УДК 539.3:534.1

© 1996 г. О.А. Назаренко, Г.Я. Попов

О ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН НА СФЕРИЧЕСКИХ ДЕФЕКТАХ

На основе метода разрывных решений [1, 2] в случае стационарных упругих волн предлагается способ сведения ряда задач дифракции к системе одномерных интегродифференциальных уравнений. Дефектом может являться либо сферическая трещина, либо тонкое жесткое сферическое включение. Детализация способа дается для второго случая. В случае дифракции волны кручения предлагается эффективный приближенный метод решения соответствующего интегродифференциального уравнения в классе функций с неинтегрируемыми особенностями. Дана численная реализация метода: построены графики зависимости реактивного крутящего момента (включение неподвижно закреплено) от частоты колебаний и размеров включения и такие же графики для амплитуды крутильных колебаний включения, когда оно подвижно (не закреплено).

1. Построение разрывного решения волнового уравнения для сферического дефекта. Под дефектом понимаем [1, 2] часть поверхности, при пересечении которой терпят разрывы первого рода смещения и напряжения. Типичным дефектом является математический разрез по указанной части поверхности (трещина). Другим случаем дефекта является тонкое жесткое включение в виде оболочки, срединная поверхность которой совпадает с той же частью поверхности. Здесь рассматривается случай, когда дефектом является часть сферической поверхности: $r=R, 0\leqslant\theta\leqslant\omega, -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, где r, θ, φ – сферические координаты. Известно [3, 4], что решение уравнений движения упругой изотропной среды, можно выразить через волновые функции. Поэтому прежде чем строить разрывное решение уравнений движения, построим такое для волнового уравнения

$$\Delta\Phi-c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi=0,\ \ 0<r<\infty,\ \ 0<\theta<\pi,\ |\varphi|<\pi,\ \ t\geqslant 0 \tag{1.1}$$

где Δ – оператор Лапласа в сферической системе координат.

Под разрывным решением уравнения (1.1), заданного во всем пространстве, для сферического дефекта

$$r=R,\ \ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ \ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi \tag{1.2}$$

понимаем такое решение уравнения (1.1), которое удовлетворяет ему всюду, кроме точек дефекта (1.2). В этих точках функция и ее нормальная (к поверхности дефекта) производная терпят разрывы первого рода и заданы их скачки, для которых введем такие обозначения:

$$\Phi(R-0,\theta,\varphi,t)-\Phi(R+0,\theta,\varphi,t)=\langle\Phi\rangle$$

$$\Phi'(R-0,\theta,\varphi,t)-\Phi'(R+0,\theta,\varphi,t)=\langle\Phi'\rangle$$

Здесь и всюду ниже производную по r будем помечать штрихом, по θ – точкой, по φ – запятой. Для построения такого решения воспользуемся той же схемой, что и в [1, 2].

Последовательно применяя к уравнению (1.1) интегральные преобразования Лапласа, Фурье

$$\Phi_p = \int_0^\infty \Phi(r,\theta,\varphi,t)e^{-pt}dt, \quad \Phi_{pn} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_p(r,\theta,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi \tag{1.3}$$

и Лежандра ($P_k^m(\cos\theta)$ – присоединенный многочлен Лежандра),

$$\Phi_{pnk}(r) = \int_0^\pi \sin\theta P_k^{|n|}(\cos\theta)d\theta \tag{1.4}$$

приведем уравнение (1.1) к следующему одномерному:

$$r^{-2}\left[(r^2\Phi'_{pnk})' - k(k+1)\Phi_{pnk}\right] - p^2c^{-2}\ \Phi_{pnk} = 0,\ \ 0 < r < \infty \tag{1.5}$$

Нужно построить разрывное решение этого уравнения с заданными скачками

$$\begin{gathered}\left\langle\Phi_{pnk}\right\rangle = \Phi_{pnk}(R-0) - \Phi_{pnk}(R+0) \\ \left\langle\Phi'_{pnk}\right\rangle = \Phi'_{pnk}(R-0) - \Phi'_{pnk}(R+0)\end{gathered} \tag{1.6}$$

С этой целью заменой $\varphi_{pnk}(r) = r^{1/2}\Phi_{pnk}(r)$ приведем уравнение (1.5) к уравнению Бесселя, к которому применим интегральное преобразование Ганкеля

$$\varphi_{pnk\alpha} = \int_0^\infty rJ_{k+1/2}(\alpha r)\varphi_{pnk}(r)dr$$

по обобщенной схеме [1]. В результате найдем трансформанту Ганкеля разрывного решения уравнения (1.5) со скачками (1.6). Воспользовавшись затем формулой обращения для преобразования Ганкеля, а также формулой 6.541(1) из [5], найдем требуемое разрывное решение уравнения (1.5) со скачками (1.6)

$$\Phi_{pnk}(r) = R^2\left[\left\langle\Phi'_{pnk}\right\rangle\Gamma_k(r,R) - \left\langle\Phi'_{pnk}\right\rangle\frac{\partial}{\partial R}\Gamma_k(r,R)\right]$$

$$\Gamma_k(r,R) = \frac{1}{\sqrt{rR}}\begin{cases} I_\nu\left(\frac{Rp}{c}\right)K_\nu\left(\frac{rp}{c}\right), & r > R \\ I_\nu\left(\frac{rp}{c}\right)K_\nu\left(\frac{Rp}{c}\right), & r < R \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\nu = k + 1/2,\ \ k = 0,1,2,\ldots$$

($I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя, $K_\nu(z)$ – функция Макдональда). Чтобы получить разрывное решение исходного волнового уравнения, следует воспользоваться формулами обращения для трансформант Лежандра [6]

$$\begin{gathered}\Phi_{pn}(r,\theta) = \sum_{k=|n|}^\infty \Phi_{pnk}(r)\sigma_{kn}P_k^{|n|}(\cos\theta) \\ \sigma_{kn} = (k-|n|)!(2k+1)[2(k+|n|)!]^{-1}\end{gathered} \tag{1.8}$$

а также для трансформант Фурье и Лапласа.

Например, воспользовавшись формулой (1.8) вместо (1.7), получим

$$\Phi_{pn}(r,\theta) = R^2\left[\int_0^\omega \left\langle\Phi'_{pn}\right\rangle K_n(\theta,\tau;r,R)\sin\tau d\tau - \right.$$

$$-\int_0^{\omega}\left\langle\Phi_{pn}\right\rangle\sin\tau\frac{\partial}{\partial R}K_n(\theta,\tau;r,R)d\tau] \tag{1.9}$$

$$K_n(\theta,\tau,r,R)=\sum_{k=|n|}^{\infty}\frac{P_k^{|n|}(\cos\theta)P_k^{|n|}(\cos\tau)}{\left[\sigma_{kn}\Gamma_k(r,R)\right]^{-1}}$$

В случае, если процесс колебаний, описываемый волновым уравнением (1.1), установившийся, т.е. происходит по гармоническому закону:

$$\Phi(r,\theta,\varphi,t)=e^{-i\omega_0 t}\tilde{\Phi}(r,\theta,\varphi) \tag{1.10}$$

для исключения времени нет необходимости применять преобразование Лапласа, и для функций $\tilde{\Phi}(r,\theta,\varphi)$ получаем уравнение (1.5), в котором следует положить $p=-i\omega_0$.

Разрывное решение в этом случае вместо (1.7) будет иметь вид

$$\tilde{\Phi}_{nk}(r)=R^2\left[\left\langle\Phi'_{nk}\right\rangle\Gamma_{d,k}(r,R)-\left\langle\Phi_{nk}\right\rangle\frac{\partial}{\partial R}\Gamma_{d,k}(r,R)\right]$$

$$\Gamma_{d,k}(r,R)=\frac{\pi i}{2\sqrt{rR}}\begin{cases}J_\nu(Rd)H_\nu^{(1)}(rd), & r>R\\ J_\nu(rd)H_\nu^{(1)}(Rd), & r<R\end{cases} \tag{1.11}$$

$$2\nu=2k+1,\ \ d=c^{-1}\omega_0$$

или после обращения трансформант Лежандра

$$\tilde{\Phi}_n(r,\theta)=R^2\left[\int_0^{\omega}\left\langle\tilde{\Phi}'_n\right\rangle\sin\tau K_d^n(\theta,\tau;r,R)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\omega}\left\langle\tilde{\Phi}_n\right\rangle\sin\tau\frac{\partial}{\partial R}K_d^n(\theta,\tau;r,R)d\tau\right] \tag{1.12}$$

$$K_d^n(\theta,\tau;r,R)=\sum_{k=|n|}^{\infty}\sigma_{kn}\Gamma_{d,k}(r,R)P_k^{|n|}(\cos\theta)P_k^{|n|}(\cos\tau)$$

Чтобы выполнялось условие излучения на бесконечности, при постановке в (1.7) $p=-i\omega_0$ выбрана первая функция Ганкеля $H_\nu^{(1)}(x)$.

При использовании разрывных решений (1.9) и (1.12) в конкретных задачах потребуется интегральное представление для функции

$$B_k(z)=I_\nu(z)K_\nu(z)\Big|_{z=-i\xi}=\frac{\pi i H_\nu^{(1)}\xi}{2J_\nu^{-1}(\xi)}=A_k(\xi),\ \ \nu=k+\tfrac{1}{2} \tag{1.13}$$

для получения которого достаточно воспользоваться формулой 5.9.2(14) из [7], дающей разложение функции $\Omega_0(\theta)=I_0(\theta)-L_0(\theta)$ ($L_0(\theta)$ – вторая функция Струве [5]) в ряд по ортогональной системе функций $\cos[(k+\tfrac{1}{2})\theta]$ и потому

$$B_k(z)=\frac{(-1)^k}{2}\int_0^{\pi}\Omega_0\left(2z\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right]d\theta$$

Интегрированием по частям на основании (1.13) устанавливаем:

$$A_k(\xi)=\frac{1-\Delta_k(\xi)}{2k+1},\quad \Delta_k(\xi)=\int_0^{\pi}\frac{\sin[(k+\tfrac{1}{2})\theta]}{(-1)^k}\frac{\partial}{\partial\theta}O_0\left(2\xi\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta \tag{1.14}$$

где $O_0(\theta)=J_\nu(\theta)-iH_0(\theta),H_0(\theta)$ – первая функция Струве.

2. Построение разрывного решения уравнений движения упругой среды для сферического дефекта. Будем использовать известное решение уравнений движения упругой изотропной среды [3], выраженное через три волновые функции $\Phi(r,\theta,\varphi,t)$, $\Psi_j(r,\theta,\varphi,t)$, $(j = 1, 2)$, причем первая функция дает волну расширения и удовлетворяет волновому уравнению (1.1), в котором $c = c_1$, а две другие дают волны сдвига, и в уравнении (1.1) следует положить $c = c_2$, где c_1, c_2 – скорости волн расширения и волн сдвига соответственно. Если иметь в виду установившийся процесс колебаний по гармоническому закону с частотой ω_0 ($[\Phi,\Psi_j] = e^{-i\omega_0 t}[\tilde{\Phi},\tilde{\Psi}_j]$), перейти к трансформантам Фурье

$$\left[\Phi_n,\Psi_{jn},u_{rn},u_{\theta n},u_{\varphi n}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\varphi}[\Phi,\Psi_j,u_r,u_\theta,u_\varphi]d\varphi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{2.1}$$

и опустить всюду временно́й множитель $\exp(-i\omega_0 t)$ и волну над символами, то названное решение можно записать в виде

$$\begin{aligned}
u_{rn} &= \Phi_n' - (r\sin\theta)^{-1}[\sin\theta\,\Psi_{2n}]^{\cdot} - (r\sin^2\theta)^{-1}n^2\Psi_{2n} \equiv u_n\\
u_{\theta n} &= r^{-1}\Phi_n^{\cdot} + r^{-1}(r\Psi_{2n}^{\cdot})' + in(\sin\theta)^{-1}\Psi_{1n} \equiv \upsilon_n\\
u_{\varphi n} &= (r\sin\theta)^{-1}in\Phi_n + (r\sin\theta)^{-1}in(r\Psi_{2n})' - \Psi_{1n}^{\cdot} \equiv w_n
\end{aligned} \tag{2.2}$$

При этом функции Φ_n и Ψ_{jn} будут удовлетворять уравнениям Гельмгольца

$$r^{-2}\left[(r^2[\Phi_n',\Psi_{jn}'])' - \nabla_n[\Phi_n,\Psi_{jn}]\right] + [a^2\Phi_n, b^2\Psi_{jn}] = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla nf(r,\theta) \equiv n^2\sin^{-2}\theta f(r,\theta) - \sin^{-1}\theta[\sin\theta f^{\cdot}(r,\theta)]^{\cdot} \tag{2.4}$$

$$a = \omega_0 c_1^{-1},\quad b = \omega_0 c_2^{-1}$$

Используя закон Гука и соотношения Коши, по трансформантам смещений (2.2) найдем трансформанты напряжений [3]

$$\begin{aligned}
(2\mu)^{-1}\sigma_{rn} &= \Phi_n'' - \lambda(2\mu)^{-1}a^2\Phi_n + b^2\Psi_{2n} + b^2 r\Psi_{2n}' + 3\Psi_{2n}'' + r\Psi_{2n}'''\\
(2\mu)^{-1}\tau_{rn} &= r^{-1}\Phi_n'^{\cdot} - r^{-2}\Phi_n^{\cdot} - \tfrac{1}{2}in\,r(\sin\theta)^{-1}(r^{-1}\Psi_{1n})' + \Psi_{2n}''^{\cdot} + r^{-1}\Psi_{2n}'^{\cdot} - r^{-2}\Psi_{2n}^{\cdot} + \tfrac{1}{2}b^2\Psi_{2n}^{\cdot}\\
-(2\mu)^{-1}\tau_{\varphi n} &= in(r\sin\theta)^{-1}[\Phi_n' - r^{-1}\Phi_n] + \tfrac{1}{2}r(r^{-1}\Psi_{1n}^{\cdot})' +\\
&+ in(\sin\theta)^{-1}\left[\Psi_{2n}'' + r^{-1}\Psi_{2n}' - r^{-2}\Psi_{2n} + \tfrac{1}{2}b^2\Psi_{2n}\right]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где μ, λ – параметры Ламе, $\tau_{\theta n}$ и $\tau_{\varphi n}$ – трансформанты Фурье касательных напряжений $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{r\varphi}$ соответственно.

Под разрывным решением уравнений движения упругой среды для сферического дефекта (1.2) будем понимать такое решение названнных уравнений, которое удовлетворяет всюду этим уравнениям, исключая точки дефекта. В этих точках компоненты поля смещений и напряжений терпят разрывы первого рода с заданными скачками. Для трансформанты Фурье этих скачков введем обозначение

$$\langle u_n\rangle = u_{rn}(R-0,\theta) - u_{rn}(R+0,\theta),\ \langle\upsilon_n\rangle,\langle w_n\rangle,\langle\sigma_{rn}\rangle,\langle\tau_{\theta n}\rangle,\langle\tau_{\varphi n}\rangle \tag{2.6}$$

Построение такого разрывного решения будем осуществлять по схеме работ [1, 2]. При этом представляется удобным, вместо υ_n, w_n и $\tau_{\theta n}$, $\tau_{\varphi n}$, ввести такие:

$$\sin\theta\, z_n(r,\theta) = \left[\sin\theta\,\upsilon_\nu(r,\theta)\right]^{\cdot} - inw_n(r,\theta)$$

$$\sin\theta\, z_n^*(r,\theta) = \left[\sin\theta\, w_n(r,\theta)\right]^{\cdot} + in\upsilon_n(r,\theta)$$

$$\sin\theta\,\tau_n(r,\theta)=\left[\sin\theta\,\tau_{\theta n}(r,\theta)\right]^{\cdot}-in\tau_{\varphi n}(r,\theta)$$
$$\sin\theta\,\tau_n^*(r,\theta)=\left[\sin\theta\,\tau_{\varphi n}(r,\theta)\right]^{\cdot}+in\tau_{\theta n}(r,\theta) \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.2) при учете (2.4) можно получить

$$u_n(r,\theta)=\Phi_n'(r,\theta)+r^{-1}\nabla_n\Psi_{2n}(r,\theta)$$
$$z_n^*(r,\theta)=\nabla_n\Psi_{1n}(r,\theta);\quad rz_n(r,\theta)=-\nabla_n\left[\Phi_n(r,\theta)+(r\Psi_{2n}(r,\theta))'\right] \tag{2.8}$$

Согласно [1, 2] необходимо выразить скачки функций $\langle\Phi_n\rangle$, $\langle\Phi_n'\rangle$, $\langle\Psi_{jn}\rangle$, $\langle\Psi_{jn}'\rangle$ через заданные скачки (2.6) или скачки введенных функций (2.7). Переходя в формулах (2.2) к скачкам и проведя нужные комбинации с целью получения скачков функций (2.7), получим соотношения

$$\langle u_n\rangle=\left\langle\Phi_n'\right\rangle+R^{-1}\nabla_n\langle\Psi_{2n}\rangle,\quad\left\langle z_n^*\right\rangle=\nabla_n\langle\Psi_{1n}\rangle \tag{2.9}$$
$$R\langle z_n\rangle=-\nabla_n\left[\langle\Psi_n\rangle+\langle\Psi_{2n}\rangle+R\left\langle\Psi_{2n}'\right\rangle\right]$$

Чтобы получить аналогичные соотношения для напряжений, следует в формулах (2.5) исключить слагаемые, содержащие производные по r выше первого порядка. Для этого воспользуемся уравнениями (2.3), что позволяет записать

$$\Phi_n''=r^{-2}\nabla_n\Phi_n-2r^{-1}\Phi_n'-a^2\Phi_n$$
$$\Psi_{jn}''=r^{-2}\nabla_n\Psi_{jn}-2r^{-1}\Psi_{jn}'-b^2\Psi_{jn},\quad j=1,2$$

Исключив с помощью этих формул указанные производные из (2.5) и переходя в них к скачкам напряжений (2.6), в том числе и к скачкам τ_n^* и τ_n, получим

$$(2\mu)^{-1}\langle\sigma_m\rangle R^2=\nabla_n\langle\Phi_n\rangle-2R\langle\Phi_n'\rangle-\tfrac{1}{2}b^2R^2\langle\Phi_n\rangle+R\nabla_n\langle\Psi_{2n}'\rangle-\nabla_n\langle\Psi_{2n}\rangle$$
$$R\mu^{-1}\langle\tau_n^*\rangle=\nabla_n[R\langle\Psi_{1n}'\rangle-\langle\Psi_{1n}\rangle]$$
$$2\mu^{-1}\langle\tau_n\rangle R^2=-\nabla_n\left\{R\langle\Phi_n'\rangle-\langle\Phi_n\rangle+\nabla_n\langle\Psi_{2n}\rangle-\tfrac{1}{2}b^2\langle\Psi_{2n}\rangle-R\langle\Psi_{2n}'\rangle-\langle\Psi_{2n}\rangle\right\} \tag{2.10}$$

Чтобы соотношения (2.9) и (2.10) обратить, т.е. найти из них скачки волновых функций, применим к ним интегральное преобразование Лежандра (1.4), в результате некоторых очевидных преобразований найдем

$$k(k+1)\langle\Psi_{1nk}\rangle=\langle z_{nk}^*\rangle,\quad k(k+1)\langle\Psi_{1nk}'\rangle=R^{-1}\langle z_{nk}^*\rangle+\mu^{-1}\langle\tau_{nk}^*\rangle$$
$$k(k+1)b^2R\langle\Psi_{2nk}\rangle=\mu^{-1}R\langle\tau_{nk}\rangle+2k(k+1)\langle u_{nk}\rangle+2\langle z_{nk}\rangle$$
$$-Rb^2\langle\Phi_{nk}\rangle=4\langle u_{nk}\rangle+2\langle z_{nk}\rangle+\mu^{-1}R\langle\sigma_{rnk}\rangle \tag{2.11}$$
$$R^2b^2\langle\Phi_{nk}'\rangle=[b^2R^2-2k(k+1)]\langle u_{nk}\rangle-\mu^{-1}R\langle\tau_{nk}\rangle-2\langle z_{nk}\rangle$$
$$k(k+1)b^2R^2\langle\Psi_{2nk}'\rangle=2\langle u_{nk}\rangle k(k+1)-\mu^{-1}R\langle\tau_{nk}\rangle+$$
$$+\langle z_{nk}\rangle[2k(k+1)-2-b^2R^2]+\mu^{-1}Rk(k+1)\langle\sigma_{rnk}\rangle$$

Согласно (1.11) трансформанты Фурье–Лежандра волновых функций будут выражены формулами

$$\Phi_{nk}(r)=R^2[\langle\Phi_{nk}'\rangle\Gamma_{a,k}(r,R)-\langle\Phi_{nk}\rangle\frac{\partial}{\partial R}\Gamma_{a,k}(r,R)]$$
$$\Psi_{jnk}(r)=R^2\left[\left\langle\Psi_{jnk}'\right\rangle\Gamma_{b,k}(r,R)-\langle\Psi_{jnk}\rangle\frac{\partial}{\partial R}\Gamma_{b,k}(r,R)\right],\quad j=1,2 \tag{2.12}$$

Подставив сюда значения скачков (2.11) и обратив затем преобразование Лежандра, согласно формулам (1.8), получим функции Φ_n и Ψ_n, а по ним, пользуясь формулами (2.2) и (2.5), – требуемое разрывное решение уравнений движения для сферического дефекта (1.2). Располагая разрывным решением, легко свести задачу дифракции на таком дефекте к одномерным интегральным или интегродифференциальным уравнениям. Соответствующие операции проведем применительно к дефекту в виде тонкого сферического включения.

3. Сведение задачи дифракции упругой волны на тонком сферическом включении к интегродифференциальным уравнениям. Пусть дефектом будет тонкое включение в виде тонкой жесткой сферической оболочки, срединная поверхность которой фиксируется соотношениями (1.2). Полагаем, что включение полностью сцеплено с упругой средой. Пусть на это включение падает стационарная упругая волна, которая вызывает в упругой среде смещения $\overset{\circ}{u}_r, \overset{\circ}{u}_\theta, \overset{\circ}{u}_\varphi$ и напряжения $\overset{\circ}{\sigma}_r, \overset{\circ}{\tau}_{r\varphi}, \overset{\circ}{\tau}_{r\theta}$, трансформанты Фурье которых будем помечать числом n в нижнем индексе символа согласно (1.3), а трансформанты Фурье комбинаций (2.7) из указанных смещений и напряжений будем обозначать так: $\overset{\circ}{z}_n, \overset{\circ}{z}{}^*_n, \overset{\circ}{\tau}_n, \overset{\circ}{\tau}{}^*_n$. При этом, если вместо падающей упругой волны, упругая среда загружена объемными силами, изменяющимися со временем по закону $\exp(-i\omega_0 t)$ (такой вариант задачи будем тоже иметь в виду), то для соответствующих амплитуд напряжений и смещений, вызываемых этой нагрузкой, будем использовать те же обозначения.

Поля напряжений и смещений в упругой среде от указанного загружения будем строить в виде

$$u_{rn}(r,\theta) = \overset{\circ}{u}_{rn}(r,\theta) + u^1_{rn}(r,\theta), \quad u_{\theta n} = \overset{\circ}{u}_{\theta n} + u^1_{\theta n} \quad u_{\varphi n} = \overset{\circ}{u}_{\varphi n} + u^1_{\varphi n} \tag{3.1}$$

где $\overset{\circ}{u}_{rn}, \overset{\circ}{u}_{\theta n}, \overset{\circ}{u}_{\varphi n}$ – смещения, вызванные заданным загружением упругой среды при отсутствии дефекта, $u^1_{rn}, u^1_{\theta n}, u^1_{\varphi n}$ – разрывное решение, построенное в разделе 2. Оно было построено для дефекта общего вида. В случае рассматриваемого дефекта в виду полного сцепления включения с упругой средой, скачки смещений в (2.6) должны будут равны нулю, и потому

$$\langle u_{nk}\rangle,\ \langle \upsilon_{nk}\rangle,\ \langle w_{nk}\rangle,\ \langle z_{nk}\rangle,\ \langle z^*_{nk}\rangle = 0$$

Следовательно, согласно (2.11) получаем

$$\begin{gathered}
\langle \Psi_{1nk}\rangle = 0, \ k(k+1)\langle \Psi'_{1nk}\rangle = \mu^{-1}\langle \tau^*_{nk}\rangle \\
k(k+1)b^2\langle \Psi_{2nk}\rangle = \mu^{-1}\langle \tau_{nk}\rangle, \ b^2\langle \Phi_{nk}\rangle = -\mu^{-1}\langle \sigma_{rnk}\rangle \\
b^2R\langle \Phi'_{nk}\rangle = -\mu^{-1}\langle \tau_{nk}\rangle, \quad k(k+1)b^2R\langle \Psi'_{2nk}\rangle = \mu^{-1}[k(k+1)\langle \sigma_{rnk}\rangle - \langle \tau_{nk}\rangle]
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Подставив эти выражения в (2.12) и обратив трансформанты Лежандра, получим

$$\begin{gathered}
\Psi_{1n}(r,\theta) = \frac{R^2}{\mu}\int_0^\omega \langle \tau^*_n\rangle \sin\tau K^n_*(\theta,\tau;\ r,R)d\tau \\
\mu\Psi_{2n}(r,\theta) = \frac{R}{b^2}\left\{\int_0^\omega \langle \sigma_{rn}\rangle \sin\tau K^n_b(\theta,\tau;\ r,R)d\tau - \right. \\
\left. -\int_0^\omega \langle \tau_n\rangle \sin\tau\left[K^n_*(\theta,\tau;\ r,R) + R\frac{\partial}{\partial R}K^n_b(\theta,\tau;r,R)\right]d\tau\right\} \\
\Phi_n(r,\theta) = \frac{R}{Mb^2}\int_0^\omega \sin\tau\left[r\frac{\partial}{\partial R}K^n_a(\theta,\tau;\ r,R)\langle \sigma_{rn}\rangle - K^n_a(\theta,\tau;\ r,R)\langle \tau_n\rangle\right]d\tau
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Ядра K_a^n и K_b^n определяются формулой (1.12) при $d = a$ и $d = b$ соответственно, а ядро K_*^n – той же формулой, но в которой $\Gamma_{d,k}$ заменено на $[k(k+1)]^{-1}\Gamma_{b,k}$. Таким образом, в разбираемом случае в представлении (3.1) функции u_{rn}^1, $u_{\theta n}^1$, $u_{\varphi n}^1$ будут определяться формулами (2.2) и (3.3).

Чтобы получить уравнения для определения неизвестных скачков $\langle\sigma_{rn}\rangle$, $\langle\tau_n\rangle$ и $\langle\tau_n^*\rangle$, следует реализовать условия на дефекте (включении). Если его считать неподвижным, то должны выполняться условия

$$u_n(R-0,\theta) = v_n(R-0,\theta) = w_n(R-0,\theta) = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \omega$$

или, при учете (2.7), также условия:

$$u_n(R-0,\theta) = z_n(R-0,\theta) = z_n^*(R-0,\theta) = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \omega \tag{3.4}$$

Реализуя эти условия с помощью формул (2.9), (3.1), сведем задачу к следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} R\Phi_n'(r,\theta)|_{r=R-0} + \nabla_n \Psi_{2n}(R-0,\theta) = -Ru_r^0(R,\theta) \\ \nabla_n\{\Phi_n(R-0,\theta) - [r^2\Psi_{2n}(r,\theta)]'\,|_{r=R-0}\} = Rz_n^0(R,\theta) \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\nabla_n \Psi_{1n}(R-0,\theta) = -z_n^{\theta *}(R,\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \omega \tag{3.6}$$

Как видим, последнее уравнение можно решить независимо от предыдущих, а первые два должны решаться совместно.

Дальнейшую детализацию предлагаемого метода проведем применительно к случаю, когда падающая волна – волна кручения.

4. Задача о дифракции упругой волны кручения на сферическом тонком включении. Падающую волну кручения возьмем в виде

$$u_{\varphi 0}^0 = Ar\sin\theta\, e^{-ibr\cos\theta}, \quad A = \text{const}, \quad u_{\theta 0}^0 \equiv u_{r0}^0 \equiv 0 \tag{4.1}$$

Поскольку имеет место осевая симметрия, то во всех предыдущих формулах следует положить $n = 0$. Если учесть дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют присоединенные многочлены Лежандра $P_k^{|n|}(\cos\theta)$, то можно убедиться в справедливости таких равенств:

$$\begin{gathered} \nabla_n P_k^{|n|}(\cos\theta) = k(k+1)P_k^{|n|}(\cos\theta) \\ \nabla_n K_*^n(\theta,\tau;\, r,R) = K_b^n(\theta,\tau;\, r,R) \end{gathered} \tag{4.2}$$

Интегральное уравнение для поставленной задачи получим из уравнения (3.6), учтя там (2.7), (3.1), (3.3), (4.2) и положив $n = 0$:

$$\int_0^\omega \left[\frac{W_0(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta, \operatorname{tg}\frac{1}{2}\tau)}{2\cos\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\tau} - \frac{D_0(\cos\theta,\cos\tau)}{2}\right]\chi(\tau)\sin\tau\, d\tau = f(\theta) \tag{4.3}$$

$$W_m(x,y) = \int_0^\infty J_m(tx)J_m(ty)\,dt, \quad f(\theta) = A\mu(i\xi\sin^2\theta - 2\cos\theta)e^{i\xi\cos\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \omega \tag{4.4}$$

$$D_m(x,y) = \sum_{k=m}^\infty \frac{P_k^m(x)P_k^m(y)\Delta_k(\xi)}{(k+m)![(k-m)!]^{-1}}, \quad \xi = bR, \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{4.5}$$

причем неизвестной функцией согласно (2.7) и (3.3) является

$$\chi(\theta) = \langle\tau_0^*(R,\theta)\rangle = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\langle\tau_{r\varphi}(R,\theta)\rangle \tag{4.6}$$

При получении равенства (4.3) было учтено, что на основании (1.12), (1.11)

$$K_b^0(\theta,\tau;\ R-0,R)=\frac{1}{2R}\sum_{k=0}^{\infty}A_k(\xi)(2k+1)P_k(\cos\theta)P_k(\cos\tau)$$

а также учтены представление (1.14) и результаты [2] по суммированию рядов по присоединенным функциям Лежандра.

Если в уравнении (4.3) сделать замену

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta=\beta x,\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau=\beta y,\quad \beta=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega,\quad X(y)=\frac{\chi(2\operatorname{arctg}\beta y)}{(1+\beta^2y^2)^{3/2}}\\ [(1+r^2)(1+s^2)]^{1/2}R_0(r,s)=D_0\left(\frac{1-r^2}{1+r^2},\ \frac{1-s^2}{1+s^2}\right),\quad F(x)=\frac{f(2\operatorname{arctg}\beta x)}{2\beta\sqrt{1+\beta^2x^2}}\end{gathered}\tag{4.7}$$

то придем к известному уравнению [1]

$$\int_0^1[W_0(x,y)-\beta R_0(\beta x,\beta y)]\frac{X(y)}{y}dy=F(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1\tag{4.8}$$

которое решалось многими авторами, но в классе интегрируемых функций. Однако здесь следует его решать в классе функций, имеющих неинтегрируемые особенности, так как искомой функцией в уравнении (4.3), из которого получено (4.8), является согласно (4.6) производная по θ скачка напряжений $\tau_{r\varphi}(r,\theta)$. Этот скачок на краю включения $\theta=\omega$ имеет корневую особенность, следовательно, его производная по θ будет уже иметь степенную особенность с показателем $-3/2$.

Ранее [8] уравнение (4.8) решалось в классе таких функций. Ниже предлагается другой, более прямой путь, основанный на новом спектральном соотношении:

$$\begin{gathered}\int_0^1\frac{W_m(x,y)P_k^{m,-3/2}(1-2y^2)}{y^{-m-1}(1-y^2)^{3/2}}dy=\frac{\Gamma(m+k+\frac{1}{2})\Gamma(k-\frac{1}{2})}{2k!}\times\\ \times\begin{cases}x^mP_{k-1}^{m,1/2}(1-2x^2)\Gamma^{-1}(k+m), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{F(m+k+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2};\ 2k+m+\frac{1}{2};\ x^{-2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)\Gamma(2k+m+\frac{1}{2})x^{2k+m+1}}, & 1<x<\infty,\quad m=0,1,2,\ldots\end{cases}\end{gathered}\tag{4.9}$$

Здесь нужно считать $P_{k-1}^{m,1/2}(1-2x^2)\equiv 0$ при $k=0$ и интеграл понимать в обобщенном (регуляризованном [9, 1]) смысле. Доказательство соотношения (4.9) проводится по схеме работы [10].

Располагая спектральным соотношением (4.9), для решения интегрального уравнения (4.6) можем применить метод ортогональных многочленов [1], т.е. решение разыскивать в виде ряда

$$X(y)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(1-y^2)^{-3/2}P_k^{0,-3/2}(1-2y^2)\tag{4.10}$$

После подстановки этого ряда в (4.8) следует учесть, что согласно соображениям, приведенным в [8], должно быть выполнено условие

$$\int_1^{\infty}J^0(x)xdx<\infty,\qquad J^0(x)=\int_0^1W_0(x,y)yX(y)dy$$

Анализ интеграла $J^0(x)$ с помощью соотношения (4.9) при $x\to\infty$ и $x\to 1+0$ показывает, что этому условию не удовлетворяет только первое слагаемое из ряда

(4.10), и потому оно должно быть отброшено, т.е. ряд (4.10) следует брать в виде

$$X(y)=\sum_{l=0}^{\infty} X_{l+1}(1-y^2)^{-3/2}P_{l+1}^{0,-3/2}(1-2y^2) \tag{4.11}$$

Реализуя стандартную схему метода ортогональных многочленов [1], сведем интегральное уравнение (4.8) к бесконечной системе

$$Y_j-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Y_l d_{jl}}{\sqrt{N_j N_l \sigma_j \sigma_l}}=\frac{F_j}{\sqrt{N_j\sigma_j}},\qquad j=0,1,\ldots \tag{4.12}$$

Здесь

$$Y_j=\sqrt{N_j\sigma_j}X_{j+1},\qquad 2\sigma_l=\Gamma(l+1/2)\Gamma(l+3/2)[l!(l+1)!]^{-1} \tag{4.13}$$

$$N_l^{\alpha,\beta}=\int_0^1\left|P_l^{\alpha,\beta}(1-2y^2)\right|^2 y^{2\alpha+1}(1-y^2)^{\beta}dy=$$

$$=\Gamma(\alpha+l+1)\Gamma(\beta+l+1)[2(\alpha+\beta+2l+1)l!\Gamma(\alpha+\beta+l+1)]^{-1},\qquad N_l^{0,1/2}\equiv N_l$$

$$F_j=\int_0^1\frac{xF(x)}{(1-x^2)^{-1/2}}P_j^{0,1/2}(1-2x^2)dx=F_j^{0,1/2} \tag{4.14}$$

$$d_{jl}=\int_0^1\int_0^1\frac{P_j^{0,1/2}(1-2x^2)P_{l+1}^{0,-3/2}(1-2y^2)\beta R_0(\beta x,\beta y)dxdy}{(1-x^2)^{-1/2}(1-y^2)^{3/2}(xy)^{-1}} \tag{4.15}$$

Последний интеграл следует понимать в обобщенном (регуляризованном) смысле. На основании (4.7) и (4.5) его можно привести к виду

$$d_{jl}=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k(\xi)I_{1/2,0,0}^{k,j}(\beta)I_{-3/2,0,0}^{k,l+1}(\beta) \tag{4.16}$$

$$I_{q,p,r}^{k,n}(\beta)=\int_0^1 P_k\left(\frac{1-\beta^2x^2}{1+\beta^2x^2}\right)\frac{P_n^{0,q}(1-2x^2)xdx}{(\beta^2x^2)^{-r}(1+\beta^2x^2)^{1/2+p}(1-x^2)^q}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(-i-r)_n\,\beta^{2(i+r)}c_i}{(i+r)!^{-1}\,n!\,\Gamma(2+n+i+r+q)}$$

$$c_i=\sum_{m=0}^{i}\left(\frac{(-k)_m}{m!}\right)^2\frac{(1/2+k+p)_{i-m}}{(i-m)!}$$

При вычислении последнего интеграла предварительно выполнено разложение в ряд Маклорена по βx функции, зависящей от этой переменной, с помощью формул 8.962(1) и 9.121(1) из [5], а затем применена формула 7.391(4) того же источника.

Коэффициенты $\Delta_k(\xi)$ следует вычислять по формуле (1.14), используя известные степенные разложения [5] для функций Бесселя и Струве, а также табличные интегралы 3.632(17) из [5]. Вычисление коэффициентов F_j следует проводить, используя известное разложение [11]

$$\bar{e}^{i\xi\cos\theta}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\theta)(2k+1)e^{k\pi i/2}J_{k+1/2}(\xi)$$

В результате на основании (4.14), (4.7) и (4.4) было получено

$$2^{3/2}\beta F_j=A\mu\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)e^{k\pi i/2}J_{k+1/2}(\xi)[4i\xi I_{1/2,2,1}^{k,j}(\beta)-2I_{1/2,1,0}^{k,j}(\beta)+2I_{1/2,1,1}^{k,j}(\beta)] \tag{4.17}$$

Бесконечную систему (4.13) будем решать приближенно методом редукции, обоснование которого будет дано ниже.

Если считать включение неподвижным, то важной характеристикой является реактивный крутящий момент

$$M_0 = 2\pi R^3 \int_0^{\omega} \langle \tau_{r\varphi}(R,\theta)\rangle \sin^2\theta d\theta \tag{4.18}$$

На основании (4.6) устанавливаем равенство

$$\sin\theta\langle \tau_{r\varphi}(R,\theta)\rangle = \int_0^{\theta} \sin\tau\chi(\tau)d\tau$$

Подстановка этого выражения в (4.18), интегрирование по частям, замена переменных (4.7) и использование (4.11) с учетом (4.13) приводит к формуле

$$M_0 = 16\pi R^3\beta^4 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)^{-1}}{\sqrt{N_l\sigma_l}} \sum_{j=l}^{\infty} \frac{(-1)^{l+j}(j+1)!^2\beta^{2l}}{(j-l)!(\frac{1}{2}+l)_{j+2}} \tag{4.19}$$

Рассмотрим теперь случай, когда включение не закреплено и может вращаться под действием падающей волны. Обозначим амплитуду угла поворота через α. В этом случае условия на дефекте (1.2) необходимо изменить и записать так: $z_0^{1*}(R,\theta)+z_0^{0*}(R,\theta)=2\alpha R\cos\theta$. Подставив сюда z_0^{1*} из (2.8), как и ранее, придем к интегральному уравнению (4.3), где вместо $f(\theta)$ следует взять сумму $f(\theta)+\alpha g(\theta)$, $g(\theta)=2\mu\cos\theta$, и соответственно к бесконечной системе (4.13), в которой вместо F_j должна быть сумма $F_j+\alpha G_j$, где

$$G_j = \frac{\mu}{\beta}\int_0^1 \frac{(1-\beta^2x^2)P_j^{0,\frac{1}{2}}(1-2x^2)xdx}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+\beta^2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \tag{4.20}$$
$$= \frac{\mu}{2\beta j!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{3}{2})_k}{\beta^{-2k}k!}(e_k-\beta^2e_{k+1}), \quad e_k=\frac{(-k)_jk!}{(\frac{3}{2}+j)_{k+1}}$$

Структура решения бесконечной системы будет аналогична, т.е. $Y_j = Y_j^0+\alpha Y_j^{\alpha}$, причем Y_j^0 – решение прежней бесконечной системы (4.13), а Y_j^{α} – решение системы (4.13), где вместо коэффициентов F_j следует брать G_j по формуле (4.20).

Реактивный крутящий момент M для включения будет определяться формулой $M=M_0+\alpha M_{\alpha}$, где M_0 и M_{α} вычисляются по формуле (4.19) с заменой Y_l на Y_l^0 и Y_l^{α} соответственно. Для амплитуды крутильных колебаний включения α, используя принцип Даламбера, находим

$$\alpha = (M_{\omega}-M_0)M_{\alpha}^{-1} \tag{4.21}$$

где $M_{\omega}=-\pi\omega_0^2\rho_0\delta R^3(\omega-\sin\omega\cos\omega)$ – крутящий момент за счет сил инерции, δ – толщина включения, ρ_0 – его плотность.

5. Обоснование метода редукции и числовые результаты. Согласно известным результатам [12] метод редукции для решения бесконечной системы (4.12) будет правомочен, если будет доказана сходимость рядов

$$S_1=\sum_{j,l=0}^{\infty}\frac{|d_{jl}|^2}{N_jN_l\sigma_j\sigma_l}, \quad S_2=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|F_j|^2}{N_j\sigma_j}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|F_j^{0,\frac{1}{2}}|^2}{N_j\sigma_j} \tag{5.1}$$

Для доказательства введем коэффициент Фурье в разложение интегрируемой функции

$h(x)$ по многочленам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(1-2x^2)$ на отрезке [0, 1]:

$$h_n^{\alpha,\beta}=\int_0^1 h(x)P_n^{\alpha,\beta}(1-2x^2)x^{2\alpha+1}(1-x^2)^{\beta}dx \tag{5.2}$$

Если функция непрерывно-дифференцируема на [0, 1], то через $\tilde{h}_n^{\alpha,\beta}$ обозначим коэффициент Фурье в таком разложении функции $x^{-1}h'(x)$. Если теперь в (5.2) провести интегрирование по частям с учетом соотношения

$$\int_0^x \frac{P_n^{\alpha,\beta}(1-2\xi^2)\xi d\xi}{[\xi^{2\alpha}(1-\xi^2)^{\beta}]^{-1}}=\frac{x^{2\alpha+2}P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(1-2x^2)}{2n(1-x^2)^{-\beta-1}},\quad n>0$$

вытекающего из А 6.12 работы [1], то можно установить, что

$$h_n^{\alpha,\beta}=-(2n)^{-1}\tilde{h}_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1} \tag{5.3}$$

Проделанные операции при получении (5.3) законны, если $\mathrm{Re}(\alpha,\beta)>-1$. Они законны и в случае, когда $\beta=-3/2$ в силу соображений, приведенных ранее [13, 1].

Приступим к доказательству сходимости второго ряда в (5.1).

Учитывая, что на основании (5.3) можно выписать соотношение $F_j^{0,1/2}=(2j)^{-1}\tilde{F}_{j-1}^{1,3/2}$ и тогда указанный ряд можем переписать в виде

$$S_2=\frac{F_0^{0,1/2}}{N_0\sigma_0}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\tilde{F}_k^{1,3/2}|^2}{2(k+1)N_{k+1}\sigma_{k+1}}$$

Сходимость последнего ряда можно установить, если воспользоваться равенством Парсеваля [14]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\tilde{F}_k^{1,3/2}|^2}{N_k^{1,3/2}}=\int_0^1\frac{F'(x)x^3dx}{x(1-x^2)^{-3/2}}$$

Интеграл справа существует в силу формул (4.7) и (4.4), определяющих функцию $F(x)$.

Для доказательства сходимости ряда S_1 в (5.1), представим его в виде двух рядов

$$S_1=S_1^0+S_1^1,\quad S_1^0=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{|d_{0l}|^2\sigma_l^{-1}}{N_0\sigma_0N_l} \tag{5.4}$$

$$S_1^1=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{|d_{jl}|^2\sigma_l^{-1}}{N_jN_l\sigma_j}$$

Введем обозначения

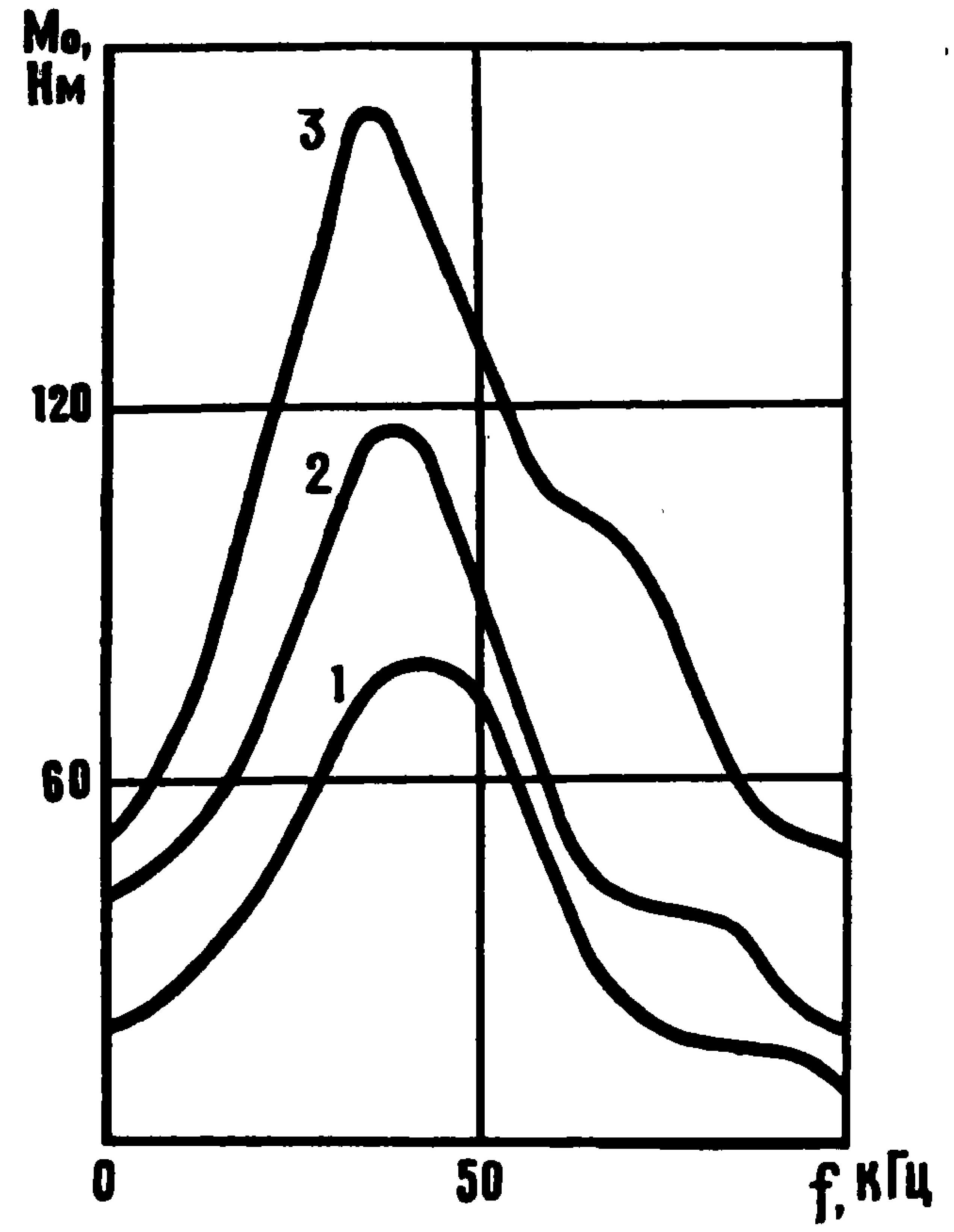
$$\tilde{R}_0(x,y)=\frac{\beta}{xy}\frac{\partial^2R_0(\beta x,\beta y)}{\partial x\partial y},\quad \tilde{g}_l^{1,-1/2}(x)=\int_0^1\frac{1}{y}\frac{\partial R_0(\beta x,\beta y)P_l^{1,-1/2}(1-2y^2)dy}{\partial y\sqrt{1-y^2}\,y^{-3}}$$

$$\tilde{d}_{kl}=\int_0^1\int_0^1\tilde{R}_0(x,y)\frac{P_k^{1,3/2}(1-2x^2)P_l^{1,-1/2}(1-2y^2)dxdy}{(1-x^2)^{-3/2}\sqrt{1-y^2}\,x^{-3}y^{-3}} \tag{5.5}$$

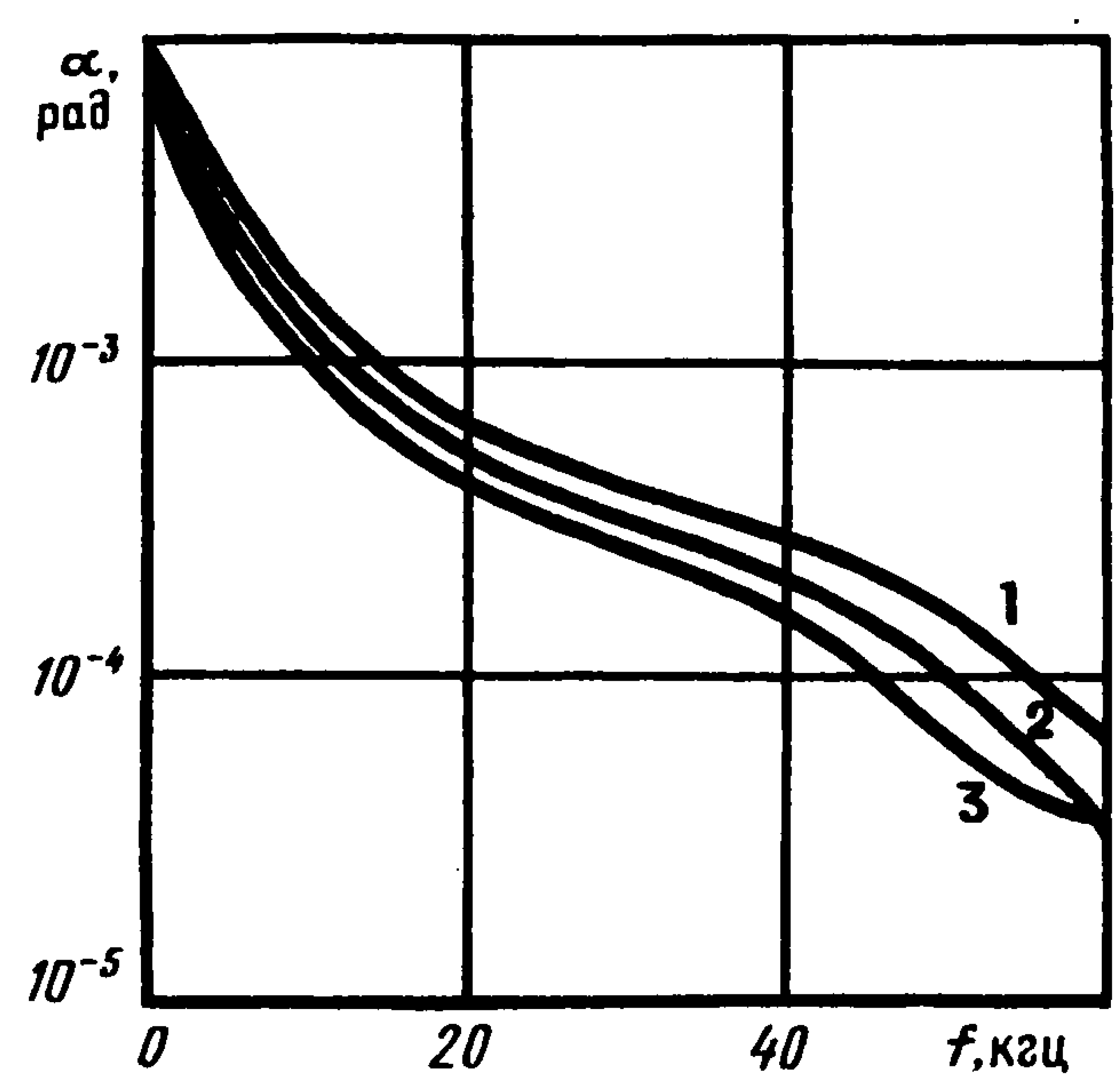
На основании (4.7), (4.5) и (5.3) имеют места равенства

$$R_0(\beta x,\beta y)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k(\xi)P_k\left(\frac{1-\beta^2x^2}{1+\beta^2x^2}\right)P_k\left(\frac{1-\beta^2y^2}{1+\beta^2y^2}\right)$$

$$d_{jl}=\frac{d_{j-1,l}}{2(l+1)2j} \tag{5.6}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На основании введенных обозначений имеют место равенства Парсеваля [14]

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{1}{y}\frac{\partial R_0(\beta x,\beta y)}{\partial y}\right|^2 \frac{y^3dxdy}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (N_l^{1,-1/2})^{-1}\int_0^1 \left|\tilde{g}_l^{1,-1/2}(x)\right|^2 dx,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\tilde{R}_0(x,y)\right|^2 \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\, x^3y^3dxdy = \sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{|\tilde{d}_{kl}|^2}{N_k^{1,-1/2}N_l^{1,1/2}} \tag{5.7}$$

причем двойные интегралы в (5.7) существуют. Это следует из представления (5.6) для $R_0(\beta x,\beta y)$, из которого можно видеть, что функция $R_0(\beta x,\beta y)$ будет непрерывно дифференцируема, если $\Delta_k(\xi)=O(k^{-m})$ при $k\to\infty$ и $m>4$. Указанную асимптотику для $\Delta_k(\xi)$ можно получить, если в представлении (1.14) провести нужное количество раз интегрирования по частям и принять во внимание, что $O_0(z)$ – целая функция.

Чтобы убедиться в сходимости ряда S_1^1 из (5.4), достаточно в его представлении положить $j=k+1$ и воспользоваться вторыми равенствами в (5.6) и (5.7). Для доказательства сходимости ряда S_1^0 из (5.4), пользуясь представлением для d_{jl} из (4.15) и неравенством Коши–Буняковского, устанавливаем соотношение

$$|d_{0l}|^2 \leqslant \frac{1}{30(l+1)^2}\int_0^1 |\tilde{g}_l^{1,-1/2}(x)|^2\, dx$$

которое в сочетании с первым равенством из (5.7) гарантирует сходимость ряда S_1^0.

При вычислении реактивного крутящего момента по формуле (4.19) и амплитуды крутильных колебаний включения по формуле (4.21) входные параметры фиксировались следующим образом [4]: включение стальное, толщиной $\delta=5\cdot10^{-4}$ м, радиус $R=0{,}02$ м, плотность $\rho_0=7900$ кг/м^3, материал упругой среды – известковый шпат со скоростью волны сдвига $c_2=1113$ м/с и параметром Ламе $\mu=3{,}58\cdot10^9$ МПа, амплитуда падающей волны $A=0{,}01$ м.

На фиг. 1 и 2 показаны графики зависимости реактивного крутящего момента M_0 и логарифма амплитуды колебаний включения α от $f=\omega_0/(2\pi)$; кривая *1* соответствует $\omega\approx23°$, $\beta=0{,}2$, кривая *2* – $\omega\approx29°$, $\beta=0{,}26$, кривая *3* – $\omega\approx36°$, $\beta=0{,}32$.

Работа выполнена при содействии Международной соросовской программы поддержки образования в области точных наук Международного фонда "Возрождение" (ISSEPSPUO 41053).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
2. *Popov G.Ya.* Problems of Stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect // Adv. in Mech. (Успехи механики). 1992. V. 15. № 1–2. P. 71–110.
3. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
4. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. *Титчмарш Э.Ч.* Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 278 с.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1983. 750 с.
8. *Попов Г.Я.* Об одном новом подходе к задачам о концентрации упругих напряжений возле трещин // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 148–156.
9. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
10. *Попов Г.Я.* О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1966. № 4. С. 77–85.
11. *Лепендин Л.Ф.* Акустика. М.: Высш. шк., 1978. 448 с.
12. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
13. *Онищук О.В., Попов Г.Я.* О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141–150.
14. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: Изд-во иност. лит., 1960. 299 с.

Одесса

Поступила в редакцию
9. VIII. 1995