

539.3:534.1

© 1996 г. Г.И. Михасёв

## ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФОРМЫ ДВИЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Исследуются волновые формы движения бесконечной тонкой оболочки вращения, обусловленные заданием начальных перемещений и скоростей, локализованных в окрестности некоторой параллели. С использованием развитого в [1] метода решение уравнений движения строится в виде суперпозиции пакетов тангенциальных и изгибных волн, бегущих в осевом направлении оболочки. В качестве примера рассмотрена длинная коническая оболочка.

Ранее, с использованием метода В.П. Маслова [2], была рассмотрена задача [3] о распространении локализованных семейств изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке средней длины. Обнаружена зависимость поведения волновых пакетов от геометрии оболочки, в частности, возможность отражения последних от образующих, на которых поверхность оболочки сильно искривлена.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечную оболочку вращения толщиной  $h$ . Пусть  $s = Rx$  – длина дуги образующей ( $-\infty < x < +\infty$ ), а  $\varphi$  – угол, отсчитываемый в окружном направлении. Здесь  $R = B(0)$  – характерный размер оболочки, где  $B(x) = Rf(x)$  – расстояние до оси вращения. При введенной системе координат первая квадратичная форма поверхности имеет вид  $R^2(dx^2 + f^2d\varphi^2)$ . Главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  удовлетворяют соотношениям

$$R_1 = -R \frac{\sqrt{1-f'^2}}{f''}, \quad R_2 = R \frac{f}{\sqrt{1-f'^2}}$$

Штрихом здесь и ниже обозначены производные по  $x$ .

Будем исследовать неосесимметричные формы движения с  $m_0$  числом волн в окружном направлении. В качестве исходных возьмем линейные уравнения, в основу которых положены гипотезы Кирхгофа – Лява

$$(L + \partial^2 / \partial t^2)U^T = 0 \tag{1.1}$$

Здесь  $U = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $u_3^* = R \cos(m_0\varphi)u_3$  – нормальное, а  $u_1^* = R \cos(m_0\varphi)u_1$ ,  $u_2^* = R \sin(m_0\varphi)u_2$  – тангенциальные в осевом и окружном направлениях соответственно перемещения точек срединной поверхности,  $t = t^*/T^*$  – безразмерное время,  $T^* = R[(1-\nu^2)\rho/E]^{1/2}$  – характерное время,  $\rho, \nu, E$  – плотность материала, коэффициент Пуассона и модуль Юнга соответственно, через  $L$  обозначена  $(3 \times 3)$ -матрица, элементами которой служат операторы ([4], с. 104)

$$L_{11}z = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (fz) + (1-\nu) \left( \frac{m_0^2}{2f^2} - k_1k_2 \right) z$$

$$L_{12}z = -m_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z}{f} \right) + \frac{(1-\nu)m_0}{2f^2} \frac{\partial}{\partial x} (fz)$$

$$L_{13}z = \frac{\partial}{\partial x} [(k_1 + k_2)z] - (1-\nu)k_2 \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$L_{21}z = \frac{m_0}{f^2} \frac{\partial}{\partial x} (fz) - \frac{(1-\nu)m_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z}{f} \right)$$

$$L_{22}z = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (fz) + \left[ \frac{m_0}{f^2} - (1-\nu)k_1k_2 \right] z$$

$$L_{23}z = -\frac{m_0}{f} (k_2 + \nu k_1)z, \quad L_{31}z = -\frac{1}{f} (k_1 + k_2) \frac{\partial}{\partial x} (fz) + \frac{1-\nu}{f} \frac{\partial}{\partial x} (k_2 fz), \quad L_{32} = L_{23}$$

$$L_{33}z = \varepsilon^4 \left\{ \left[ \frac{1}{f} \left( \frac{\partial}{\partial x} f \frac{\partial}{\partial x} - \frac{m_0^2}{f} \right) \right]^2 z - \frac{1}{(1+\nu)f} \left( \frac{\partial}{\partial x} f'' \frac{\partial}{\partial x} z \right) + \frac{m_0^2 f''}{f^2} z \right\} +$$

$$+(k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2)z$$

где  $\varepsilon^4 = h^2 / (12R^2)$  – малый параметр,  $k_1 = R / R_1$ ,  $k_2 = R / R_2$ .

Пусть в начальный момент времени на поверхности оболочки задан волновой пакет с центром на параллели  $x = 0$ :

$$u_j|_{t=0} = \lambda_j^0(\zeta, \varepsilon) \exp\{i\varepsilon^{-1} S_0(x)\}, \quad j = 1, 2, 3$$

(1.2)

$$\dot{u}_j|_{t=0} = i\varepsilon_j \eta_j^0(\zeta, \varepsilon) \exp\{i\varepsilon^{-1} S_0(x)\}$$

где

$$S_0(x) = a_0 x + \frac{1}{2} b_0 x^2, \quad \text{Im } b_0 > 0$$

$$\lambda_j^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \lambda_{jk}(\zeta), \quad \eta_j^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \eta_{jk}(\zeta) \quad (1.3)$$

$$\zeta = \varepsilon^{-1/2} x, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon_3 = 1$$

Здесь  $\lambda_{jk}(\zeta)$ ,  $\eta_{jk}(\zeta)$  – полиномы степеней  $M_{jk}$  и  $K_{jk}$  соответственно с комплексными коэффициентами. Точка означает дифференцирование по времени  $t$ .

Здесь рассмотрим случай, когда  $m_0 = \varepsilon^{-1} m$ , где  $m \sim 1$ .

**2. Тангенциальные волны.** Из (1.2) следует, что  $\partial/\partial x \sim \varepsilon^{-1}$  в (1.1). Пусть  $\partial/\partial t \sim \varepsilon^{-\alpha}$ , где  $\alpha \geq 0$ . Для исследования тангенциального движения положим  $u_1 = u_\tau$ ,  $u_2 = v_\tau$ ,  $u_3 = \varepsilon^\beta w_\tau$ , где  $\beta \geq 0$ ,  $u_\tau, v_\tau, w_\tau \sim 1$ . Потребуем, чтобы в первом и втором уравнениях системы (1.1) слагаемые, содержащие старшие производные по  $x$ , а также инерционные члены, имели одинаковый порядок малости и содержались в асимптотически главной части разрешающей системы, обеспечивая волновой характер интегралов. Отсюда находим  $\alpha = \beta = 1$ , а уравнения для тангенциальных волн примут вид

$$(L + \partial^2 / \partial t^2) (E_{\tau\varepsilon} U_\tau^T) = 0$$

(2.1)

$$E_{\tau\varepsilon} = \text{diag}(1, 1, \varepsilon), \quad U_\tau = (u_\tau, v_\tau, w_\tau)$$

Следуя [1], решение уравнений (2.1) с начальными условиями (1.2) будем искать в виде волнового пакета с центром в точке  $x = q_\tau(t)$ , где  $q_\tau(t)$  – дважды дифференцируе-

мая функция, такая что  $q_\tau(0) = 0$ . Перейдем в (2.1) к новой системе координат по формуле

$$x = q_\tau(t) + \varepsilon^{1/2} \xi_\tau$$

Все функции, входящие в (2.1), разложим в окрестности точки  $q_\tau(t)$  в ряд Тейлора по степеням  $\varepsilon^{1/2} \xi_\tau$ . Пусть  $Q_\tau$  – область изменения  $q_\tau(t)$ . Будем считать, что значения всех коэффициентов и их производных из (2.1) для любого  $q_\tau \in Q_\tau$  – величины порядка единицы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Асимптотическое решение уравнений (2.1) будем искать в виде

$$U_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} U_{\tau,k} \exp\{i\varepsilon^{-1} S_\tau(\xi_\tau, t, \varepsilon)\} \quad (2.2)$$

$$S_\tau = \int_0^t \omega_\tau(t') dt' + \varepsilon^{1/2} p_\tau(t) \xi_\tau + \frac{1}{2} \varepsilon b_\tau(t) \xi_\tau^2$$

$$U_{\tau,k} = (u_{\tau,k}, v_{\tau,k}, w_{\tau,k})$$

где  $u_{\tau,k}(\xi_\tau, t)$ ,  $v_{\tau,k}(\xi_\tau, t)$ ,  $w_{\tau,k}(\xi_\tau, t)$  – полиномы аргумента  $\xi_\tau$ ,  $\text{Im} b_\tau(t) > 0$  для любого  $t \geq 0$ . Для определения входящих в (2.2) неизвестных функций, подставим (2.2) в (2.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon^{1/2}$ . В результате получим последовательность уравнений

$$\sum_{j=0}^k L_{\tau,j} U_{\tau,k-j}^T = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Здесь  $L_{\tau,0}$  –  $(3 \times 3)$ -матрица с элементами

$$l_{\tau,11} = p_\tau^2 + \frac{(1-\nu)m^2}{2f^2} - (\omega_\tau - \dot{q}_\tau p_\tau)^2, \quad l_{\tau,12} = -\frac{im(1+\nu)p_\tau}{2f}$$

$$l_{\tau,21} = -l_{\tau,12}, \quad l_{\tau,22} = \frac{1-\nu}{2} p_\tau^2 + \frac{m^2}{f^2} - (\omega_\tau - \dot{q}_\tau p_\tau)^2$$

$$l_{\tau,31} = -ip_\tau(k_1 + \nu k_2), \quad l_{\tau,32} = -\frac{m}{f}(k_2 + \nu k_1)$$

$$l_{\tau,33} = -(\omega_\tau - \dot{q}_\tau p_\tau)^2, \quad l_{\tau,13} = l_{\tau,23} = 0$$

а  $L_{\tau,j}$  ( $j \geq 1$ ) – матричные операторы, определяемые формулами

$$L_{\tau,1} = \left( b_\tau \frac{\partial L_{\tau,0}}{\partial p_\tau} + \frac{\partial L_{\tau,0}}{\partial q_\tau} + \dot{p}_\tau \frac{\partial L_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau} \right) \xi_\tau - i \frac{\partial L_{\tau,0}}{\partial p_\tau} \frac{\partial}{\partial \xi_\tau}$$

$$L_{\tau,2} = \frac{1}{2} \left( b_\tau^2 \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial p_\tau^2} + 2b_\tau \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial p_\tau \partial q_\tau} + \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial q_\tau^2} + \dot{p}_\tau^2 \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau^2} + 2\dot{p}_\tau b_\tau \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau \partial p_\tau} + b_\tau \frac{\partial L_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau} \right) \xi_\tau^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial p_\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_\tau^2} - i \left( b_\tau \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial p_\tau^2} + \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial p_\tau \partial q_\tau} + \dot{p}_\tau \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau \partial p_\tau} \right) \xi_\tau \frac{\partial}{\partial \xi_\tau} - i \frac{\partial L_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau} \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$-i \left( \frac{1}{2} b_\tau \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial p_\tau^2} + \frac{1}{2} \dot{\omega}_\tau \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau^2} + \dot{p}_\tau \frac{\partial^2 L_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau \partial p_\tau} + N_\tau \right), \dots$$

Через  $N_\tau$  в (2.4) обозначена матрица с элементами

$$\begin{aligned} n_{\tau,11} &= \frac{f}{f'} p_\tau + \ddot{q}_\tau p_\tau, & n_{\tau,12} &= \frac{i(3-\nu)mf'}{2f^2}, & n_{\tau,13} &= 0 \\ n_{\tau,21} &= n_{\tau,12}, & n_{\tau,22} &= \frac{(1-\nu)f' p_\tau}{2f} + \ddot{q}_\tau p_\tau, & n_{\tau,23} &= 0 \\ n_{\tau,31} &= i \left[ \frac{(1-\nu)(k_2 f)'}{f} - \frac{(k_1 + k_2)f'}{f} \right], & n_{\tau,32} &= 0, & n_{\tau,33} &= \ddot{q}_\tau p_\tau \end{aligned}$$

Рассматривая (2.3) при  $k = 0$ , находим связь мгновенной частоты колебаний  $\omega_\tau(t)$  с функциями  $p_\tau(t)$ ,  $q_\tau(t)$

$$\omega_\tau^{(l)}(t) = \dot{q}_\tau^{(l)}(t) p_\tau^{(l)}(t) - H_\tau^{(l)}[p_\tau^{(l)}(t), q_\tau^{(l)}(t)], \quad l = 1, 2, 3, 4 \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} H_\tau^{(l)}(p, q) &= \delta_l \left[ p^2 + \frac{m^2}{f^2(q)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1 \\ \delta_3 &= \left( \frac{1-\nu}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \delta_4 = -\delta_3 \end{aligned}$$

Здесь  $H_\tau^{(1)}$ ,  $H_\tau^{(2)}$  – функции Гамильтона, соответствующие двум ветвям продольных волн, а  $H_\tau^{(3)}$ ,  $H_\tau^{(4)}$  отвечают двум ветвям крутильных волн. В дальнейшем индекс  $l$  будем опускать, подразумевая рассмотрение пакетов продольных, либо крутильных волн.

Из (2.3) при  $k = 0$  следует

$$U_{\tau,0} = P_{\tau,0}(\xi_\tau, t) Y_{\tau,0} \quad (2.6)$$

где

$$Y_{\tau,0} = (y_1, y_2, y_3), \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -l_{\tau,11} l_{\tau,12}^{-1} \quad (2.7)$$

$$y_3 = (l_{\tau,12} l_{\tau,33})^{-1} (l_{\tau,32} l_{\tau,11} - l_{\tau,31} l_{\tau,12})$$

При  $k = 1$  в (2.3) имеем неоднородную систему алгебраических уравнений, которая разрешима при условии

$$Z_{\tau,0}^* L_{\tau,1} U_{\tau,0}^T = 0 \quad (2.8)$$

где  $Z_{\tau,0}$  – любое нетривиальное решение системы, сопряженной к (2.3) при  $k = 0$ . Условие (2.8), в силу (2.6), есть дифференциальное уравнение относительно  $P_{\tau,0}(\xi_\tau, t)$ . Для того чтобы последнее имело решение в виде полинома относительно  $\xi_\tau$ , необходимо, чтобы  $p_\tau(t)$  и  $q_\tau(t)$  являлись решением системы Гамильтона

$$\dot{q}_\tau = \frac{\partial H_\tau}{\partial p_\tau}, \quad \dot{p}_\tau = -\frac{\partial H_\tau}{\partial q_\tau} \quad (2.9)$$

Тогда

$$U_{\tau,1} = P_{\tau,1} Y_{\tau,0} + \xi_\tau P_{\tau,0} \left( b_\tau \frac{\partial Y_{\tau,0}}{\partial p} + \frac{\partial Y_{\tau,0}}{\partial q} \right) - i \frac{\partial P_{\tau,0}}{\partial \xi_\tau} \frac{\partial Y_{\tau,0}}{\partial p_\tau} \quad (2.10)$$

где  $P_{\tau,1}(\xi_\tau, t)$  – подлежащий определению полином аргумента  $\xi_\tau$ .

Условие разрешимости уравнений (2.3) при  $k = 2$ , при учете (2.6), (2.9), (2.10), снова дает дифференциальное уравнение относительно  $P_{\tau,0}$

$$\mathbf{Z}_{\tau,0}^* (\mathbf{L}_{\tau,1} \mathbf{U}_{\tau,1}^T + \mathbf{L}_{\tau,0} \mathbf{U}_{\tau,0}^T) = 0 \quad (2.11)$$

Последнее имеет решение в виде полинома тогда и только тогда, когда функция  $b_\tau(t)$  – решение уравнения Риккати

$$\dot{b}_\tau + \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p_\tau^2} b_\tau^2 + 2 \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p_\tau \partial q_\tau} b_\tau + \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial q_\tau^2} = 0 \quad (2.12)$$

Тогда (2.11) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p_\tau^2} \frac{\partial^2 P_{\tau,0}}{\partial \xi_\tau^2} + i \left( b_\tau \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p_\tau^2} + \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p_\tau \partial q_\tau} \right) \xi_\tau \frac{\partial P_{\tau,0}}{\partial \xi_\tau} + i \frac{\partial P_{\tau,0}}{\partial t} + \\ & + i \left( \mathbf{Z}_{\tau,0}^* \frac{\partial \mathbf{L}_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau} \mathbf{Y}_{\tau,0}^T \right)^{-1} \mathbf{Z}_{\tau,0}^* \left[ \left( \frac{1}{2} b_\tau \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p_\tau^2} \frac{\partial \mathbf{L}_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau} + \frac{1}{2} \dot{\omega}_\tau \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \dot{p}_\tau \frac{\partial^2 \mathbf{L}_{\tau,0}}{\partial \omega_\tau \partial p_\tau} + \mathbf{N}_\tau \right) \mathbf{Y}_{\tau,0}^T + \frac{\partial \mathbf{L}_{\tau,0}}{\partial p_\tau} \frac{\partial \mathbf{Y}_{\tau,0}^T}{\partial q_\tau} \right] P_{\tau,0} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Решением уравнения (2.13) является полином

$$P_{\tau,0} = \sum_{k=0}^{\sigma_{\tau,0}} A_{\tau,0k}(t; c_{0i}) \xi_\tau^k \quad (2.14)$$

степени  $\sigma_{\tau,0}$  с коэффициентами  $A_{\tau,0k}$ , содержащими произвольные константы  $c_{0i}$  ( $i = 0, 1, \dots, \sigma_{\tau,0}$ ). Ввиду громоздкости явный вид для  $A_{\tau,0k}$  здесь не приводится.

Условие разрешимости уравнений (2.3) при  $k \geq 3$  приводит к неоднородным дифференциальным уравнениям относительно  $P_{\tau,k-2}$ .

**3. Поперечные волны.** Пусть  $\partial/\partial t \sim \varepsilon^{-\alpha}$ ,  $u_1 = \varepsilon^\beta u_n$ ,  $u_2 = \varepsilon^\gamma v_n$ ,  $u_3 = w_n$ , где  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ . Потребуем, чтобы в третьем уравнении системы (1.1) инерционный член, а также слагаемые, содержащие старшие производные по  $x$ , имели одинаковый порядок малости и входили в асимптотически главную часть разрешающей системы. Находим  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \gamma = 1$ . Введем "медленное время"  $t_1 = \varepsilon t$ . Тогда для изгибных волн получим систему уравнений

$$(\mathbf{L} + \varepsilon^2 \partial^2 / \partial t_1^2) (\mathbf{E}_{n\varepsilon} \mathbf{U}_n^T) = 0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E}_{n\varepsilon} = \text{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1), \quad \mathbf{U}_n = (u_n, v_n, w_n)$$

Как и прежде, решение уравнений (3.1), будем искать в виде волновых пакетов (2.2) с заменой во всех формулах индекса  $\tau$  на  $n$ , а  $t$  на  $t_1$ . Обозначая через  $Q_n$  множество значений  $q_n(t_1)$ , считаем, что для любого  $q_n \in Q_n$  значения всех коэффициентов уравнений (3.1), а также их производных, – величины порядка единицы.

Процедура отыскания неизвестных функций, входящих в асимптотическое представление вектора  $\mathbf{U}_n$ , остается прежней. При этом гамильтонианы, соответствующие изгибному движению оболочки, имеют вид

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(p, q) &= \left\{ \Lambda(p, q) + \left[ g_1(q) p^4 + m^2 f^{-2}(q) g_2(q) p^2 + m^4 f^{-4}(q) g_3(q) \right] \Lambda^{-1}(p, q) + g_4(q) \right\}^{1/2} \\ H_n^{(2)}(p, q) &= -H_n^{(1)}(p, q) \end{aligned}$$

$$\Lambda(p, q) = [p^2 + m^2 f^{-2}(q)]^2, \quad g_1(q) = -(k_1 + vk_2)^2 \quad (3.2)$$

$$g_2(q) = (1 - v)^{-1} \left[ (2 + v)(k_1 + vk_2)(k_2 - vk_1) - 2(k_2 + vk_1)^2 - 2(k_1 + vk_2)^2 \right]$$

$$g_3(q) = -(1 - v)^{-1} (k_2 + vk_1)^2, \quad g_4(q) = (k_1^2 + 2vk_1k_2 + k_2^2)$$

Элементы матриц  $L_{n,0}$ ,  $N_n$ , ввиду их громоздкости, здесь не приводятся.

**4. Решение задачи (1.1), (1.2).** Рассмотрим вектор-функцию

$$U^a = \left( E_{\tau\varepsilon} (U_\tau^\Sigma)^T \right)^T + \left( E_{n\varepsilon} (U_n^\Sigma)^T \right)^T \quad (4.1)$$

где

$$U_\tau^\Sigma = \sum_{l=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} U_{\tau,k}^{(l)} \exp \left\{ i\varepsilon^{-1} S_\tau^{(l)} \right\}$$

$$S_\tau^{(l)} = \int_0^t \omega_\tau^{(l)}(t') dt' + \varepsilon^{1/2} p_\tau^{(l)}(t) \xi_\tau^{(l)} + \frac{1}{2} \varepsilon b_\tau^{(l)}(t) \left( \xi_\tau^{(l)} \right)^2$$

$$\xi_\tau^{(l)} = \varepsilon^{-1/2} \left[ x - q_\tau^{(l)}(t) \right], \quad U_{\tau,k}^{(l)} = \left( u_{\tau,k}^{(l)}, v_{\tau,k}^{(l)}, w_{\tau,k}^{(l)} \right)$$

а вектор-функция  $U_n^\Sigma$  определяется теми же формулами с заменой  $t$  на  $t_1 = \varepsilon t$ , а индексов  $\tau$  и  $l$  – на  $n$  и  $r$  ( $r = 1, 2$ ) соответственно. Индексы  $l$  и  $r$  здесь указывают на функции, отвечающие гамильтонианам  $H_\tau^{(l)}$  и  $H_n^{(r)}$  соответственно. Например,  $p_\tau^{(1)}$ ,  $q_\tau^{(1)}$  – решение системы (2.9) при  $H_\tau \equiv H_\tau^{(1)}$ .

В силу проведенных построений  $U^a$  – формальное асимптотическое решение уравнений (1.1). Компонентами вектор-функций  $U_{\tau,k}^{(l)}$  и  $U_{n,k}^{(r)}$  являются полиномы относительно  $\xi_\tau^{(l)}$  и  $\xi_n^{(r)}$  степеней  $\sigma_{\tau,k}^{(l)}$  и  $\sigma_{n,k}^{(r)}$  соответственно с коэффициентами, содержащими произвольные постоянные интегрирования. Обозначим через  $c_{ki}^{(l)}$ ,  $d_{kj}^{(r)}$  ( $i = 0, 1, \dots, \sigma_{\tau,k}^{(l)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, \sigma_{n,k}^{(r)}$ ) постоянные, появляющиеся при построении полиномов  $P_{\tau,k}^{(l)}$  и  $P_{n,k}^{(r)}$  соответственно. Для их отыскания подставим (4.1) в начальные условия (1.2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon^{1/2}$ . При этом учтем, что  $\xi_\tau^{(l)}|_{t=0} = \xi_n^{(r)}|_{t=0} = \zeta$  для любых  $l$  и  $r$ . В результате получим последовательность уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^4 u_{\tau,k}^{(l)}|_{t=0} &= F_{1k}^+(\zeta), & \sum_{l=1}^4 v_{\tau,k}^{(l)}|_{t=0} &= F_{2k}^+(\zeta) \\ \sum_{l=1}^4 \delta_l u_{\tau,k}^{(l)}|_{t=0} &= F_{1k}^-(\zeta), & \sum_{l=1}^4 \delta_l v_{\tau,k}^{(l)}|_{t=0} &= F_{2k}^-(\zeta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\left( w_{n,k}^{(1)} \pm w_{n,k}^{(2)} \right)|_{t=0} = F_{3k}^\pm(\zeta), \quad k = 0, 1, \dots$$

где, в частности,

$$F_{10}^+ = \lambda_{10}(\zeta), \quad F_{20}^+ = \lambda_{20}(\zeta), \quad F_{30}^+ = \lambda_{30}(\zeta)$$

$$F_{10}^- = -\frac{\eta_{10}(\zeta)}{H_\tau^0}, \quad F_{20}^- = -\frac{\eta_{20}(\zeta)}{H_\tau^0}$$

$$F_{30}^- = -\frac{\eta_{30}(\zeta)}{H_n^0} - \frac{H_\tau^0}{H_n^0} \left[ w_{\tau,0}^{(2)} - w_{\tau,0}^{(1)} + \delta_3 \left( w_{\tau,0}^{(4)} - w_{\tau,0}^{(3)} \right) \right] \Big|_{t=0}$$

а  $H_\tau^0 = H_\tau^{(1)}(a_0, 0)$ ,  $H_n^0 = H_n^{(1)}(a_0, 0)$ . Пусть  $k = 0$ . Приравняем в (4.2) коэффициенты при одинаковых степенях  $\zeta$ . Тогда из первых четырех уравнений системы (4.2) находим  $\sigma_{\tau,0}^{(l)} = \max\{M_{10}, M_{20}, K_{10}, K_{20}\} = \sigma_{\tau,0}^*$ , а также приходим к системе из  $4(\sigma_{\tau,0}^* + 1)$  алгебраических уравнений относительно  $c_{0i}^{(l)}$  ( $l = 1, \dots, 4; i = 0, 1, \dots, \sigma_{\tau,0}^*$ ). Последние два уравнения в (4.2) дают  $\sigma_{n,0}^{(r)} = \max\{M_{30}, K_{30}, \sigma_{\tau,0}^*\} = \sigma_{n,0}^*$  и систему из  $2(\sigma_{n,0}^* + 1)$  уравнений относительно  $d_{0j}^{(r)}$  ( $r = 1, 2; j = 0, 1, \dots, \sigma_{n,0}^*$ ). Аналогичным образом рассматривая (4.2) при  $k \geq 1$ , можно последовательно найти константы, содержащиеся в  $P_{\tau,k}^{(l)}$  и  $P_{n,k}^{(r)}$ .

**5. Анализ решения.** Можно доказать [1], что  $\text{Im } b_\tau^{(l)} > 0$ ,  $\text{Im } b_n^{(r)} > 0$  при любом  $t \geq 0$ . Таким образом, построенное решение (4.1) при  $t > 0$  представляет собой наложение двух пакетов изгибных волн с центрами на параллелях  $x = q_n^{(r)}$  ( $r = 1, 2$ ), а также (если  $m \neq 0$ ) четырех пакетов продольных и четырех пакетов крутильных волн с центрами  $x = q_\tau^{(l)}$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ). При этом первый и второй пакеты продольных волн, отвечающие гамильтонианам  $H_\tau^{(1)}$  и  $H_\tau^{(2)}$ , двигаются "в связке" с порождаемыми ими первым и вторым пакетами крутильных волн, а третий и четвертый пакеты крутильных волн с гамильтонианами  $H_\tau^{(3)}$  и  $H_\tau^{(4)}$  порождают соответственно два пакета продольных волн.

При  $m = 0$  (осесимметричное движение) построенное решение становится непригодным (см. (2.7)), однако в этом случае уравнения тангенциального движения (2.1) расщепляются на систему, описывающую продольные волны и уравнение крутильных волн [4]. Решение последних может быть построено изложенным выше методом. В осесимметричном случае движение оболочки представляет собой суперпозицию двух пакетов продольных волн с гамильтонианами  $H_\tau^{(l)} = \delta_l p$  ( $l = 1, 2$ ), двух, независимых от продольных волн, пакетов крутильных волн, соответствующих функциям  $H_\tau^{(l)} = \delta_l p$  ( $l = 3, 4$ ), и двух пакетов изгибных волн, для которых

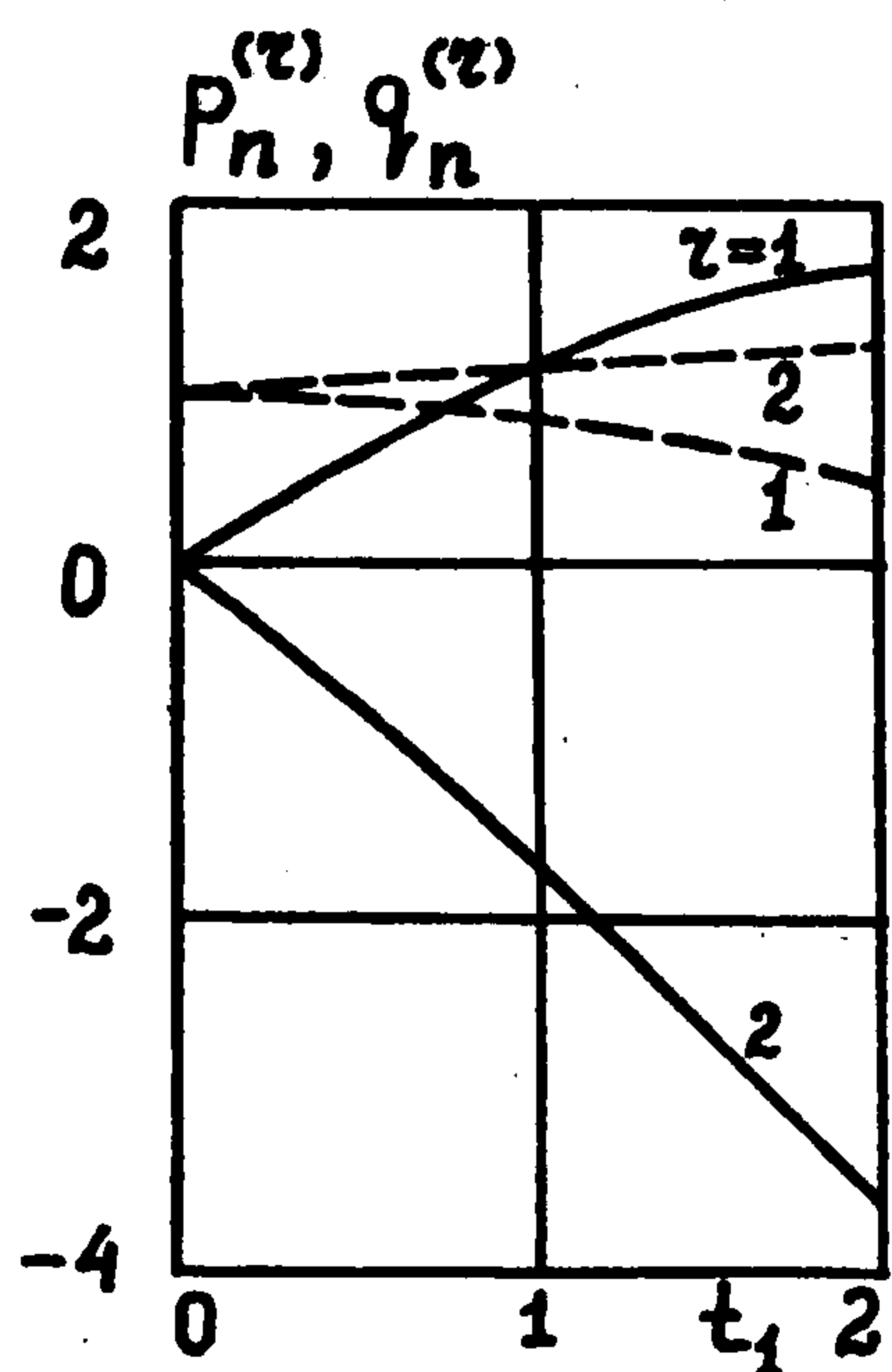
$$H_n^{(1)} = \left[ (1 - v^2) k_2^2(q) + p^4 \right]^{1/2}, \quad H_n^{(2)} = -H_n^{(1)} \quad (5.1)$$

Отметим что при  $p_n^{(r)}$  и  $p_\tau^{(l)}$ , близких к нулю (см. (2.7)), нарушается предположение о том, что  $u_\tau, v_\tau, w_\tau, u_n, v_n, w_n$  — величины порядка единицы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом, при  $a_0 > 0$  вектор-функцию (4.1) следует считать формальным асимптотическим решением задачи (1.1), (1.2) на некотором отрезке  $t \in [0, T_s]$ , где  $p_n^{(r)}(t), p_\tau^{(l)}(t) > 0$ ,  $p_n^{(r)}(t), p_\tau^{(l)}(t) \sim 1$ . Величина  $T_s$  зависит от геометрии оболочки и соотношения входящих в задачу параметров. Пусть, например,  $f'(x) < 0$ ,  $f_{\text{inf}} = \inf f(x)$  и имеет место неравенство

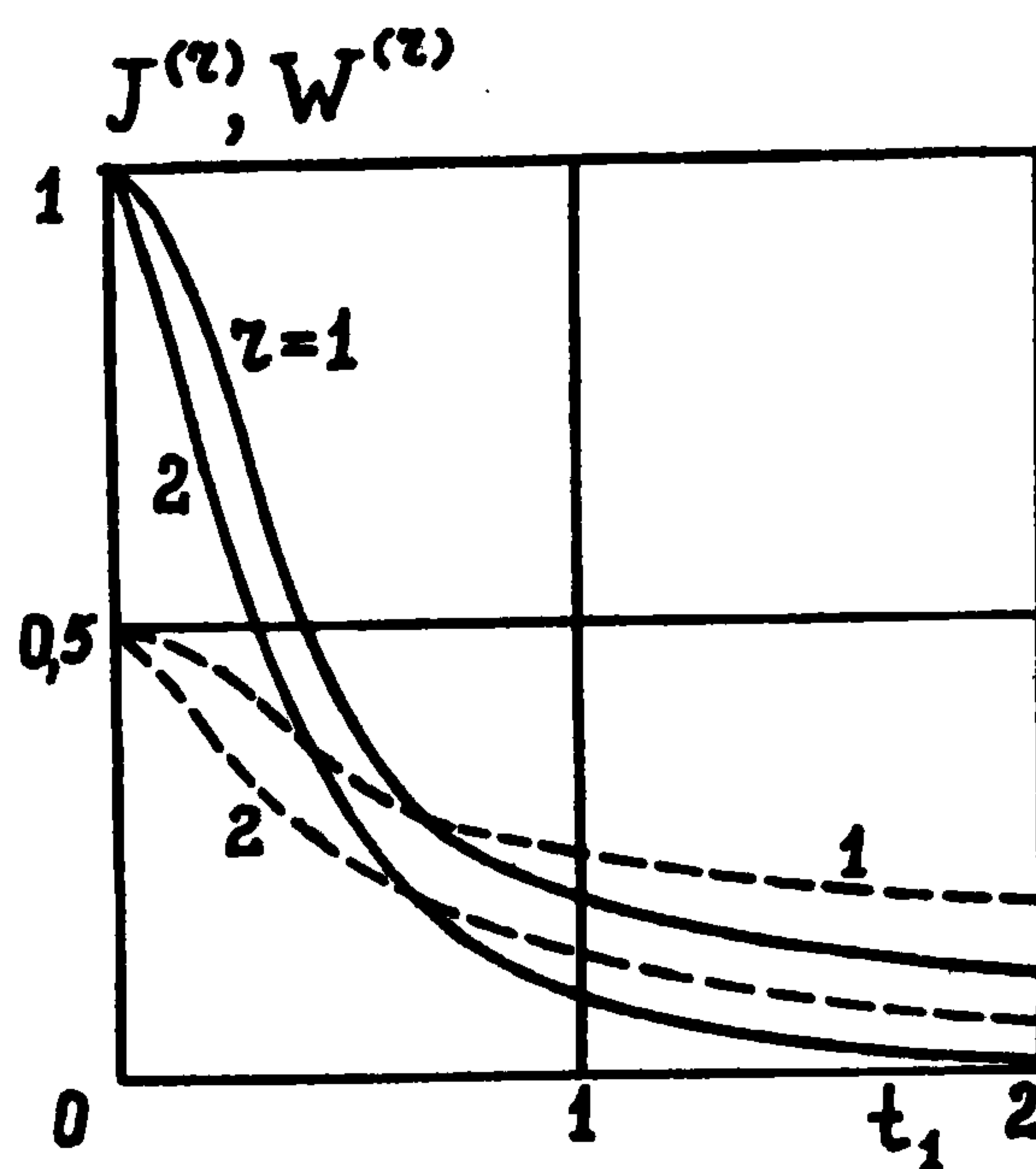
$$f_{\text{inf}}^2 < m^2 / (a_0^2 + m^2) \quad (5.2)$$

Тогда, как показывает анализ системы Гамильтона, для удовлетворения, по крайней мере, неравенствам  $p_\tau^{(l)}(t) > 0$ , следует брать

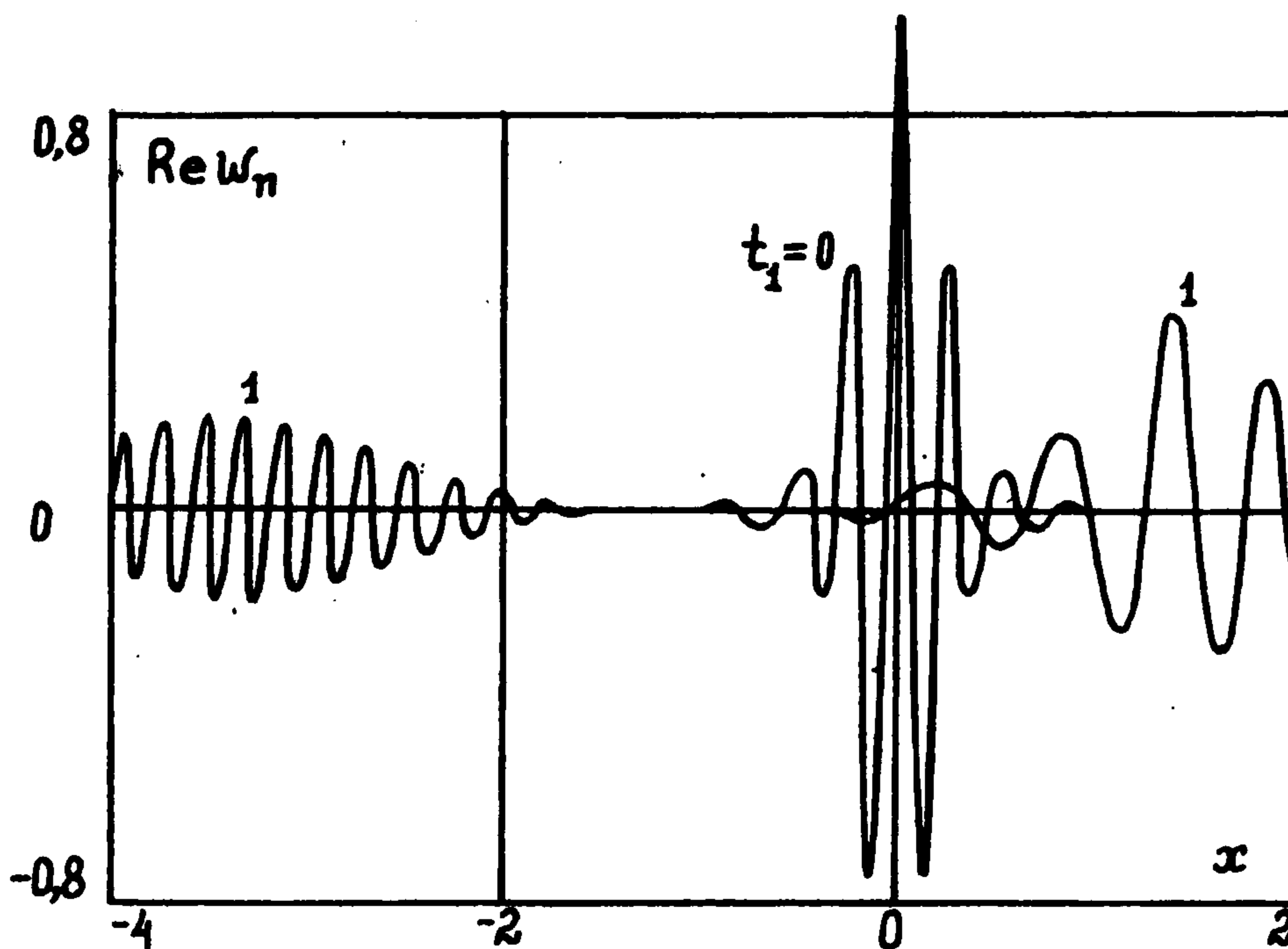
$$T_s < H_\tau^0 \int_0^{q^*} \left[ (H_\tau^0)^2 - \frac{m^2}{f^2(q)} \right]^{-1/2} dq$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

где  $q_*$  находятся из уравнения

$$f^2(q_*) = m^2 / (a_0^2 + m^2)$$

Если неравенство (5.2) не выполняется, то  $p_\tau^{(l)}(t) > 0$  на любом отрезке  $[0, T_2]$ .

**6. Пример.** Рассмотрим коническую оболочку, для которой  $f(x) = 1 - x/\kappa$ . Здесь  $\kappa = \text{cosec } \theta$ ,  $-\infty < x < \kappa$ , где  $2\theta$  – угол раствора при вершине конуса. Пусть  $\text{Im } b_0 \geq 1$ , а  $\theta$  – достаточно малое число. Тогда начальными условиями (1.2) в вершине конуса можно пренебречь.

Были проведены расчеты для осесимметричных пакетов изгибных волн при  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = i$ ,  $\kappa = 4,8$ ,  $\lambda_{30} = 1$  и нулевых значениях остальных параметров  $\lambda_{jk}$ ,  $\eta_{jk}$ . На фиг. 1 показаны решения системы Гамильтона: функции  $q_n^{(r)}$  (сплошные кривые) и  $p_n^{(r)}$  (штриховые кривые). Видно, что изменяемость волн в пакете, бегущем к вершине конуса, уменьшается, и наоборот, возрастает в пакете, который движется в противоположном направлении. Представленные на фиг. 2 графики функций  $J^{(r)} = \text{Im } b_n^{(r)}(t_1)$  (сплошные кривые) и

$W^{(r)} = \max |w_n^{(r)}(t_1)|$  (штриховые кривые) указывают на более медленное "расползание" пакета, бегущего к вершине конуса. Картина волнообразований на поверхности оболочки с параметрами  $h/R = 4 \cdot 10^{-3}$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $E = 6,24 \cdot 10^{-7}$  кг/(см  $\cdot$  с<sup>2</sup>);  $\rho = 1,18 \cdot 10^{-3}$  кг/см<sup>3</sup> изображена на фиг. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михасёв Г.И. О комплексном ВКБ-решении задачи Коши для уравнений движения тонкой цилиндрической оболочки // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. № 4. С. 24–27.
2. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.
3. Михасёв Г.И. О распространении изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке // Изв. АН МТТ. 1994. № 3. С. 164–172.
4. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.

Витебск

Поступила в редакцию  
12.II.1996