

УДК 539.3

© 1996 г. И.И. Аргатов, С.А. Назаров

ДАВЛЕНИЕ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО УЗКОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА

Методом сращиваемых асимптотических разложений изучается линейная контрактная задача для штампа, представляющего собой в плане узкое кольцо (переменной толщины), срединная линия которого – замкнутый гладкий контур. Обосновывается гипотеза Л.А. Галина, согласно которой распределение давления в поперечном направлении совпадает в главном с решением соответствующей плоской задачи. Приводятся различные формы записи интегрального уравнения для главного члена асимптотики погонного давления. Получены явные решения ряда конкретных задач.

Л.А. Галиным [1] было найдено предельное значение для коэффициента постели (связывающего осадку упругого основания и среднее давление $P(s)$, приходящееся на единицу длины балки) для прямоугольной в плане балки в предположении (гипотеза Галина): распределение давления в поперечном направлении в главном будет таким же, какое получается на основании решения соответствующей плоской задачи. В частности, для балки, сечение которой имеет прямолинейное горизонтальное основание,

$$p(s, n) = \frac{P(s)}{\pi \sqrt{h^2 - n^2}} \quad (0.1)$$

Л.А. Галину принадлежит и постановка задачи о давлении на упругое полупространство штампа кольцеобразной формы в плане ([2], § 2. гл. II, с. 168).

Первый удовлетворительный, с практической точки зрения, результат в решении осесимметричной задачи о плоском кольцевом штампе был достигнут К.Е. Егоровым [3, 4]. Полученная им приближенная, весьма простая, формула для контактного давления совпадает с точной в случае круглого штампа, а для достаточно узкого (толщины $2h$) кольцевого штампа переходит в (0.1) (причем $P(s) \equiv (2\pi R)^{-1}Q$, где R – радиус срединной линии кольцевой области контакта, Q – действующая на штамп сила).

Не останавливаясь на работах, посвященных решению контактной задачи для широкого кольцевого штампа, отметим, что первое решение осесимметричной задачи для узкого кольцевого штампа получил В.М. Александров [5]. Для главного члена асимптотики контактного давления в случае штампа с плоским основанием указаны различные формы, среди которых и (0.1). При этом сила Q , действующая на штамп, в главном связана с его перемещением δ_0 зависимостью

$$Q = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{2\pi R \delta_0}{\ln(R/h) + \ln 2 + a_0}; \quad a_0 = 2,079 \quad (0.2)$$

Задача о вдавливании в упругое полупространство кольцевого штампа под действием вертикальной приложенной силы рассматривалась в [6, 7].

Для узкого кольцевого штампа, близкого в плане к круговому, предложено [5, 8] использовать в качестве приближенного решения формулы (0.1) и (0.2).

Было получено [9] решение контактной задачи для штампа с основанием в виде узкого прямоугольника. Уравнение для погонного давления найдено на основе гипотезы Галина. Обсуждение этого подхода, а также другой метод решения даны в [10].

Была рассмотрена [11] осесимметричная задача о давлении двух кольцевых штампов на

упругое полупространство. Предложен [12] подход к более общей задаче о взаимодействии штампов, представляющих собой в плане области, ограниченными окружностями.

Большое количество публикаций посвящено проблеме расчета контактных давлений под роликом подшипника качения. Сложность этой задачи (обсуждение инженерной стороны вопроса см. в [13], § 5.6) обусловлена в первую очередь тем, что область контакта заранее не известна и должна определяться в процессе решения. Тем не менее наличие узкой зоны контакта позволяет находить пригодные для практических нужд различные приближенные решения.

К этой задаче применялся [14, 15] метод сращиваемых асимптотических разложений. Другой подход на основе упрощающих предположений, родственных гипотезе Галина, реализован в [16]. Оригинальный метод, приводящий к результатам, аналогичным приведенным ранее [14, 15], был развит в [17]. Случай, когда контакт осуществляется по нескольким вытянутым узким областям, рассмотрен [18].

Необходимо отметить, что в работах [14, 15, 17, 18] упущены некоторые существенные моменты асимптотического анализа рассматриваемых сингулярно возмущенных задач, математически строгое обоснование которого впервые дано в [19, 22].

Известно (см., например, [13], § 5.6), что в окрестности концевых зон напряженное состояние контактирующих тел существенно пространственное и должно рассматриваться как таковое для получения корректных результатов. Иными словами, если в средней части под вытянутым штампом область местных возмущений полубесконечного тела описывается "плоским" пограничным слоем (т.е. верна гипотеза Галина), то в окрестности концов необходимо строить "трехмерный" пограничный слой аналогично тому как это было сделано в [21].

Не нашел своего освещения в [14, 15, 17, 18] и тот факт, что получаемая в конечном итоге предельная задача (для произвольной правой части) разрешима не при всяком соотношении ϵ характерных размеров узкой зоны контакта. Это обстоятельство компрометирует весь асимптотический анализ задачи: асимптотические формулы должны "работать" при любом достаточно малом $\epsilon > 0$. Впервые на это было обращено внимание в [19–22]; там же был предложен и метод устранения этого изъяна (подробности см. в [23, 24] и разд. 7).

Несмотря на обширную литературу, проблема расчета контактных давлений под штампом, представляющим собой в плане узкое криволинейное кольцо, не получила должного решения. Здесь же стоит подчеркнуть, что в то время как осесимметричная задача для кольцевого штампа многим авторам послужила своеобразным "крепким орешком" для демонстрации мощи сложных математических средств в поисках так называемых точных решений, в задаче о внецентренном вдавливании в полупространство узкого кольцевого штампа до сих пор не было получено наглядных результатов. Излагаемый ниже подход, напротив, заведомо нацелен на отыскание только приближенного (но в то же время асимптотически точного) решения, которого часто оказывается достаточным для инженерных расчетов.

Укажем также на две "механические" работы [25, 26], к которым по методу построения асимптотики примыкает содержание статьи.

1. Постановка задачи. Пусть Γ – простой замкнутый контур длины $2l$ на плоскости \mathbb{R}^2 . Введем в его окрестности систему локальных координат (s, n) , где s – длина дуги, $|n|$ – расстояние вдоль нормали. Обозначим через ϵ малый положительный параметр и опишем узкое кольцо переменной толщины $2h(\epsilon; s) = 2\epsilon H(s)$, срединную линию которого образует Γ :

$$\Gamma(\epsilon) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: s \in [0, 2l), -\epsilon H(s) < n < \epsilon H(s)\}$$

При помощи представления Папковича – Нейбера контактная задача о поступательном вдавливании гладкого штампа с плоским основанием в форме области $\Gamma(\epsilon)$ в упругое полупространство на глубину δ

$$\mu \Delta_x \mathbf{u}(\epsilon; \mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u}(\epsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_-^3 = \{\mathbf{x}: x_3 < 0\}$$

$$\sigma_{31}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = \sigma_{32}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = 0, \quad x_3 = 0, \quad \mathbf{y} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{u}; \mathbf{y}, 0) = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Gamma(\epsilon)} \quad (1.1)$$

$$u_3(\epsilon; \mathbf{y}, 0) = -\delta, \quad \mathbf{y} \in \Gamma(\epsilon)$$

$$u(\varepsilon; \mathbf{x}) = o(1), \quad |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow \infty$$

сводится (см. [2, 27]) к смешанной краевой задаче теории гармонических функций

$$\Delta_x \varphi(\varepsilon; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_-^3; \quad \partial_3 \varphi(\varepsilon; \mathbf{y}, 0) = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Gamma(\varepsilon)} \quad (1.2)$$

$$\varphi(\varepsilon; \mathbf{y}, 0) = -\delta, \quad \mathbf{y} \in \Gamma(\varepsilon); \quad \varphi(\varepsilon; \mathbf{x}) = o(1), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

Здесь λ, μ – параметры Ламе; $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$ – компоненты тензора напряжений, отвечающего вектору \mathbf{u} смещений точек полупространства; $\partial_3 = \partial/\partial x_3$.

Давление на полубесконечное тело со стороны штампа вычисляется по формуле

$$p(\varepsilon; \mathbf{y}) = -2\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \partial_3 \varphi(\varepsilon; \mathbf{y}, 0), \quad \mathbf{y} \in \Gamma(\varepsilon) \quad (1.3)$$

Замечание 1.1. Предположение $\delta = \text{const}$ сделано только для упрощения изложения и устраняется в разд. 3. Так как в соответствии с принципом максимума $\partial_3 \varphi(\varepsilon; \mathbf{y}, 0) < 0$ при $\mathbf{y} \in \Gamma(\varepsilon)$, то априори можно утверждать, что контактное давление, отвечающее решению задачи (1.1), положительно.

Замечание 1.2. Параметр ε введен формально для того, чтобы облегчить описание асимптотического метода, применяемого к сингулярно возмущенной краевой задаче (1.2). В итоговых формулах вернемся к фактической толщине узкого штампа $2h(s)$.

2. Конструкция асимптотики решения задачи (1.2). На удалении от $\Gamma(\varepsilon)$ функция φ в главном представляется в виде потенциала простого слоя, плотность которого сосредоточена на контуре Γ ,

$$v(\gamma; \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(t) dt}{\sqrt{(x_1 - y_1(t))^2 + (x_2 - y_2(t))^2 + x_3^2}} \quad (2.1)$$

Здесь $(y_1(t), y_2(t))$ – координаты точки на Γ , dt – элемент длины дуги, γ – функция, подлежащая определению. Величина $2\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \gamma(s) \equiv P(s)$ имеет смысл контактного давления, рассчитанного на единицу длины дуги срединной линии кольцевой области контакта (см. (1.3)).

В окрестности зоны контакта строится решение типа пограничного слоя. Для этого, во-первых, надо записать оператор Лапласа в локальных координатах:

$$(1 - nk(s))^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} (1 - nk(s))^{-1} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} (1 - nk(s)) \frac{\partial}{\partial n} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (2.2)$$

где $k(s)$ – кривизна кривой Γ в точке s . Во-вторых, ввести в (2.2) "быстрые" переменные

$$(\eta_1, \eta_2) = \varepsilon^{-1}(n, x_3) \quad (2.3)$$

оставив масштаб для координаты s вдоль Γ неизменным. В-третьих, разложить оператор (2.2) в формальный ряд по степеням ε и выделить главную часть:

$$\Delta_x - \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_{\eta} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k L_k \left(s, \eta_1; \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right)$$

Таким образом, упоминавшийся пограничный слой оказывается "плоским" и в главном удовлетворяет следующим уравнениям, в которые как параметр входит координата s :

$$\Delta_{\eta} w(s; \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}_-^2 = \{\boldsymbol{\eta}: \eta_2 < 0\} \quad (2.4)$$

$$w(s; \eta_1, 0) = -\delta, \quad |\eta_1| < H(s); \quad \partial_2 w(s; \eta_1, 0) = 0, \quad |\eta_1| > H(s)$$

Подчеркнем, что соотношения (2.4) полностью не определяют функцию w – отсутствует условие, накладываемое на поведение $w(\eta)$ при $|\eta| = (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$. Так как функции v (на удалении от $\Gamma(\epsilon)$) и w (вблизи $\Gamma(\epsilon)$) должны служить приближением к решению задачи (1.2), то они должны быть согласованы в промежуточной зоне. Иными словами, сначала следует найти асимптотику потенциала (2.1) при $(n^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow 0$ (который в пределе вырождается в расходящийся интеграл). Затем, на основании полученного результата установить характер поведения решения (2.4) на бесконечности и построить пограничный слой. И наконец, срастить оба представления, устраняя произвол, допускаемый в процессе решения обеих предельных задач.

3. Регуляризация интеграла (2.1). Пусть $y_1 = f_1(s)$, $y_2 = f_2(s)$ – естественная параметризация замкнутой, без точек самопересечения кривой Γ (функции f_1, f_2 имеют требуемую гладкость). Для определенности будем считать, что при обходе Γ в сторону возрастания координаты s область, охватываемая Γ , остается слева.

В трехмерной окрестности контура Γ перейдем к координатам (s, n, x_3) , связь которых с декартовыми дается формулами

$$x_1 = f_1(s) - nf_2'(s), \quad x_2 = f_2(s) + nf_1'(s), \quad x_3 = x_3 \quad (3.1)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по s , n – расстояние (с учетом знака) вдоль внутренней нормали к дуге $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Введем еще полярные координаты (r, φ) в плоскостях, нормальных к Γ : $n = r \cos \varphi$, $x_3 = r \sin \varphi$, $\varphi \in [-\pi, 0]$.

Квадрат расстояния между точкой вблизи Γ с локальными координатами (s, n, x_3) и точкой на Γ с координатой t можно в силу (3.1) записать так:

$$R_r(s, t)^2 = R_0(s, t)^2 + r^2 - 2r \cos \varphi \{f_2'(s)F_1(s, t) - f_1'(s)F_2(s, t)\} \quad (3.2)$$

$$R_0(s, t) = [F_1(s, t)^2 + F_2(s, t)^2]^{1/2}; \quad F_k(s, t) = f_k(s) - f_k(t)$$

Здесь $R_0(s, t)$ расстояние между двумя точками на контуре Γ с координатами s и t .

Учитывая, что $f_1'(s)^2 + f_2'(s)^2 = 1$ и $f_1''(s)f_1'(s) + f_2''(s)f_2'(s) = 0$, а кривизна выражается формулой $k(s) = f_2''(s)f_1'(s) - f_1''(s)f_2'(s)$, получим

$$R_0(s, t)^2 = (s-t)^2 [1 + O(k(s)^2 |s-t|^2)], \quad t \rightarrow s \quad (3.3)$$

$$f_2'(s)F_1(s, t) - f_1'(s)F_2(s, t) = 2^{-1} k(s)(s-t)^2 [1 + o(1)], \quad t \rightarrow s \quad (3.4)$$

Представив функцию (2.1) в форме

$$v(\gamma; s, r, \varphi) = -\frac{\gamma(s)}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{dt}{R_r(s, t)} - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{R_r(s, t)} dt \quad (3.5)$$

видим, что только первый интеграл в (3.5) будет расходящимся в точках $r = 0$. Найдем его два первых члена асимптотики при $r = (n^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow 0$. Имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{dt}{R_r(s, t)} = - \int_{s-l}^s \frac{d(s-t)}{R_r(s, t)} + \int_s^{s+l} \frac{d(t-s)}{R_r(s, t)} = - \int_{s-l}^s \frac{A(s-t)}{R_r(s, t)} dB(s-t) + \int_s^{s+l} \frac{A(t-s)}{R_r(s, t)} dB(t-s) =$$

$$= -\frac{2r}{R_r(s, s)} \ln r + \sum_{\pm} \frac{A(l)}{R_r(s, s \pm l)} B(l) + \int_{s-l}^s B(s-t) d \frac{A(s-t)}{R_r(s, t)} - \int_s^{s+l} B(t-s) d \frac{A(t-s)}{R_r(s, t)}$$

$$A(x) = \sqrt{x^2 + r^2}, \quad B(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + r^2})$$

Выделив главную часть, совершаем предельный переход

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dt}{R_r(s,t)} &= -2 \ln r + \sum_{\pm} \frac{l \ln(2l)}{R_0(s, s \pm l)} + \\ &+ \int_{s-l}^s \ln[2(s-t)] d\left(\frac{s-t}{R_0(s,t)} - 1\right) - \int_s^{s+l} \ln[2(t-s)] d\left(\frac{t-s}{R_0(s,t)} - 1\right) + o(1) = \\ &= -2 \ln \frac{r}{2l} + \int_{s-l}^{s+l} \left(\frac{|s-t|}{R_0(s,t)} - 1\right) \frac{dt}{|s-t|} + o(1), \quad r \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, на основании (3.3)–(3.6) получаем

$$v(\gamma; s, r, \varphi) = \frac{\gamma(s)}{\pi} \left(\ln \frac{r}{2l} - J^0(s) \right) - \frac{1}{\pi} (J\gamma)(s) + o(1), \quad r \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

$$J^0(s) = \frac{1}{2} \int_{s-l}^{s+l} \left(\frac{1}{R_0(s,t)} - \frac{1}{|s-t|} \right) dt, \quad (J\gamma)(s) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{R_0(s,t)} dt \quad (3.8)$$

Здесь $2l$ – длина контура Γ .

Замечание 3.1. Для того чтобы предыдущие выкладки имели силу, достаточно потребовать, чтобы контур Γ был гладким, а функция γ , к примеру, удовлетворяла на нем условию Липшица.

Наконец, остаток в (3.6) может быть оценен величиной $O(k_m r \ln[k_m r])$, а в (3.7) – величиной $O(C_\gamma k_m r \ln[k_m r])$, где k_m – максимальная кривизна контура, а C_γ – сумма постоянной Липшица, умноженной на $2l$, и максимума модуля γ на Γ .

4. Уравнение для определения γ . В силу (3.7) метод сращиваемых разложений [28–30] требует логарифмический рост на бесконечности решения уравнений (2.4) (см. конец разд. 2).

Непосредственно проверяется, что функция

$$Y(\eta) = \pi^{-1} \ln \left\{ H^{-1} \left| \eta + \sqrt{\eta^2 - H^2} \right| \right\}; \quad (\eta = \eta_1 + i\eta_2) \quad (4.1)$$

где под радикалом подразумевается ветвь, голоморфная на плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-H, H]$ вещественной оси, и принимающая чисто мнимые значения на берегах разреза, удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta_\eta Y(\eta) &= 0, \quad \eta \in \mathbf{R}_-^2; \quad Y(\eta_1, 0+) = 0, \quad |\eta_1| < H(s) \\ \partial_2 Y(\eta_1, 0) &= 0, \quad |\eta_1| > H(s) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$Y(\eta) = \pi^{-1} [2|\eta| H(s)^{-1}] + O(|\eta|^{-1}), \quad |\eta| \rightarrow \infty$$

Замечание 4.1. Чтобы получить (4.1), достаточно вспомнить, что функция, стоящая под знаком модуля, реализует конформное отображение указанной плоскости с разрезом на внешность круга радиусом H .

Замечание 4.2. В случае, когда подошва штампа "волнистая" в продольном направлении (т.е. $\delta = \delta(s)$), все рассуждения сохраняют силу, если контакт осуществляется по всей области $\Gamma(\epsilon)$. Это приводит к дополнительному требованию

$$\gamma(s) > 0, \quad s \in [0, 2l] \quad (4.3)$$

которому должно удовлетворять решение интегрального уравнения, получаемого ниже. В противном случае вместо контактной задачи с фиксированной областью контакта $\Gamma(\epsilon)$ по-

лучаем более сложную задачу с заранее неизвестной зоной контакта – некоторым подмножеством $\Gamma(\varepsilon)$.

Замечание 4.3. Главный член асимптотики решения задачи о вдавлении с перекосом гладкого кольцевого штампа с плоским основанием в упругое полупространство также отыскивается в соответствии с изложенным алгоритмом. Этот случай сводится к предыдущему.

Пусть β_1, β_2 – малые углы поворотов штампа относительно осей x_1, x_2 соответственно. Тогда предпоследнее краевое условие в (1.1) можно (см., например, [27]) заменить следующим:

$$u_3(\varepsilon; y, 0) = -\delta - \beta_2 y_1 + \beta_1 y_2, \quad y \in \Gamma(\varepsilon)$$

Переходя к локальным координатам (s, n) и делая замену переменных (2.3), первое краевое условие в (2.4) переписываем в виде

$$w(s; \eta_1, 0) = -\delta - \beta_2 f_1(s) + \beta_1 f_2(s), \quad |\eta_1| < H(s)$$

Замечание 4.4. В общей ситуации, когда $\delta = \delta(s; \eta_1)$, пограничный слой представим в виде

$$w(s; \eta) = w^0(s; \eta) + \gamma(s)Y(s; \eta) \quad (4.4)$$

где w^0 – ограниченное на бесконечности решение уравнений (2.4) с правой частью $-\delta(s; \eta_1)$ (такое решение существует и единственно).

Постоянная в асимптотике

$$w^0(s; \eta) = -c^0(s) + O(|\eta|^{-1}), \quad |\eta| \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

вычисляется применением второй формулы Грина для оператора Лапласа. Учитывая (4.1), (4.5), получим

$$c^0(s) = - \int_{-H(s)}^{H(s)} \delta(s; \eta_1) \partial_2 Y(\eta_1, 0) d\eta_1$$

Разумеется, давление под штампом должно быть неотрицательным. Условие

$$\partial_2 w(s; \eta_1, 0) \leq 0, \quad -H(s) < \eta_1 < H(s) \quad (4.6)$$

вместе с (4.3) обеспечивает контакт по всему множеству $\Gamma(\varepsilon)$.

Представим решение (2.4) в виде

$$w(s; \eta) = -\delta + \gamma(s)Y(s; \eta) \quad (4.7)$$

Заметим, что в силу (4.2) справедлива асимптотическая формула (см. замечание 4.2)

$$w(s; \eta) = \pi^{-1} \gamma(s) \ln[2|\eta|H(s)^{-1}] - \delta(s) + O(|\eta|^{-1}), \quad |\eta| \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

Напомним, что функции v , на удалении от зоны контакта, и w , в области местных возмущений, должны служить приближением к искомому решению задачи (1.1). В промежуточной зоне, где должно "работать" и то и другое асимптотическое представление – на расстояниях $|\eta|/H(s)$ порядка $1/\sqrt{\varepsilon}$, или (что то же самое) при $r/h(s) = O(\sqrt{\varepsilon})$ – они должны различаться лишь незначительно (на величины, малые в сравнении с единицей). Добиваясь этого, выводим искомое соотношение, связывающее γ и δ .

Перейдем в (3.7) к быстрым координатам (2.3)

$$v(\gamma; s, \varepsilon \eta) = \pi^{-1} \gamma(s) (\ln[\varepsilon|\eta|(2l)^{-1}] - J^0(s)) - \pi^{-1} (J\gamma)(s) + O(\varepsilon|\eta|k_m \ln(\varepsilon|\eta|k_m)), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.9)$$

и сравним (4.9) с (4.8). Разность $v(\gamma; s, \varepsilon \eta) - w(s; \eta)$ будет величиной $O(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon)$ при

$|\eta|/H(\varepsilon) = O(1/\sqrt{\varepsilon})$, если только

$$\gamma(s)\{|\ln \varepsilon| + 2 \ln 2 + \ln[|H(s)^{-1}|] + J^0(s)\} + (J\gamma)(s) = \pi\delta(s) \quad (4.10)$$

Напомним, что решение интегрального уравнения (4.10) должно удовлетворять условию (4.3), по существу выражающему требование плотного прилегания кольцевого штампа к поверхности полубесконечного тела по всей зоне контакта.

Используя формулу $\partial_2 |f(\eta)| = |f(\eta)|^{-1} \operatorname{Re}\{\overline{f(\eta)} \partial_2 f(\eta)\}$, в которой $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, а черта означает комплексное сопряжение, отыскиваем производную $\partial_2 Y$ и убеждаемся, что закон распределения контактного давления, соответствующий (4.7), совпадает с (0.1).

Замечание 4.5. В ситуации, описанной в замечании 4.4, правая часть (4.10) заменяется на

$$\pi c^0(s) = \int_{-H(s)}^{H(s)} \frac{\delta(s; \eta_1)}{\sqrt{H(s)^2 - \eta_1^2}} d\eta_1$$

Подчеркнем, что кроме условия (4.3), которому должно подчиняться решение видоизмененного уравнения (4.10), необходимо соблюсти еще условие (4.6) для функции (4.4), восстанавливаемой по известной величине γ .

5. Другие формы записи разрешающего уравнения. Пусть (для определенности) единичный круг $|\zeta| < 1$ на плоскости комплексной переменной $\zeta = \rho e^{i\theta}$ конформным отображением

$$z = \omega(\zeta); \quad \omega'(\zeta) = d\omega(\zeta)/d\zeta \neq 0, \quad |\zeta| < 1$$

переводится на односвязную область D на плоскости переменного $z = y_1 + iy_2$. Тогда окружности $\rho = \text{const}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ соответствует некоторая простая замкнутая кривая (расположенная внутри D), которую как и прежде будем обозначать Γ . При этом в качестве Γ уместно взять полярный угол θ .

В таком случае, учитывая, что $\chi(\tau) = \rho |\omega'(\rho e^{i\tau})|$ — коэффициент изменения линейных размеров, получаем вместо (2.1)

$$v(\gamma; \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(\tau)\chi(\tau)d\tau}{\sqrt{(x_1 - \operatorname{Re}\omega(\rho e^{i\tau}))^2 + (x_2 - \operatorname{Im}\omega(\rho e^{i\tau}))^2 + x_3^2}}. \quad (5.1)$$

Квадрат расстояния между точкой с локальными координатами (θ, n, x_3) и точкой на контуре с координатой τ , вспоминая обозначения разд. 4., запишем в виде

$$R_r(\theta, \tau)^2 = R_0(\theta, \tau)^2 + r^2 - r \cos \varphi \left\{ \left[\omega(\rho e^{i\theta}) - \omega(\rho e^{i\tau}) \right] \frac{e^{-i\theta} \overline{\omega'(\rho e^{i\theta})}}{|\omega'(\rho e^{i\theta})|} + \left[\overline{\omega(\rho e^{i\theta})} - \overline{\omega(\rho e^{i\tau})} \right] \frac{e^{i\theta} \omega'(\rho e^{i\theta})}{|\omega'(\rho e^{i\theta})|} \right\} \quad (5.2)$$

Здесь $R_0(\theta, \tau) = |\omega(\rho e^{i\theta}) - \omega(\rho e^{i\tau})|$ — расстояние между двумя точками, принадлежащими Γ .

Поскольку при $\tau \rightarrow 0$

$$R_0(\theta, \tau)^2 = 4\rho^2 |\omega'(\rho e^{i\theta})|^2 \sin^2[(\theta - \tau)/2] \{1 + O(|\omega''(\rho e^{i\theta})/\omega'(\rho e^{i\theta})|(\theta - \tau))\}$$

то справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{\chi(\tau)d\tau}{\sqrt{R_0(\theta, \tau)^2 + r^2}} - \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{(\theta - \tau)^2 + (r/\chi(\theta))^2}} \right| \leq \text{const}$$

С другой стороны, благодаря тому, что выражение, стоящее в фигурных скобках в (5.2), есть величина $O(\chi(\theta)^2 k_m (\theta - \tau)^2)$ при $\tau \rightarrow \theta$, имеет место оценка

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{\chi(\tau) d\tau}{R_r(\theta, \tau)} - \int_{\Gamma} \frac{\chi(\tau) d\tau}{\sqrt{R_0(\theta, \tau)^2 + r^2}} \right| \leq \text{const} \left| r k_m \ln \frac{r}{\chi(\theta)} \right|, \quad r \rightarrow 0$$

$$k_m = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} k(\theta), \quad k(\theta) = \frac{1}{\chi(\theta)} \left\{ 1 + \text{Re} \frac{\rho e^{i\theta} \omega''(\rho e^{i\theta})}{\omega'(\rho e^{i\theta})} \right\}$$

Приведенные соображения позволяют опустить громоздкие выкладки и выписать итоговую формулу – асимптотику функции (5.1):

$$v(\gamma; \theta, r, \varphi) = \pi^{-1} \gamma(\theta) \{ \ln[r / (2\pi\chi(\theta))] - J_1^0(\theta) \} - \pi^{-1} (J_1 \gamma)(\theta) + o(1), \quad r \rightarrow 0$$

$$J_1^0(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \left(\frac{\chi(\tau)}{R_0(\theta, \tau)} - \frac{1}{|\theta - \tau|} \right) d\tau, \quad (J_1 \gamma)(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\tau) - \gamma(\theta)}{R_0(\theta, \tau)} \chi(\tau) d\tau$$

Введем интегральные операторы

$$(J\gamma)(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\tau) - \gamma(\theta)}{2|\sin[(\tau - \theta)/2]} d\tau, \quad (k_1 \gamma)(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} K_1(\theta, \tau) \gamma(\tau) d\tau \quad (5.3)$$

$$K_1(\theta, \tau) = \chi(\tau) R_0(\theta, \tau)^{-1} - 2^{-1} |\sin[(\tau - \theta)/2]|^{-1}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \left(\frac{1}{2|\sin[(\tau - \theta)/2]} - \frac{1}{|\theta - \tau|} \right) d\tau = 2 \ln 2 - \ln \pi \quad (5.4)$$

уравнению для плотности γ придаем такой вид:

$$\gamma(\theta) \{ |\ln \varepsilon| + 4 \ln 2 + \ln[\chi(\theta) H(\theta)^{-1}] \} + (J\gamma)(\theta) + (k_1 \gamma)(\theta) = \pi \delta(\theta) \quad (5.5)$$

Пример. Функция Жуковского $R_1^{-1} z = 2^{-1}(\zeta + \zeta^{-1})$ внешность единичного круга переводит на плоскость с прямолинейным разрезом. Окружности радиуса $\rho > 1$ соответствует на плоскости z эллипс с полуосями $R_1(\rho + \rho^{-1})/2$, $R_1(\rho - \rho^{-1})/2$ и эксцентриситетом $e = 2/(\rho + \rho^{-1})$.
Имеем

$$\begin{aligned} |\omega'(\rho e^{i\tau})| &= 2^{-1} R_1 (1 + \rho^{-2}) (1 - e^2 \cos^2 \tau)^{1/2} \\ R_0(\theta, \tau) &= R_1 \rho (1 + \rho^{-2}) |\sin[(\tau - \theta)/2]| (1 - e^2 \cos^2[(\theta + \tau)/2])^{1/2} \\ K_1(\theta, \tau) &= 1/2^{-1} \text{sign}(\theta - \tau) e^2 \sin[(\theta + 3\tau)/2] \times \\ &\times \{ 1 - e^2 \cos^2[(\theta + \tau)/2] + (1 - e^2 \cos^2[(\theta + \tau)/2])^{1/2} (1 - e^2 \cos^2 \tau)^{1/2} \}^{-1} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Предположим теперь, что кривая Γ звездная относительно начала координат. Тогда ее можно параметризовать, используя полярный угол $y_1 = \rho(\theta) \cos \theta$, $y_2 = \rho(\theta) \sin \theta$; при этом

$$R_0(\theta, \tau)^2 = (\rho(\theta) - \rho(\tau))^2 + 4\rho(\theta)\rho(\tau) \sin^2[(\theta - \tau)/2]$$

Сделаем замену переменной в формулах (3.8). Учитывая, что элемент длины ds равен $\xi(\tau) d\tau$, где $\xi(\tau) = (\rho'(\tau)^2 + \rho(\tau)^2)^{1/2}$, а длина дуги выражается интегралом, нахо-

дим

$$(J\gamma)(S(\theta)) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\tau) - \gamma(\theta)}{R_0(\theta, \tau)} \xi(\tau) d\tau \equiv (J_3\gamma)(\theta)$$

$$J^0(S(\theta)) = J_3^0(\theta) + \ln \xi(\theta) + \ln(\pi/l)$$

$$S(\theta) = \int_0^\theta \xi(\tau) d\tau, \quad J_3^0(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta-\tau}^{\theta+\tau} \left(\frac{\xi(\tau)}{R_0(\theta, \tau)} - \frac{1}{|\theta - \tau|} \right) d\tau$$

Соответственно уравнение (4.10) приобретает вид

$$\gamma(\theta) \{ |\ln \varepsilon| + 2 \ln 2 + \ln[\pi(\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2)^{1/2} H(s)^{-1}] + J_3^0(\theta) \} + (J_3\gamma)(\theta) = \pi\delta(\theta) \quad (5.7)$$

Введем интегральный оператор

$$(k_3\gamma)(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} K_3(\theta, \tau) \gamma(\tau) d\tau, \quad K_3(\theta, \tau) = \frac{\xi(\tau)}{R_0(\theta, \tau)} - \frac{1}{2|\sin[(\theta - \tau)/2]|}$$

Вспомогая, что оператор J определен первой формулой (5.3), перепишем (5.7) в окончательной форме

$$\gamma(\theta) \{ |\ln \varepsilon| + 4 \ln 2 + \ln[\xi(\theta)H(\theta)^{-1}] \} + (J\gamma)(\theta) + (k_3\gamma)(\theta) = \pi\delta(\theta) \quad (5.8)$$

6. Свойства оператора J и приближенное решение интегрального уравнения на Γ . Свойства оператора J в полной мере изучены [22–24]. В частности, непосредственным интегрированием проверяется справедливость равенств

$$(J\varphi_{\pm k})(\theta) = -\lambda_k \varphi_{\pm k}(\theta) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\varphi_{\pm k}(\theta) = \cos k\theta \pm i \sin k\theta, \quad \lambda_k = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1} \quad (6.1)$$

причем в соответствии с формулой (0.132) [31]

$$0 < \lambda_k - (\ln k + 2 \ln 2 + C) \leq 1/(24k^2) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6.2)$$

($C = 0,577\dots$ – постоянная Эйлера).

На простом примере покажем трудности, возникающие при построении решения уравнений (4.10), (4.11) (5.5), (5.7), (5.8).

Рассмотрим случай кольцевого штампа постоянной толщины $2h(\varepsilon) = 2\varepsilon R$, когда контур Γ совпадает с окружностью радиусом R . Разрешающее уравнение при этом имеет вид (см. разд. 5)

$$\gamma(\theta) (|\ln \varepsilon| + 4 \ln 2) + (J\gamma)(\theta) = \pi\delta(\theta) \quad (6.3)$$

Пусть правая часть в (6.3) представлена рядом Фурье

$$\delta(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \quad (6.4)$$

Решение попробуем искать также в виде ряда

$$\gamma(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad (6.5)$$

Подставляя (6.4), (6.5) в (6.3) и учитывая (6.1), получим

$$a_0 = \frac{\pi A_0}{|\ln \varepsilon| + 4 \ln 2}, \quad \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases} = \frac{1}{|\ln \varepsilon| + 4 \ln 2 - \lambda_k} \begin{cases} A_k \\ B_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6.6)$$

Видно, что решение уравнения (6.3) существует не при всех малых значениях ε .

Действительно, при $\varepsilon = \varepsilon_k = 16\text{exr}(-\lambda_k)$ обращается в нуль знаменатель во второй формуле (6.6). При этом в силу (6.2) $\{\varepsilon_k\}$ – бесконечно малая последовательность. Однако, если $\delta(\theta)$ – тригонометрический полином степени m , то функция γ определена при всех положительных значениях ε , меньших ε_m , и также оказывается тригонометрическим полиномом.

Подчеркнем, что результаты асимптотического анализа должны иметь силу при непрерывном изменении параметра ε в пределах $(0, \varepsilon_0)$, где ε_0 – некоторое фиксированное число. В данной ситуации этого нельзя добиться в общем случае, если поставить условие полного удовлетворения разрешающего уравнения. Напомним, что во всех предыдущих выкладках удерживались только члены $O(1)$ и $O(|\ln \varepsilon|)$, в то время как отбрасывались те, которые с уменьшением параметра ε стремились к нулю. Вследствие этого нет нужды и в точном решении итогового уравнения.

Обратимся к случаю (6.4) и будем считать, что функция δ непрерывно дифференцируема на Γ , а также имеет ограниченную вторую производную.

Замечание 6.1. Если подошва штампа в некотором месте имеет "излом" (т.е. нарушено первое предположение относительно функции δ), то приведенные асимптотические построения теряют смысл по той причине, что в окрестности излома напряженное состояние полупространства будет трехмерным и, разумеется, не описывается плоским пограничным слоем.

С другой стороны, вторая производная функции δ не может принимать больших значений, потому что кривизна подошвы штампа не должна быть слишком велика. В противном случае вступаем в противоречие с предположением, что контакт должен осуществляться по всему множеству $\Gamma(\varepsilon)$.

Пусть $|\delta''(\theta)| \leq C^{(2)}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Тогда для каждого малого $\varepsilon > 0$ тригонометрический полином

$$\gamma_\varepsilon(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad N_\varepsilon = [\varepsilon^{-1}] + 1 \quad (6.7)$$

в котором коэффициенты определяются формулами (6.6), а квадратными скобками обозначена целая часть, оставляет в уравнении (6.3) невязку порядка ε . Действительно, в силу

$$\begin{Bmatrix} A_k \\ B_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta) \begin{Bmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{Bmatrix} d\theta = -\frac{1}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} \delta(\theta)'' \begin{Bmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{Bmatrix} d\theta$$

невязка, оставляемая γ_ε в (6.3), может быть оценена так:

$$\begin{aligned} \left| \pi \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \right| &\leq \sqrt{2} C^{(2)} \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \\ &\leq \sqrt{2} C^{(2)} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} - \sum_{k=2}^{N_\varepsilon} \frac{1}{k^2-1} \right) = \sqrt{2} C^{(2)} \frac{2N_\varepsilon+1}{2N_\varepsilon(N_\varepsilon+1)} \leq \frac{\sqrt{2} C^{(2)}}{N_\varepsilon} \end{aligned}$$

Выше использованы формулы (0.237.3) и (0.133) из [37].

Таким образом, принимая во внимание неравенство $1/N_\varepsilon \leq \varepsilon$, заключаем, что

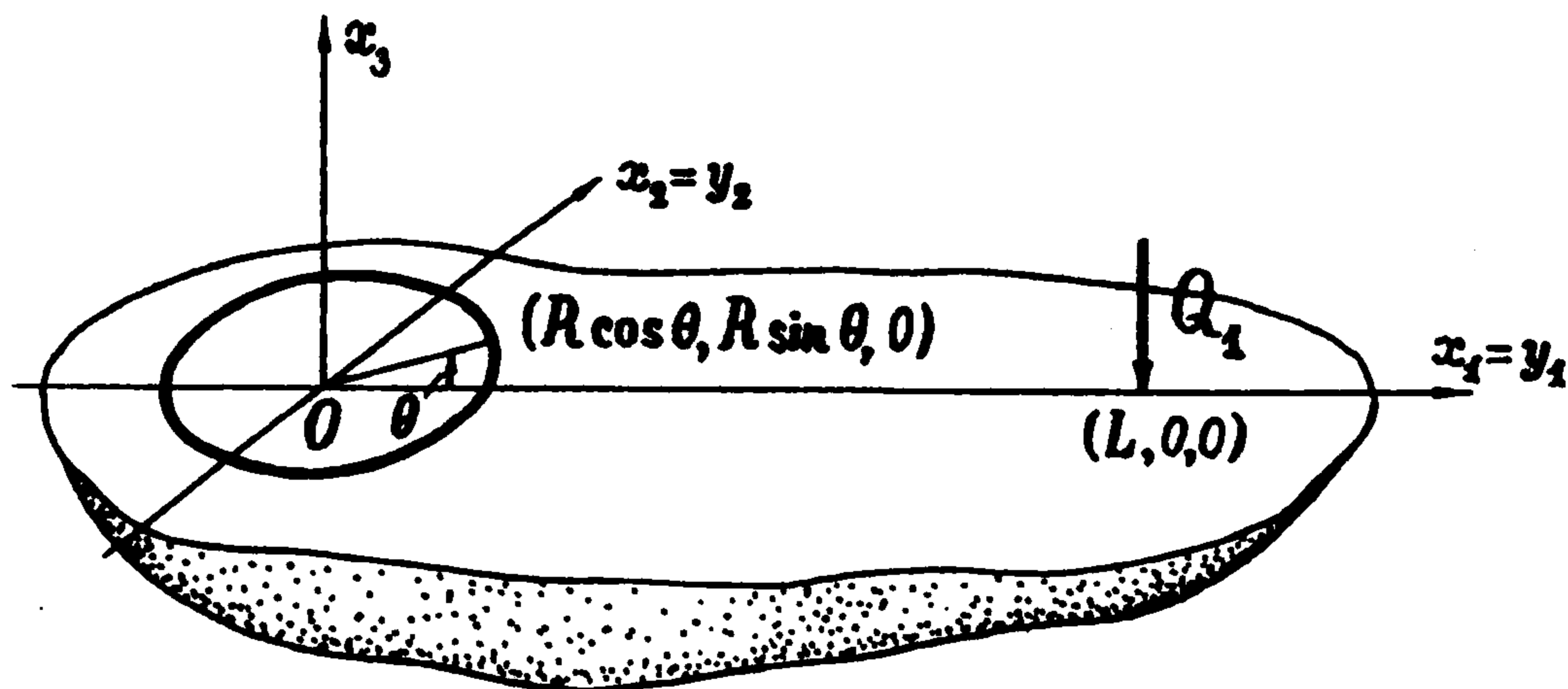
$$\max_{\theta \in [0, 2\pi)} |\gamma_\varepsilon(\theta)(|\ln \varepsilon| + 4 \ln 2) + (J\gamma_\varepsilon)(\theta) - \pi\delta(\theta)| \leq \sqrt{2} C^{(2)} \varepsilon \quad (6.8)$$

Функция (6.7) не удовлетворяет уравнению (6.3), но вследствие малости ее невязки в этом уравнении (см. (6.8)) она пригодна для построения асимптотики краевой задачи (1.2).

7. Примеры. 1°. Кольцевой штамп с плоским основанием. Интенсивность контактного давления, рассчитанного на единицу длины срединной окружности радиуса R , в главном удовлетворяет уравнению

$$P(\theta) \left(\left| \ln \frac{h}{R} \right| + 4 \ln 2 \right) + (JP)(\theta) = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} (\delta_0 + \beta_2 R \cos \theta - \beta_1 R \sin \theta) \quad (7.1)$$

Здесь h – полуширина кольца, δ_0 – поступательное перемещение, β_1 и β_2 – углы поворота штампа относительно осей y_1 и y_2 соответственно.



Фиг. 1

Если штамп вдавливаются без перекосов (осесимметричная задача), то сила, действующая на штамп, связана с его перемещением зависимостью

$$Q = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{2\pi R \delta_0}{\ln(R/h) + 4 \ln 2} \quad (7.2)$$

Выражение, определяемое формулой (7.2), по существу совпадает с главным членом асимптотики для Q , построенной ранее [5] (ср. (7.2) с (0.2)).

Согласно (6.6) решение уравнения (7.1) имеет вид

$$P(\theta) = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{\delta_0}{\Lambda} + \frac{R}{\Lambda-2} (\beta_2 \cos \theta - \beta_1 \sin \theta) \right], \quad \Lambda = \ln \left(16 \frac{r}{h} \right)$$

Если (как это обычно и бывает) вместо δ_0 и β_1, β_2 известны величина Q силы, прижимающей штамп, и координаты точки ее приложения (y_1^*, y_2^*) , то в добавление к (7.2) из уравнений равновесия штампа выводим

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{\Lambda-2}{\pi R^3} \begin{Bmatrix} -y_2^* \\ y_1^* \end{Bmatrix}$$

Заметим, что условие (4.3) будет нарушено, если $(y_1^*/R)^2 + (y_2^*/R)^2 \geq 1/2$. В таком случае сталкиваемся с задачей с неизвестной областью контакта, которая значительно сложнее рассматриваемой (линейной) задачи.

Приведем выражения для сил и моментов, действующих на неплоский кольцевой штамп

$$Q = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{R}{\Lambda} \int_0^{2\pi} \delta(\theta) d\theta$$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ -M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{Bmatrix} Q = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{R^2}{\Lambda-2} \int_0^{2\pi} \delta(\theta) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta$$

2°. *Влияние нагрузки, действующей вне штампа.* Вертикальные смещения границы полупространства в задаче Буссинеска (см., например, [27]) в точках, лежащих на окружности радиусом R (фиг. 1) запишем так:

$$-\frac{\pi E}{1-\nu^2} \frac{L}{Q_1} u_3(Q_1; \theta) = \frac{1}{\sqrt{1-2\cos\theta+k^2}} = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\theta \quad (7.3)$$

$$A_0 = \pi^{-1} K(k), \quad A_1 = 4(\pi k)^{-1} [K(k) - E(k)] \quad (7.4)$$

$$A_m = 2 \left(\frac{k}{2}\right)^{m-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} \cdot \frac{(2n+2m-3)!!}{(n+m-1)!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2n} \quad (m=2,3,\dots) \quad (7.5)$$

Здесь $k = R/L$, а расстояние от точки приложения сосредоточенной силы Q_1 до центра окружности обозначено через L ; K и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Формулы (7.4) соответствуют (3.674.1), (3.674.3) справочника [31], а (7.5) получается из (9.112) [31].

Если штамп вдавлируется так, что его основание считается параллельным плоскости $x_3 = 0$, то погонное давление в главном должно удовлетворять уравнению

$$P(\theta)\Lambda + (JP)(\theta) = \pi E [2(1-\nu^2)]^{-1} (\delta_0 + u_3(Q_1; \theta)) \quad (7.6)$$

решение которого дается формулами (6.5)–(6.7) с той лишь разницей, что для практических нужд в сумме (6.7) достаточно удержать только несколько первых слагаемых, поскольку правая часть (7.6) бесконечно дифференцируема.

Для осуществления такого поступательного перемещения штампа к нему необходимо приложить силу

$$Q = \frac{1}{\Lambda} \left[\frac{\pi^2 E}{1-\nu^2} R \delta_0 - 2kK(k)Q_1 \right] \quad (7.7)$$

с эксцентриситетом

$$\frac{y_1^*}{R} = -\frac{\Lambda}{\Lambda - 2\pi^2 E [2(1-\nu^2)]^{-1} R \delta_0 - kK(k)Q_1} [K(k) - E(k)] Q_1$$

Если же положение прижимающей штамп силы фиксировать (к примеру, считая, что ось ее действия проходит через центр штампа), то результирующее смещение штампа будет включать в себя еще и некоторый поворот. Тогда для плотности P имеем уравнение

$$P(\theta)\Lambda + (JP)(\theta) = \pi E [2(1-\nu^2)]^{-1} (\delta_0 + \beta_2 R \cos\theta + u_3(Q_1; \theta))$$

решение которого также отыскивается по формулам (6.5)–(6.7). При этом величина осадки штампа δ_0 находится из (7.7) по известному значению силы Q , а поворот штампа β_2 определяется из условия равенства нулю главного момента действующих на штамп нагрузок относительно оси y_2 (пересекающей линию действия силы Q) и равен

$$\beta_2 = \frac{4(1-\nu^2)Q}{\pi^2 ER^2} [K(k) - E(k)] \quad (7.8)$$

3°. *Логарифмическая асимптотика.* Согласно (5.5), (5.6) погонное давление под штампом, представляющим собой в плане узкое криволинейное кольцо постоянной толщины $2h$, срединную линию которого образует эллипс с эксцентриситетом e и большей полуосью a , отыскивается из уравнения

$$P(\theta) \left[\Lambda + \frac{1}{2} \ln(1 - e^2 \cos^2 \theta) \right] + (JP)(\theta) + (k_1 P)(\theta) = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \delta(\theta), \quad \Lambda = \ln \frac{16a}{h} \quad (7.9)$$

Это уравнение (как, впрочем, и уравнения, возникшее ранее) содержит большой параметр, поэтому его решение можно разложить в асимптотический ряд по обратным сте-

пеням Λ :

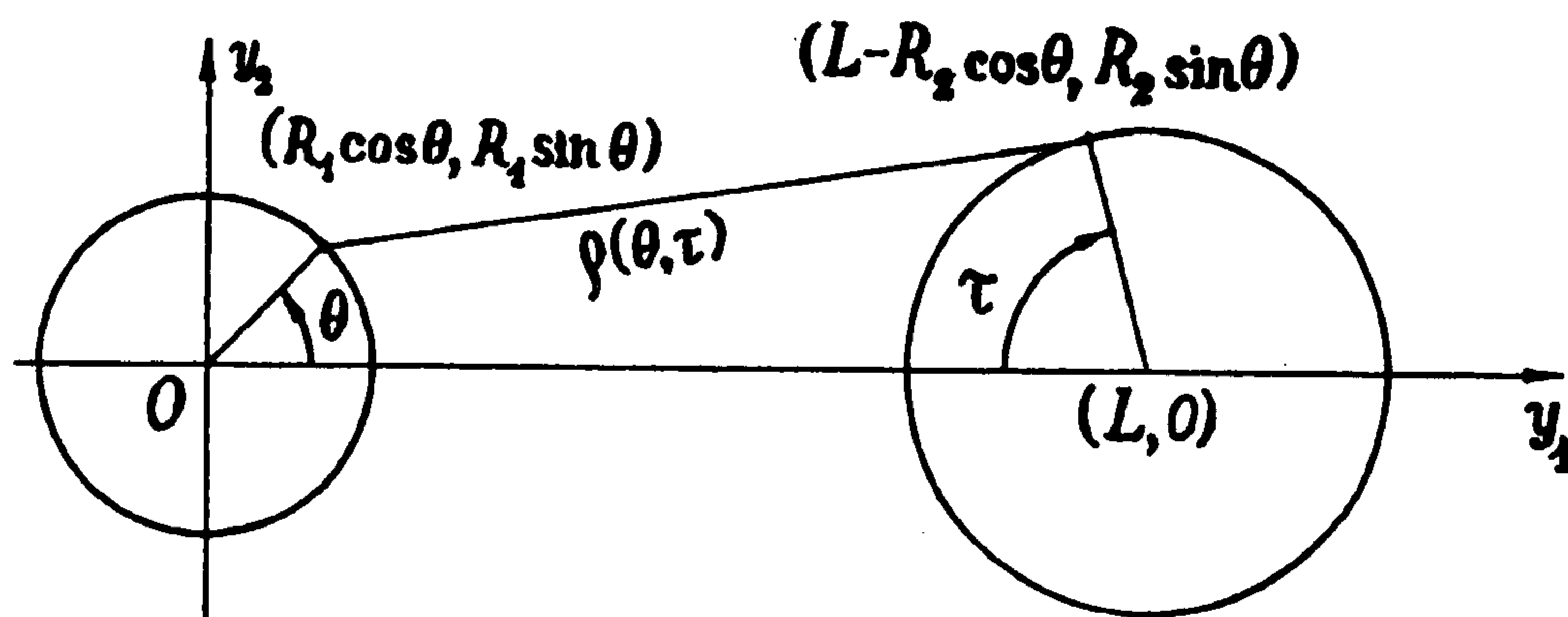
$$P(\theta) \sim \Lambda^{-1} P_1(\theta) + \Lambda^{-2} P_2(\theta) + \dots \quad (7.10)$$

$$P_1(\theta) = \pi E [2(1 - \nu^2)]^{-1} \delta(\theta) \quad (7.11)$$

$$P_2(\theta) = -\pi E [2(1 - \nu^2)]^{-1} \{2^{-1} \delta(\theta) \ln(1 - e^2 \cos^2 \theta) + (JP_j)(\theta) + (k_1 \delta)(\theta)\} \quad (7.12)$$

$$P_{j+1}(\theta) = -2^{-1} P_j(\theta) \ln(1 - e^2 \cos^2 \theta) - (JP_j)(\theta) - (k_1 P_j)(\theta) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (7.13)$$

Используя два первых члена (7.11), (7.12) разложения (7.10), уже можно получить качественно правильную картину распределения контактного давления, а для достаточно узкого штампа и вполне пригодные в практических расчетах численные результаты.



Фиг. 2

Если эксцентриситет эллипса мал, то правая часть (7.12) в свою очередь может быть разложена в степенной ряд по e^2 . Так, для штампа с плоским горизонтальным основанием

$$P(\theta) = \frac{\pi E}{2(1 - \nu^2)} \frac{\delta_0}{\Lambda} \left[1 + \frac{e^2(1 + \cos^2 \theta)}{6\Lambda} + O\left(\frac{e^4}{\Lambda}\right) \right] \quad (7.14)$$

Как и следовало ожидать, максимумы погонного давления (7.14) приходятся на точки наибольшей кривизны срединной линии.

4°. *Взаимодействие кольцевых штампов.* Аналогично тому как это сделано в разд. 2–4 (см. также [18]), нетрудно вывести и разрешающие уравнения для погонных давлений в случае системы штампов, когда контакт осуществляется по нескольким узким областям.

К примеру, система уравнений, описывающая взаимодействие двух кольцевых штампов с плоскими основаниями, выглядит так:

$$P^{(1)}(\theta) \ln \frac{16R_1}{h_1} + (JP^{(1)})(\theta) = \frac{\pi E}{2(1 - \nu^2)} (\delta_0^{(1)} + \beta_2^{(1)} R_1 \cos \theta - \beta_1^{(1)} R_1 \sin \theta) - \frac{k_2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \tau)^{-1} P^{(2)}(\tau) d\tau \quad (7.15)$$

$$P^{(2)}(\tau) \ln \frac{16R_2}{h_2} + (JP^{(2)})(\tau) = \frac{\pi E}{2(1 - \nu^2)} (\delta_0^{(2)} + \beta_2^{(2)} R_2 \cos \tau - \beta_1^{(2)} R_2 \sin \tau) - \frac{k_1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \tau)^{-1} P^{(1)}(\theta) d\theta \quad (7.16)$$

$$\rho(\theta, \tau)^2 = 1 + (k_1 - k_2)^2 - 2(k_1 \cos \theta + k_2 \cos \tau) + 4k_1 k_2 \cos^2 [(\theta + \tau)/2]$$

(обозначения см. на фиг. 2), $k_1 = R_1/L$, $k_2 = R_2/L$.

Приближенное решение задачи для системы удаленных друг от друга штампов можно построить на основе результатов п. 2° этого раздела, воспользовавшись идеей, предложенной ранее [32], § 7. А именно, выделяя какой-нибудь штамп, контактное давление под ним определим в предположении, что воздействие оставшегося штампа на полупространство

заменено действием сосредоточенной силы, приложенной в центре его срединной окружности. Причем согласно (7.7) приближенные выражения для сил, действующих на штампы, определяются из системы уравнений (круговая замена индексов 1 и 2)

$$Q_1 + \frac{2k_1 K(k_1)}{\ln(16R_1/h_1)} Q_2 = \frac{\pi^2 E}{1-\nu^2} \frac{R_1 \delta_0^{(1)}}{\ln(16R_1/h_1)} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

Если же геометрические характеристики оснований штампов совпадают и при этом $\delta_0^{(1)} = \delta_0^{(2)}$, $\beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)}$, $\beta_2^{(1)} = -\beta_2^{(2)}$, то $P^{(1)} = P^{(2)}$, а уравнения (7.15), (7.16) сводятся к одному:

$$P(\theta) \ln(16R/h) + (JP)(\theta) + \frac{k}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ 1 - 2 \left[2k \cos \frac{\theta+\tau}{2} \right] \cos \frac{\theta-\tau}{2} + \left[2k \cos \frac{\theta+\tau}{2} \right]^2 \right\}^{-1/2} P(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} (\delta_0 + \beta_2 R \cos \theta - \beta_1 R \sin \theta)$$

В этом частном случае, когда априори известны прижимающие штампы силы $Q_1 = Q_2$, линии действия которых проходят через центры штампов, формула (7.8) дает приближенное выражение для величины угла, на который штампы наклонятся друг к другу.

Осесимметричная задача для узких кольцевых штампов в главном попросту сводится к системе линейных алгебраических уравнений, связывающих силы, действующие на штампы, с перемещениями штампов.

5°. *Решение обратной задачи.* Остановимся на вопросе определения толщины штампа по известным значениям осадки и погонного давления (ср. [18]).

В частности, если $\delta(\theta) \equiv \delta_0$ и $P(\theta) \equiv P_0$, то (см. разд. 5)

$$h(\theta) = 16\rho \left| \omega'(r e^{i\theta}) \right| \exp \left\{ -\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{\delta_0}{P_0} + (k_1 1)(\theta) \right\}$$

$$(k_1 1)(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} K_1(\theta, \tau) d\tau$$

В общем случае решение этой задачи также сводится к механическим квадратурам.

8. Заключительные замечания. Во-первых, процесс построения асимптотики нетрудно продолжить; необходимая для этого база подготовлена работами [19–22].

Далее, асимптотические представления решений, выписанные в предыдущих разделах, носят, вообще говоря, формальный характер и потому не могут служить обоснованием гипотезы Галина – требуется точно охарактеризовать погрешности. Так как четное продолжение решения задачи (1.2) с \mathbf{R}_+^3 на $\mathbf{R}^3 \setminus \{x \in \mathbf{R}^3: s \in [0, 2l), -\varepsilon H(s) < n < \varepsilon H(s), x_3 = 0\}$ приводит к уже изученной задаче, то в части обоснования можно сослаться на результаты работ [22–24], где остатки в асимптотических формулах оценены в различных метриках. В частности, выписаны оценки отклонений по модулю и в "энергетической" норме. Из-за наличия особенностей (у кромок штампа) при рассмотрении производных высших порядков требуется переход к весовым нормам – соответствующие неравенства также имеются в [33].

Метод сращиваемых асимптотических разложений еще не нашел широкого применения в теории контактных задач (см. обзор [34], а также работу [35]). Разумеется, представленная здесь форма штампа не единственная, для которой этот метод эффективен. С его помощью можно, например, исследовать задачу о штампе с подошвой, образованной удалением из плоской области одной или нескольких удаленных друг от друга малых зон. Подчеркнем, что эта задача значительно проще, чем (1.1) или (1.2), так как в ней (в соответствии с классификацией [33]) сингулярное возмущение границы локально (концентрируется в малых окрестностях изолированных точек), а в (1.2) – нелокально ("размазано" вдоль кривой).

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. О гипотезе Циммермана–Винклера для балок // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 4. С. 293–300.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
3. Егоров К.Е. К вопросу расчета основания под фундаментом с подошвой кольцевой формы // Механика грунтов: Сб. Тр. НИИ оснований и подземных сооружений. 1958. № 34. С. 34–57.
4. Егоров К.Е. Вдавливание в полупространство штампа с плоской подошвой кольцевой формы // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 5. С. 187–190.
5. Александров В.М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство // Инж. ж. МГТ. 1967. № 4. С. 108–116.
6. Попов Г.Я. Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе // Изв. АН АрмССР. Механика. 1967. Т. 20. № 2. С. 19–36.
7. Александров В.М., Соловьев А.С. Некоторые смешанные задачи теории упругости // Изв. АН СССР. МГТ. 1969. № 5. С. 120–130.
8. Александров В.М. Контактные задачи для полупространства. Сложные в плане области контакта // Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. С. 200–206.
9. Бородачев Н.М., Галин Л.А. Контактная задача для штампа с основанием в виде узкого прямоугольника // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 1. С. 125–130.
10. Александров В.М., Сумбатян М.А. Асимптотическое решение интегральных уравнений типа сверки с логарифмической особенностью трансформанты ядра и приложение в задачах механики // Изв. АН СССР. МГТ. 1980. № 2. С. 80–88.
11. Валов Г.М. О действии кольцевых штампов на упругое полупространство // Изв. АН СССР. МГТ. 1972. № 1. С. 143–149.
12. Андрейкив А.Е., Панасюк В.В. Смешанная задача теории упругости для полупространства с круговыми линиями раздела краевых условий // Изв. АН СССР. МГТ. 1972. № 3. С. 26–32.
13. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир. 1989. 510 с.
14. Kalker J.J. On elastic line contact // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1972. V. 39. № 4. P. 1125–1132.
15. Kalker J.J. The surface displacement of an elastic half-space loaded in a slender, bounded, curved surface region with application to the calculation of the contact pressure under a roller // J. Inst. Math. and its Applic. 1977. V. 19. № 2. P. 127–144.
16. Nayak L., Johnson K.L. Pressure between elastic bodies having a slender area of contact and arbitrary profiles // Intern. J. Mech. Sci. 1979. V. 21. № 4. P. 237–247.
17. Бурмистров А.Н. О давлении вытянутого штампа на упругое полупространство // Трение и износ. 1988. Т. 9 № 3. С. 454–462.
18. Tuck E.O., Mei C.C. Contact of one or more slender bodies with an elastic half-space // Intern. J. Solids and Struct. 1983. V. 19. № 1. P. 1–23.
19. Федорюк М.В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам мат. физики: Тр. семинара С.Л. Соболева. 1980. Т. 1. С. 113–131.
20. Федорюк М.В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45. № 1. С. 167–186.
21. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 1. С. 37–39.
22. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Асимптотика решений задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 2. С. 187–217.
23. Назаров С.А., Паукшто М.В. Дискретные задачи осреднения в задачах теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 93 с.
24. Назаров С.А. Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением // Тр. Моск. мат. о-ва. 1990. Т. 53. С. 98–129.
25. Зорин И.С., Назаров С.А. Асимптотика напряженно-деформированного состояния упру-

- гого пространства с жестким тороидальным включением // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 6. С. 1340–1343.
26. Назаров С.А., Полякова О.Р. Разрушение узкой перемычки между трещинами, лежащими в одной плоскости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 157–165.
27. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
28. Ван-Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
29. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
30. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
31. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
32. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
33. Mazja W.G., Nazarov S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 430 S.
34. Александров В.М. Асимптотические методы в смешанных задачах теории упругости // Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. С. 96–100.
35. Александров В.М. Асимптотические методы в задачах механики сплошной среды со смешанными граничными условиями // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 102–108.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
7.II.1995