \alpha)(1 + \alpha^{n+k+1}) \quad (3.11)$$

$$\epsilon_* = [4(1 - \alpha^{k+2}) / (1 - \alpha) - \alpha^{n+k}] / (1 - \alpha^{n+k+1})$$

В (3.10) и (3.11) $n = 2, 3, 4, \dots$; $k = 0, 1, 2, \dots$; через $n + k + 1$ обозначена кратность периодических ТДС.

На фиг. 7 приведены области сложных ТДС, включая стохастические.

Изменяя ϵ_* , аналогичным образом можно показать, что описанная выше ситуация появления пар областей существования сколь угодно сложных ТДС в окрестности недостижимых границ имеет место во всей плоскости параметров системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении // Журн. техн. физики. 1944. Т. 14. Вып. 4/5. С. 276–282.
2. Бутенина Н.Н., Метрикин В.С. О недостижимых границах точечного преобразования окружности в себя // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1981. С. 80–84.
3. Кащевский Л.Я. Стохастические автоколебания при сухом трении // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47. № 1. С. 143–147.
4. Ветюков М.М., Доброславский С.В., Нагаев Р.Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 23–28.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 237 с.

Нижний Новгород, Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
6.X.1994