УДК 539.374

© 1996 г. В.В. Тихомиров

МЕЖФАЗНАЯ ТРЕЩИНА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЕ

Исследуется трехмерное напряженное состояние в окрестности вершины плоской полубесконечной трещины, находящейся на стыке двух разнородных трансверсально-изотропных материалов. С помощью сведения задачи к матричному уравнению Винера–Хопфа построено ее точное аналитическое решение, найден показатель особенности упругого поля и определены коэффициенты интенсивности напряжений.

Ранее подобная трехмерная проблема изучалась для случая изотропных материалов [1]. Задачи о межфазных трещинах в анизотропных средах исследовались только в двумерной постановке (см., например, [2, 3]).

1. Рассмотрим упругое пространство, составленное из двух трансверсально-изотропных однородных полупространств $z \geqslant 0$ и $z \leqslant 0$, отмечаемых далее индексами 1 и 2. Пусть на границе раздела сред $z = 0$ расположена трещина в виде полуплоскости $\{(x, y): x < 0, |y| < \infty\}$, к берегам которой приложена самоуравновешенная нормальная нагрузка $p(x, y)$, симметричная относительно оси x. На остальной части границы имеет место идеальный механический контакт материалов.

В предположении, что плоскости изотропии материалов полупространств параллельны плоскости трещины и объемные силы отсутствуют, задача сводится к решению уравнений равновесия в перемещениях [4] при следующих условиях на границе $z = 0$:

$$\tau_{xzj} = \tau_{yzj} = 0, \quad \sigma_{zj} = -p(x,y) \tag{1.1}$$

$$(j=1,2; \quad x<0, \quad |y|<\infty)$$

$$\tau_{xz1} = \tau_{xz2}, \quad \tau_{yz1} = \tau_{yz2}, \quad \sigma_{z1} = \sigma_{z2} \tag{1.2}$$

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2 \quad (x>0, \ |y|<\infty) \tag{1.3}$$

где u_j, v_j, w_j – перемещения вдоль осей x, y и z соответственно, а τ_{xzj}, τ_{yzi}, σ_{zj} – компоненты тензоров напряжений.

Кроме того, следует учесть еще требование убывания напряжений на бесконечности и условие ограниченности потенциальной энергии деформации в окрестности фронта трещины.

Применение двумерного преобразования Фурье по переменным x и y к уравнениям равновесия приводит к следующему представлению перемещений:

$$\begin{Vmatrix} u_j(x,y,z) \\ v_j(x,y,z) \\ w_j(x,y,z) \end{Vmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{L_\lambda} \begin{Vmatrix} U_j(\lambda,\mu,z) \\ V_j(\lambda,\mu,z) \\ W_j(\lambda,\mu,z) \end{Vmatrix} e^{-i(\lambda x+\mu y)} d\lambda d\mu \tag{1.4}$$

где

$$U_j(\lambda,\mu,z)=\sum_{k=1}^{3}A_{jk}e^{-\omega_{jk}\gamma|z|},\quad V_j(\lambda,\mu,z)=\sum_{k=1}^{3}A_{jk}p_k e^{-\omega_{jk}\gamma|z|} \tag{1.5}$$

$$W_j(\lambda,\mu,z)=(-1)^j\frac{i\gamma}{\lambda}\sum_{k=1}^{2}A_{jk}\omega_{jk}q_{jk}e^{-\omega_{jk}\gamma|z|}\quad (j=1,2)$$

$$A_{jk}\equiv A_{jk}(\lambda,\mu),\quad p_1=p_2=\mu/\lambda,\quad p_3=-\lambda/\mu,\quad \gamma=(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$$

$$q_{jk}=(C_{13}^{(j)}+C_{44}^{(j)})/(C_{33}^{(j)}\omega_{jk}^2-C_{44}^{(j)})\quad (j,k=1,2)$$

$$\omega_{jk}^2=\alpha_j\mp(\alpha_j^2-\beta_j)^{1/2}\quad (k=1,2),\quad \omega_{j3}=(C_{66}^{(j)}/C_{44}^{(j)})^{1/2}$$

$$\alpha_j=(C_{11}^{(j)}C_{33}^{(j)}-C_{13}^{(j)2}-2C_{13}^{(j)}C_{44}^{(j)})/(2C_{33}^{(j)}C_{44}^{(j)}),\quad \beta_j=C_{11}^{(j)}/C_{33}^{(j)}$$

Упругие постоянные полупространств $C_{mn}^{(j)}$ согласно [4] удовлетворяют неравенствам

$$C_{11}^{(j)}>0,\quad C_{11}^{(j)}>C_{12}^{(j)},\quad C_{44}^{(j)}>0,\quad C_{33}^{(j)}(C_{11}^{(j)}+C_{12}^{(j)})>2C_{13}^{(j)^2} \tag{1.6}$$

Здесь и далее рассматривается та однозначная ветвь функции $\gamma=(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$ которая определена на комплексной плоскости с разрезами вдоль лучей $(-i\infty,-i|\mu|)$ и $(i|\mu|,i\infty)$ и принимает положительные значения при вещественном λ. Контур интегрирования L_λ в (1.4) расположен в полосе $-|\mu|<\operatorname{Im}\lambda<0$.

Характеристические числа ω_{j1} и ω_{j2} для различных пар материалов могут принимать вещественные или комплексно-сопряженные значения. В суммах (1.5) используются те из них, для которых $\operatorname{Re}\omega_{jk}>0$.

Условия (1.1) и (1.2) позволяют выразить постоянные A_{2k} через A_{1k}. После этого с помощью смешанных граничных условий (1.1) для $j=1$ и (1.3) находим, что $A_{j3}=0$, а величины A_{11} и A_{12} определяются из следующей системы парных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1/2}\int_{L_\lambda}\gamma[\omega_{11}C_1(\lambda,\mu)+\omega_{12}C_2(\lambda,\mu)]e^{-i\lambda x}d\lambda=0\quad (x<0)\\
&(2\pi)^{-1/2}\int_{L_\lambda}\frac{i\gamma^2}{\lambda}[C_1(\lambda,\mu)+C_2(\lambda,\mu)]e^{-i\lambda x}d\lambda=-p^*(x,\mu)\quad (x<0)\\
&(2\pi)^{-1/2}\int_{L_\lambda}[a_1C_1(\lambda,\mu)+a_2C_2(\lambda,\mu)]e^{-i\lambda x}d\lambda=0\quad (x>0)\\
&(2\pi)^{-1/2}\int_{L_\lambda}\frac{i\gamma}{\lambda}[b_1C_1(\lambda,\mu)+b_2C_2(\lambda,\mu)]e^{-i\lambda x}d\lambda=0\quad (x>0)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$a_m=\frac{1}{C_{44}^{(1)}(1+q_{1m})}+\frac{\zeta_{1m}-\zeta_{2m}}{C_{44}^{(2)}(\omega_{21}-\omega_{22})}$$

$$b_m=\frac{\omega_{1m}q_{1m}}{C_{44}^{(1)}(1+q_{1m})}+\frac{\omega_{22}q_{22}\zeta_{2m}-\omega_{21}q_{21}\zeta_{1m}}{C_{44}^{(2)}(\omega_{21}-\omega_{22})}$$

$$\zeta_{1m}=\frac{\omega_{22}+\omega_{1m}}{1+q_{21}},\quad \zeta_{2m}=\frac{\omega_{21}+\omega_{1m}}{1+q_{22}}$$

$$C_m(\lambda,\mu)=C_{44}^{(1)}(1+q_{1m})A_{1m}(\lambda,\mu),\quad m=1,2$$

$$p^*(x,\mu)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)e^{i\mu y}dy$$

Обозначим через $T_+(\lambda, \mu)$ и $S_+(\lambda, \mu)$ трансформанты Фурье по координатам x и y касательных τ_{xz} и нормальных σ_z напряжений на продолжении трещины, а через $U_-(\lambda, \mu)$ и $W_-(\lambda, \mu)$ – трансформанты перемещений берегов трещины $u_1(x, y, 0) - u_2(x, y, 0)$ и $w_1(x, y, 0) - w_2(x, y, 0)$ соответственно. Тогда система парных интегральных уравнений (1.7) сводится к матричной задаче Римана с комплексной переменной λ и вещественным параметром μ

$$D\gamma G(\lambda,\mu)F_-(\lambda,\mu)=F_+(\lambda,\mu)-Q(\lambda,\mu),\quad \lambda\in L_\lambda \tag{1.8}$$

$$G(\lambda,\mu)=\begin{Vmatrix} g_1 & i\lambda g_3/\gamma \\ -i\gamma g_3/\lambda & g_2 \end{Vmatrix},\quad Q(\lambda,\mu)=\begin{Vmatrix} 0 \\ P_-(\lambda,\mu) \end{Vmatrix}$$

$$F_-(\lambda,\mu)=\begin{Vmatrix} U_-(\lambda,\mu) \\ W_-(\lambda,\mu) \end{Vmatrix},\quad F_+(\lambda,\mu)=\begin{Vmatrix} T_+(\lambda,\mu) \\ S_+(\lambda,\mu) \end{Vmatrix}$$

$$P_-(\lambda,\mu)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{0}p^*(x,\mu)e^{i\lambda x}dx$$

Постоянная D и величины g_k ($k = 1, 2, 3$), входящие в матричный коэффициент задачи (1.8), определяются только упругими модулями материалов и имеют вид (постоянная D, не участвующая в дальнейших выкладках, не приводится)

$$\begin{Vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Vmatrix}=(\xi_2^2-\eta_2^2)\begin{Vmatrix} \xi_1\Omega_1 \\ C_{33}^{(1)}\Omega_1 \\ \xi_1-\eta_1 \end{Vmatrix}+(\xi_1^2-\eta_1^2)\begin{Vmatrix} \xi_2\Omega_2 \\ C_{33}^{(2)}\Omega_2 \\ \eta_2-\xi_2 \end{Vmatrix} \tag{1.9}$$

$$\xi_j=(C_{11}^{(j)}C_{33}^{(j)})^{1/2},\quad \eta_j=C_{13}^{(j)},\quad \Omega_j=\omega_{j1}+\omega_{j2},\quad j=1,2$$

В выражения (1.9) входят только суммы характеристических чисел $\omega_{jn}(j, n = 1, 2)$, и поэтому, несмотря на возможную их комплексность, величины g_k для любых пар материалов вещественны. Кроме того, из неравенств (1.6) вытекает, что g_1 и g_2 положительны. Заметим также, что если материалы полупространств одинаковы, то, как следует из (1.9), $g_3 = 0$. В этом случае $G(\lambda, \mu)$ имеет диагональный вид и, следовательно, матричная задача (1.8) распадается на две скалярные задачи.

2. Ключевым моментом при решении уравнения (1.8) является факторизация его матрицы-коэффициента. С этой целью домножим (1.8) на постоянную матрицу $S = \operatorname{diag}(g_1^{-1}, g_2^{-1})$. В результате получим

$$DR(\lambda,\mu)F_-(\lambda,\mu)=SF_+(\lambda,\mu)-SQ(\lambda,\mu),\quad \lambda\in L_\lambda \tag{2.1}$$

где

$$R(\lambda,\mu)=\gamma Z(\lambda,\mu)$$

$$Z(\lambda,\mu)=SG(\lambda,\mu)=\begin{Vmatrix} 1 & i\lambda g_3(\gamma g_1)^{-1} \\ -i\gamma g_3(\lambda g_2)^{-1} & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

Отметим, что матрица $Z(\lambda, \mu)$ имеет постоянные собственные числа

$$\Lambda_{1,2}=1\mp\beta,\quad \beta=g_3(g_1g_2)^{-1/2} \tag{2.3}$$

(причем в силу неравенств (1.6) $|\beta| < 1$) и полиномиальную коммутанту

$$B(\lambda,\mu)=\frac{1}{\lambda\gamma}\begin{Vmatrix} 0 & i\lambda^2/g \\ -i(\lambda^2+\mu^2)g & 0 \end{Vmatrix},\quad g=(g_1/g_2)^{1/2}$$

Тогда факторизация матрицы (2.2) осуществляется по формулам [5]

$$Z(\lambda,\mu)=X_+(\lambda,\mu)X_-^{-1}(\lambda,\mu) \tag{2.4}$$

$$X^{\pm 1}(\lambda,\mu)=\varphi^{\pm 1}(\lambda,\mu)\{I\,\mathrm{ch}[\gamma\psi(\lambda,\mu)]\pm B(\lambda,\mu)\,\mathrm{sh}[\gamma\psi(\lambda,\mu)]\}$$

Здесь I – единичная матрица, а функции $\varphi(\lambda,\mu)$ и $\psi(\lambda,\mu)$ удовлетворяет двум скалярным уравнениям

$$\varphi_+(\lambda,\mu)\varphi_-^{-1}(\lambda,\mu)=\Delta^{1/2}, \quad \lambda\in L_\lambda \tag{2.5}$$

$$\psi_+(\lambda,\mu)-\psi_-(\lambda,\mu)=\varkappa/\gamma, \quad \lambda\in L_\lambda \tag{2.6}$$

правые части которых определяются собственными числами (2.3)

$$\Delta=\Lambda_1\Lambda_2=1-\beta^2, \quad \varkappa=\tfrac{1}{2}\ln(\Lambda_1/\Lambda_2)=\tfrac{1}{2}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

Решения задач (2.5), (2.6) находятся известным способом [6] и выражаются формулами

$$\varphi_+(\lambda,\mu)=1, \quad \varphi_-(\lambda,\mu)=(1-\beta^2)^{-1/2} \tag{2.7}$$
$$\psi_\pm(\lambda,\mu)=i\varepsilon\gamma^{-1}\ln[(\lambda+\gamma)/(\pm i|\mu|)]$$

Входящая сюда биупругая постоянная $\varepsilon=(2\pi)^{-1}\ln[(1-\beta)/(1+\beta)]$ имеет ту же структуру, что и в плоских задачах о межфазных трещинах в изотропных средах [7]. Однако роль константы Дундурса [8] в случае трансверсально-изотропных сред играет величина β, задаваемая формулой (2.3).

Таким образом, факторизация матрицы-коэффициента задачи (2.1) имеет вид

$$R(\lambda,\mu)=R_+(\lambda,\mu)R_-(\lambda,\mu), \quad R_\pm(\lambda,\mu)=(\lambda\pm i|\mu|)^{1/2}X_\pm^{\pm 1}(\lambda,\mu) \tag{2.8}$$

Тогда уравнение (2.1) можно представить в форме

$$DR_-(\lambda,\mu)F_-(\lambda,\mu)+Q_-(\lambda,\mu)=R_+^{-1}(\lambda,\mu)SF_+(\lambda,\mu)-Q_+(\lambda,\mu) \tag{2.9}$$

где

$$Q_\pm(\lambda,\mu)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\alpha}R_+^{-1}(\alpha,\mu)SQ(\alpha,\mu)\frac{d\alpha}{\alpha-\lambda} \tag{2.10}$$

Контур L_α расположен между вещественной осью и контуром L_λ.

Используя принцип аналитического продолжения, теорему Лиувилля и условие убывания напряжений на бесконечности, из уравнения (2.9) получаем соотношение

$$F_+(\lambda,\mu)=S^{-1}R_+(\lambda,\mu)Q_+(\lambda,\mu)$$

Отсюда вытекает, что напряжения на продолжении трещины имеют вид

$$\begin{Vmatrix}\tau_{xz}(x,y,0)\\ \sigma_z(x,y,0)\end{Vmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{L_\lambda}S^{-1}R_+(\lambda,\mu)Q_+(\lambda,\mu)e^{-i\lambda x}d\lambda\right]\cos\mu y\,d\mu \tag{2.11}$$

3. Построим асимптотики напряжений (2.11) при $x\to+0$. Согласно теореме абелева типа [6] они определяются асимптотиками подынтегральных функций при $\lambda\to\infty$.

С помощью формул (2.4), (2.7) и (2.8) при $\lambda\to\infty$ находим

$$\frac{R_+(\lambda,\mu)}{\alpha-\lambda}\sim-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\lambda}{i\mu}\right)^{i\varepsilon}\Psi^+ +\left(\frac{2\lambda}{i\mu}\right)^{-i\varepsilon}\Psi^-\right]\lambda^{-1/2}, \quad \Psi^\pm=\begin{Vmatrix}1 & \pm ig^{-1}\\ \mp ig & 1\end{Vmatrix}$$

Тогда с учетом соотношения (2.10), применения теоремы о вычетах, а также значения интеграла [9]

$$\int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-tx}dt = x^{-\nu}\Gamma(\nu) \quad (x>0)$$

из (2.11) приходим к следующему представлению напряжений вблизи фронта трещины:

$$\left\|\begin{matrix}\tau_{xz}(x,y,0)\\ \sigma_z(x,y,0)\end{matrix}\right\| \sim \frac{1}{2\pi^2}(\Phi^+ + \Phi^-), \quad \Phi^\pm = S^{-1}\Psi^\pm\Gamma\left(\frac{1}{2}\pm i\varepsilon\right)\int_0^\infty f(\mu)\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\mp i\varepsilon}\cos\mu y d\mu x^{-1/2\mp i\varepsilon} \quad (3.1)$$

$$S^{-1} = \mathrm{diag}(g_1, g_2), \quad f(\mu) = \left\|\begin{matrix}(g_1g_2)^{-1/2} & f_2(\mu)\\ g_2^{-1} & f_1(\mu)\end{matrix}\right\| = i^{1/2}\mathrm{ch}\,\pi\varepsilon\int_{L_\lambda} R_+^{-1}(\alpha,\mu)SQ(\alpha,\mu)d\alpha$$

Используя формулы (2.4), (2.7), (2.8), элементы матрицы-столбца $f(\mu)$ можно выразить через трансформанту Фурье $P_-(\alpha, \mu)$ нормальной нагрузки

$$f_1(\mu) = i^{1/2}\mathrm{ch}\,\pi\varepsilon\int_{L_\alpha}\frac{P_-(\alpha,\mu)}{(\alpha+i\mu)^{1/2}}\cos\left(\varepsilon\ln\frac{\alpha+\gamma}{i\mu}\right)d\alpha$$

$$f_2(\mu) = i^{1/2}\mathrm{ch}\,\pi\varepsilon\int_{L_\alpha}\frac{\alpha P_-(\alpha,\mu)}{\gamma(\alpha+i\mu)^{1/2}}\sin\left(\varepsilon\ln\frac{\alpha+\gamma}{i\mu}\right)d\alpha$$

Введем в рассмотрение функции

$$r_n(y) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\int_0^\infty f_n(\mu)\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-i\varepsilon}\cos\mu y d\mu \quad (n=1,2) \quad (3.2)$$

Тогда асимптотика напряжений при $x \to +0$ (3.1) примет вид

$$\begin{aligned}&\sigma_z(x,y,0) \sim [K_1(y)\cos(\varepsilon\ln x) - K_2(y)\sin(\varepsilon\ln x)]x^{-1/2}\\ &\tau_{xz}(x,y,0) \sim g[K_1(y)\sin(\varepsilon\ln x) + K_2(y)\cos(\varepsilon\ln x)]x^{-1/2}\end{aligned} \quad (3.3)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений $K_1(y)$ и $K_2(y)$ вычисляются по формулам

$$K_1(y) = \frac{1}{\pi^2}[\mathrm{Re}\,r_1(y) + \mathrm{Im}\,r_2(y)], \quad K_2(y) = \frac{1}{\pi^2}[\mathrm{Re}\,r_2(y) - \mathrm{Im}\,r_1(y)] \quad (3.4)$$

Таким образом, трехмерные поля напряжений в окрестности вершины трещины, расположенной на границе раздела двух различных трансверсально-изотропных материалов, являются осциллирующими. Асимптотические формулы (3.3) имеют такую же структуру, как и в случае плоских [7] или осесимметричных задач [10] для межфазных трещин в изотропных средах.

4. Рассмотрим в качестве примера случай, когда к берегам трещины на оси x приложены сосредоточенные нормальные силы величины P на расстоянии a от ее вершины, т.е. $p(x, y) = P\delta(x + a)\delta(y)$ и, следовательно, $P_-(\lambda, \mu) = Pe^{-i\lambda a}/(2\pi)$. Тогда функции (3.2) можно представить в виде однократных квадратур [1]

$$\begin{aligned}&r_1(y) = Ph(\varepsilon)\int_1^\infty\frac{\cos[\varepsilon l(\xi)]}{\sqrt{\xi-1}}\chi(\xi,y)d\xi\\ &r_2(y) = Ph(\varepsilon)\left\{\int_1^\infty\frac{\xi\sin[\varepsilon l(\xi)]}{(\xi-1)\sqrt{\xi+1}}\chi(\xi,y)d\xi + 2^{-1/2}\chi(1,y)\mathrm{th}\,\pi\varepsilon\right\}\end{aligned} \quad (4.1)$$

$$h(\varepsilon) = 2^{i\varepsilon}(1/2 - i\varepsilon)\mathrm{ch}\,\pi\varepsilon, \quad l(\xi) = \ln(\xi+\sqrt{\xi^2-1}), \quad \chi(\xi,y) = (y^2+a^2\xi^2)^{-3/4+i\varepsilon/2}\cos\left[\left(\frac{3}{2}-i\varepsilon\right)\mathrm{arctg}\frac{y}{a\xi}\right]$$

Результаты вычислений коэффициентов интенсивности напряжений по формулам (3.4), (4.1) для нескольких пар трансверсально-изотропных материалов и значений параметра a = = 0,25; 0,5; 1,0 представлены в таблице, где $K_1^* = \pi^2 K_1(0)/P$, $K_2^* = \pi^2 K_2(0)/P$.

При расчетах были использованы значения упругих постоянных из работы [11]. Приведенные данные позволяют заключить, что для всех рассмотренных пар материалов, как и в случае изотропных сред [1], величины K_1^* незначительно отличаются от коэффициента интенсивности напряжений $\pi^2 K_1(0)/P = a^{-3/2}$ в задаче для однородного изотропного пространства с полубесконечной трещиной [12]. Коэффициенты K_2^* принимают различные значения в зависимости от комбинации материалов и возрастают при уменьшении расстояния от точки приложения нагрузки до фронта трещины.

Материалы	a = 0,25		0,5		1	
	K_1^*	K_2^*	K_1^*	K_2^*	K_1^*	K_2^*
SiO_2–Mg	7,909	1,437	2,806	0,4533	0,9949	0,1409
$BaTiO_3$–Mg	7,805	2,499	2,788	0,7896	0,9945	0,2457
$BaTiO_3$–Zn	7,925	1,192	2,808	0,3759	0,9949	0,1168
Zn–Mg	7,912	1,389	2,806	0,4381	0,9949	0,1362
Co–Cd	7,844	2,168	2,794	0,6848	0,9947	0,2130
Co–Zn	7,827	2,320	2,792	0,7329	0,9946	0,2280

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихомиров В.В.* Напряженное состояние составного пространства с полубесконечной межфазной трещиной // Изв. РАН. МТТ, 1994. № 6. С. 51–56.
2. *Clemets D.L.* A crack between dissimilar anisotropic media // Intern. J. Eng. Sci. 1971. V. 9. № 2. P. 257–265.
3. *Wu K.-C.* Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1990. V. 57. № 4. P. 882–886.
4. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 159 с.
5. *Храпков А.А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 677–689.
6. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
7. Механика разрушения и прочность материалов / Справ. пособие. Т. 2. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 619 с.
8. *Dundurs J.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 3. P. 650–652.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
10. *Kassir M.K., Sih G.C.* Three dimensional crack problems. Leyden: Nordhoff, 1975. 452 p.
11. *Хантингтон Г.* Упругие постоянные кристаллов // Успехи физ. наук. 1961. Т. 74. № 3. С. 462–520.
12. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
5.V.1995