УДК 539.374

© 1996 г. Б.А. Жуков

ЭФФЕКТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КРИТЕРИЯХ СТАРТА ТРЕЩИН В ИДЕАЛЬНО ХРУПКИХ ГИПЕРУПРУГИХ ЭЛАСТОМЕРАХ

Даны постановка и решение плоской задачи теории упругости для гиперупругой среды, содержащей трещину. Получены выражения для энергетического интеграла с целью исследования условий старта трещины. Рассмотрены частные случаи в виде трещин отрыва и поперечного сдвига. Для трещин отрыва эффекты второго порядка не сказываются, а для трещин поперечного сдвига эти эффекты проявляются в виде отклонения трещины от исходного направления, что согласуется с известными наблюдениями.

1. Описание полей напряжений и деформаций с точностью до эффектов второго порядка. Эластомер представляется идеально хрупким [1] гиперупругим [2] несжимаемым материалом. Было предложено[1] представление вектора перемещения для плоской деформации в виде

$$\mathbf{U}=\mathbf{R}-\mathbf{r}=\overset{s}{\nabla}Ft+(\overset{s}{\nabla}F\cdot\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}F+\overset{s}{\nabla}H)\frac{t^2}{2} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ – "плоские части" радиус-векторов точек в исходной и текущей конфигурациях, t – малый параметр, F, H – бигармонические функции от материальных координат (x, y), в качестве которых берутся декартовы координаты точек в исходной конфигурации, $\overset{o}{\nabla}$, $\overset{s}{\nabla}$ – оператор Гамильтона и симплектический оператор в базисе исходной конфигурации. Выражение (1.1) удовлетворяет условию несжимаемости с точностью до членов, пропорциональных t^3.

Для потенциала энергии деформации в форме Муни–Ривлина тензор напряжений Коши, выражение для нормали к деформированной поверхности и силовое граничное условие принимают форму

$$\mathbf{S}=\mu\{t[\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}F+\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla}F+q_1(\mathbf{E}+\mathbf{kk})]+\frac{t^2}{2}[\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}H+\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla}H+\overset{s}{\nabla}F\cdot(\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla}F+\overset{o}{\nabla}\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}F)+$$

$$+2\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla}F\cdot(\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}F+\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla}F)+q_2\mathbf{E}+(q_2+(1-\xi)\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla}F\cdot\cdot(\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}F+\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla}F))\mathbf{kk}]\} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{n}+t\mathbf{B},\ \ \mathbf{f}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}+t\mathbf{B}\cdot\mathbf{s},\ \ \mathbf{B}=\mathbf{nn}\cdot\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}F\cdot\mathbf{n}-\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}F\cdot\mathbf{n} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{s}$ – линейная часть $\mathbf{S}$, пропорциональная t, $\mathbf{f}$ – плотность внешних поверхностных сил, $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности в исходной конфигурации, q_1 и q_2 – функции, удов-

[1] *Жуков Б.А.* Эффекты второго порядка в плоской задаче теории упругости несжимаемого материала. Волгоград, 1993. 16 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.10.93, 1683-В93.

летворяющие системе

$$\begin{cases} \overset{o}{\nabla} q_1 = -\overset{s}{\nabla} \Delta F \\ \overset{o}{\nabla} q_2 = -[\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} F \cdot\cdot (\overset{o}{\nabla}\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} F + \overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F) + \overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} \Delta F + 2\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{s}{\nabla} \Delta F + \overset{s}{\nabla} \Delta H] \end{cases} \tag{1.4}$$

$\mathbf{E} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj}$ – единичный тензор, Δ – оператор Лапласа.

Тензор напряжений Пиолы можно представить в виде

$$\mathbf{D} = \mathbf{S} - \mu t^2 [\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F \cdot (\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} F + \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F) + \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F q_1]$$

В приведенных соотношениях дифференциальные операторы действуют только на первый множитель справа не являющийся оператором, это условие соблюдается и в дальнейшем.

Выражения (1.1)–(1.4) составляют постановку задачи исследования эффектов второго порядка при плоской деформации несжимаемого материала в регулярных точках.

2. Выражение для потока энергии в вершину трещины. В качестве одной из характеристик сингулярных точек, являющихся вершинами разрезов, применяется вектор потока энергии в сингулярную точку [3]:

$$\mathbf{G} = \Gamma_1 \mathbf{i} + \Gamma_2 \mathbf{j} \tag{2.1}$$

$$\Gamma_k = \lim_{\lambda \to 0} \int_\gamma \mathbf{n} \cdot [W\mathbf{E} - \mathbf{D} \cdot \overset{o}{\nabla} \mathbf{u}^T] \cdot \mathbf{i}_k d\lambda, \quad k = 1,2 \quad (\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}, \ \mathbf{i}_2 = \mathbf{j}) \tag{2.2}$$

(выражения для Γ_k записаны для условий плоской деформации в задачах статики идеально хрупких гиперупругих эластомеров при отсутствии массовых сил и тепловых потоков). Здесь γ – простой кусочно-гладкий контур в плоскости XOY в исходной конфигурации, концы которого лежат на противоположных берегах разреза, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к контуру γ, внешний относительно области, содержащей вершину разреза, λ – длина контура γ, W – потенциал энергии деформации.

Интегралы в (2.2) не зависят от контура γ, а только от положения точек, соединенных γ. Необходимым и достаточным условием выполнения этого свойства является равенство нулю дивергенции части подынтегрального выражения, заключенной в квадратные скобки, в регулярных точках

$$\overset{o}{\nabla} \cdot [W\mathbf{E} - \mathbf{D} \cdot \overset{o}{\nabla} \mathbf{u}^T] = 0$$

Для прямолинейного разреза, берега которого свободны от нагрузок, интеграл не зависит и от положения концов контура на берегах разреза. Эти инвариантные интегралы будем обозначать J_k.

Вектор (2.1) применяется в критерии старта сингулярной точки. Согласно энергетической теории криволинейных трещин [3] в материалах однородных и изотропных относительно прочностных свойств вершина трещины начинает двигаться в направлении вектора (2.1), если его модуль достигает некоторого экспериментально определяемого значения.

Выражения для J_k с точностью до эффектов второго порядка получаются в виде

$$\begin{aligned} J_k = \lim_{\lambda \to 0} \mu \int_\gamma \mathbf{n} \cdot \{ & [\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F \cdot\cdot (\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} F + \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F)\mathbf{E} - 2(\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} F + \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F + q_1\mathbf{E}) \cdot \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F] \frac{t^2}{2} + \\ & + \{[\overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F \cdot\cdot (\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} F + \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F) + (\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} H + \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} H) \cdot\cdot \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F]\mathbf{E} - \\ & - [\overset{s}{\nabla} F \cdot (\overset{o}{\nabla}\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} F + \overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F) + \overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} H + \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} H - 2q_1 \overset{s}{\nabla} \cdot \overset{o}{\nabla} F + q_2\mathbf{E}] \cdot \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F - \\ & - (\overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla} F + \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F + q_1\mathbf{E}) \cdot (\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F \cdot \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F + \overset{s}{\nabla} F \cdot \overset{o}{\nabla}\overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} F + \overset{s}{\nabla}\overset{o}{\nabla} H)\} \frac{t^3}{2} \} \cdot \mathbf{i}_k d\lambda \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}, \ \mathbf{i}_2 = \mathbf{j}$.

Инвариантность интегралов проверяется непосредственным вычислением дивергенции от выражения, стоящего во внешних фигурных скобках, которая тождественно равна нулю (с учетом уравнений равновесия (1.4)).

3. Представление бигармонических функций через аналитические. Функции F, q_1, H, q_2 представляются через аналитические с помощью формул Гурса и решений уравнений равновесия (1.4)

$$F = \bar{z}f + z\bar{f} + \varphi + \bar{\varphi}, \quad q_1 = 4i(\bar{f}' - f' - ic), \quad H = \bar{z}\psi + z\bar{\psi} + \chi + \bar{\chi}$$

$$q_2 = 4i(\bar{\psi}' - \psi' - ic_1) - 8[(\bar{z}f'' + \psi'')(\overline{zf''} + \bar{\psi}'') + (z\bar{f}' + \bar{\varphi}' + f)f'' + (\bar{z}f' + \varphi' + \bar{f})\bar{f}''] \tag{3.1}$$

В дальнейшем тензор напряжений Коши S представляется в виде суммы трех слагаемых S = s + S' + S", где s – тензор напряжений линейной теории упругости, S' – тензор, описывающий эффекты второго порядка и порожденный функцией F, S" – тензор, описывающий эффекты второго порядка и порожденный функцией H.

4. Решение задачи о трещинах в рамках эффектов второго порядка. Рассматривается задача о трещине подверженной на бесконечности нормальным нагрузкам интенсивности p и касательным интенсивности τ.

Введем новые переменные (u, v), являющиеся эллиптическими координатами $z = l\,\mathrm{ch}\,(\xi)$, $\xi = u + iv$, где l – половина длины разреза.

Линейное решение получим, положив

$$f = \frac{l(\tau + ip)}{8\mu t}\mathrm{sh}\,\xi, \quad \varphi' = -\frac{l}{8\mu t}\left[(\tau - ip)\mathrm{sh}\,\xi + (\tau + ip)\frac{\mathrm{ch}^2\,\xi}{\mathrm{sh}\,\xi}\right] \tag{4.1}$$

в виде

$$\mathbf{s} = \frac{p}{2}\{A_-\mathbf{ii} + A_+\mathbf{jj} + iC_+(\mathbf{ij} + \mathbf{ji})\} + \frac{\tau i}{4}\{(4B_- + 2C_+)\mathbf{ii} + 2C_+\mathbf{jj} - i2A_+(\mathbf{ij} + \mathbf{ji})\} \tag{4.2}$$

$$A_\pm = B_+ \pm C_-, \quad B_\pm = \frac{\mathrm{sh}(\xi \pm \bar{\xi})}{\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{sh}\,\bar{\xi}}, \quad C_\pm = \frac{(\mathrm{ch}\,\bar{\xi} - \mathrm{ch}\,\xi)(\mathrm{sh}^3\,\xi \pm \mathrm{sh}^3\,\bar{\xi})}{2\,\mathrm{sh}^3\,\xi\,\mathrm{sh}^3\,\bar{\xi}}$$

Функциями (4.1) порождается тензор

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{32\mu}\{[2O\bar{O} + DK + \bar{K}\bar{D} - 2E(O + \bar{O})]\mathbf{ii} + [2O\bar{O} - DL + \bar{L}\bar{D} + 2E(O + \bar{O})]\mathbf{jj} +$$

$$+ i[DM - \bar{D}\bar{M} - 2E(O - \bar{O})](\mathbf{ij} + \mathbf{ji})\} \tag{4.3}$$

$$K = T + \frac{5\tau + 3ip}{\mathrm{sh}^3\,\xi} + \frac{V_-}{\mathrm{sh}^3\,\bar{\xi}}, \quad L = -T + V_-\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^3\,\xi} + \frac{1}{\mathrm{sh}^3\,\bar{\xi}}\right), \quad M = -T + \frac{3\tau + ip}{\mathrm{sh}^3\,\xi} - \frac{V_-}{\mathrm{sh}^3\,\bar{\xi}}$$

$$T = 3V_+(\mathrm{ch}\,\xi - \mathrm{ch}\,\bar{\xi}), \quad E = I + \bar{I}, \quad I = V_+\frac{\mathrm{ch}\,\xi}{\mathrm{sh}\,\xi}, \quad O = V_+\frac{\mathrm{ch}\,\xi - \mathrm{ch}\,\bar{\xi}}{\mathrm{sh}^3\,\xi} - 2\tau\frac{\mathrm{ch}\,\xi}{\mathrm{sh}\,\xi}$$

$$D = V_+(\mathrm{sh}\,\xi - \mathrm{sh}\,\bar{\xi}) + V_-(\mathrm{ch}\,\xi - \mathrm{ch}\,\bar{\xi})\frac{\mathrm{ch}\,\bar{\xi}}{\mathrm{sh}\,\bar{\xi}}, \quad V_\pm = \tau \pm ip$$

Обозначим через $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ единичные векторы, в которые переходят по (1.3) векторы **i** и **j**. Подставляя (4.1) в (3.1), а результат в (1.3) и устремляя u к бесконечности, получим

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{i} - \frac{\tau}{2\mu}\mathbf{j}, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{j} + \frac{\tau}{2\mu}\mathbf{i}$$

Положим, что нагрузка следящая (на линейном решении это не сказывается):

$\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{S} = p\mathbf{N}_1 + \tau\mathbf{N}_2, \ \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{S} = p\mathbf{N}_2 + \tau\mathbf{N}_1$

Тогда по (1.3), (4.2), (4.3) получаем граничные условия для S" на бесконечности

$$S''_{xx} = \frac{\tau^2}{4\mu}, \quad S''_{yy} = -\frac{3\tau^2}{4\mu}, \quad S''_{xy} = 0$$

На разрезе

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{j} + \frac{p}{4\mu}\frac{\sin 2\nu}{\sin^2\nu}\mathbf{i}$$

и из $\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{S} = 0$ по (1.3), (4.2), (4.3) получаем

$$S''_{yx} = -\frac{p\tau}{2\mu}, \quad S''_{yy} = -\frac{\tau^2}{4\mu}\frac{\cos^2\nu}{\sin^2\nu}$$

Удовлетворить граничным условиям можно, положив

$$\psi' = \frac{\tau^2 i}{8\mu^2 t^2}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\xi}{2\operatorname{sh}^2\xi} - 2\frac{\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}\xi}\right) + \frac{\tau p}{8\mu^2 t^2}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}\xi}\right)$$

$$\chi'' = \frac{\tau^2 i}{8\mu^2 t^2}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}2\xi}{2\operatorname{sh}^3\xi} - 2\left(1 + \frac{\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}^3\xi}\right)\right) - \frac{\tau p}{8\mu^2 t^2}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}^3\xi} - 2\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}\xi}\right)\right) \tag{4.4}$$

Таким образом, получим

$$\mathbf{S}'' = \left[\frac{\tau^2}{16\mu}(8C_- + N + 2R + 16) + \frac{i\tau p}{8\mu}(B_- + C_+)\right]\mathbf{ii} +$$

$$+\left[\frac{\tau^2}{16\mu}(8C_- + N + 2R) + \frac{i\tau p}{8\mu}C_-\right]\mathbf{jj} + \left[\frac{i\tau^2}{16\mu}N + \frac{\tau p}{4\mu}(B_+ + C_- - 2)\right](\mathbf{ij} + \mathbf{ji}) \tag{4.5}$$

$$N = (\operatorname{ch}\bar\xi - \operatorname{ch}\xi)\left(\frac{\operatorname{sh}2\xi}{\operatorname{sh}^3\xi} - \frac{\operatorname{sh}2\bar\xi}{\operatorname{ch}^3\bar\xi}\right), \quad R = \frac{\operatorname{ch}^2\xi}{\operatorname{sh}^3\xi} + \frac{\operatorname{ch}^2\bar\xi}{\operatorname{sh}^2\bar\xi} - B_+$$

Сумма выражений (4.2), (4.3), (4.5) представляет тензор напряжений Коши, описывающий напряженное состояние.

Для вычисления интегралов (2.3) используются асимптотические представления гиперболических функций, подстановка которых в (4.1) и (4.4), а последних в (3.1) и (2.3) приводит к асимптотическим разложениям подынтегральных выражений. Сингулярная часть этих выражений в обоих интегралах получается в виде

$$Q(r, \alpha) = r^{-3/2}A(\alpha) + r^{-1}B(\alpha) + r^{-1/2}C(\alpha)$$

Для того чтобы интегралы были конечными и не зависели от r необходимо, чтобы интегралы от первого и третьего слагаемых по α на отрезке $[-\pi, \pi]$ обращались в нуль, что проверяется непосредственным вычислением.

Интегралы от вторых слагаемых дают выражения

$$J_1 = \frac{\pi l}{4\mu}\left[(p^2 + \tau^2) - \frac{p\tau^2}{\mu}\right], \quad J_2 = \frac{\pi l}{4\mu}\left[-2p\tau + \frac{\tau}{\mu}(2\tau^2 - p^2)\right]$$

Добавки в сравнении с линейным решением, т.е. вторые слагаемые в квадратных скобках, могут достигать заметной величины для низкомодульных материалов.

Вектор потока энергии представляется в форме $\mathbf{G} = J_1\mathbf{i} + J_2\mathbf{j}$. Согласно энергетической теории [3] трещина начинает двигаться, если $|\mathbf{G}|$ достигнет некоторой постоянной для данного материала величины, определяемой экспериментально, под углом $\Theta = \operatorname{arctg}\left(J_2/J_1\right)$ к оси X.

Решение для трещины нормального отрыва получается как частный случай при $\tau = 0$. При описании напряженного состояния в тензоре Коши отсутствует слагаемое S'', и эффекты первого и второго порядка определяется только комплексными потенциалами линейной теории. Вектор потока энергии получается в виде $\mathbf{G} = \pi l p^2 (4\mu)^{-1}\mathbf{i}$, т.е. совпадает с результатами линейного решения, эффекты второго порядка не проявляются в критерии старта трещины.

Решение для трещины поперечного сдвига получается при $p = 0$ и определяется следующими комплексными потенциалами, и векторами потока энергии:

$$f = \frac{l\tau}{8\mu t}\operatorname{sh}\xi,\quad \varphi' = -\frac{l\tau}{8\mu t}\left[\operatorname{sh}\xi + \frac{\operatorname{ch}^2\xi}{\operatorname{sh}\xi}\right],\quad \psi' = \frac{\tau^2 i}{8\mu^2 t^2}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\xi}{2\operatorname{sh}^2\xi} - \frac{\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}\xi}\right)$$

$$\chi'' = \frac{\tau^2 i}{8\mu^2 t^2}\left(\frac{\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}2\xi}{2\operatorname{sh}^5\xi} - 2\left(1 + \frac{\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}^3\xi}\right)\right),\quad \mathbf{G} = \frac{\pi l}{4\mu}\tau^2\left(\mathbf{i} + \frac{2\tau}{\mu}\mathbf{j}\right)$$

Решение отличается от линейного, эффекты второго порядка проявляются в том, что трещина стартует под углом $\Theta = \operatorname{arctg}\left(2\tau/\mu\right)$ к разрезу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костров Б.В., Никитин Л.В., Флитман Л.М.* Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 112–125.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Волгоград

Поступила в редакцию
9.VI.1995