УДК 539.3

©1996 г. А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский

# РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЕ РЕАКЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Определяются результирующие контактные силы и моменты для начального этапа взаимодействия абсолютно жесткого гладкого выпуклого ударника с анизотропным упругим полупространством в рамках пространственной нестационарной задачи в отличие от ранее рассмотренного случая вертикального погружения [1].

Различные аспекты взаимодействия гладкого выпуклого ударника с упругим полупространством на начальном этапе для изотропной среды рассмотрены в [2–6].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим однородное анизотропное упругое полупространство, ограниченное плоскостью $x_3 = 0$. В прямоугольной декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ (ось $x_3$ направлена в глубь полупространства) в рамках линейной теории упругости его движение определяется следующими уравнениями ($i, j, k, m = 1, 2, 3$):

$$c_{kmij}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_i} = \gamma^2 \ddot{u}_m, \quad \sigma_{km} = c_{kmij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad \gamma^2 = \frac{\rho}{\rho_*} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u} = u_j\mathbf{e}_j$ – вектор перемещений, $\mathbf{e}_j$ – базисные векторы, $\sigma_{km}$ и $c_{kmij}$ – компоненты тензоров напряжений и упругих постоянных, $\rho$ – плотность среды, точками обозначено дифференцирование по времени $\tau$. По повторяющимся латинским индексам в (1.1) и далее проводится суммирование в пределах от 1 до 3. В этих формулах, как и во всей работе, используются безразмерные величины со следующими единицами измерения: длина – $L_*$, время – $L_*/c_*$, масса – $\rho_* L_*^3$, где $L_*$, $c_*$ и $\rho_*$ – некоторые характерные длина, скорость и плотность.

На границе $x_3 = 0$ заданы возмущения одного из двух типов:

$$u_j\big|_{x_3=0} = w_j(x_1, x_2) \in \Omega, \quad \sigma_{j3}\big|_{x_3=0} = 0(x_1, x_2) \notin \Omega \tag{1.2}$$

или

$$u_3\big|_{x_3=0} = w_3(x_1, x_2) \in \Omega, \quad \sigma_{33}\big|_{x_3=0} = 0(x_1, x_2) \notin \Omega \tag{1.3}$$

$$\sigma_{13}\big|_{x_3=0} = \sigma_{23}\big|_{x_3=0} = 0$$

На бесконечности решения полагаются ограниченными, а начальные условия соответствуют состоянию покоя:

$$\mathbf{u}\big|_{\tau=0} = \dot{\mathbf{u}}\big|_{\tau=0} = 0 \tag{1.4}$$

В линеаризованной постановке контактной задачи $\Omega$ – плоская область контакта, полученная снесением на невозмущенную границу полупространства поверхности контакта упругой среды и ударника. При этом (1.2) соответствуют условиям жесткого сцепления, а (1.3) – условиям свободного проскальзывания. Для абсолютно жесткого ударника функции $w_j$ определяются так:

$$w_j = (\mathbf{u}_C + \mathbf{r}_1,\ \mathbf{e}_j), \quad \mathbf{u}_C = \mathbf{u}_{Cj}\mathbf{e}_j \tag{1.5}$$

где $\mathbf{u}_C$ – вектор перемещения центра масс ударника, $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор поверхности П, ограничивающей ударник, в связанной системе координат.

Движение ударника описывается известной начальной задачей для абсолютно жесткого тела, которая приведена, например, в [5]. При этом скорость движения точек граничной поверхности П находится следующим образом:

$$\mathbf{v}_1\dot{\mathbf{u}}_C = [\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{r}_1], \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_i \tag{1.6}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения ударника.

Связанность контактной задачи определяется наличием в уравнениях движения ударника результирующих силы $\mathbf{R}$ и момента $\mathbf{M}$ контактных напряжений $\sigma_{j0} = \sigma_{j3}\Big|_{x_3=0}$. Контактные сила и момент в линейной постановке вычисляются так:

$$\mathbf{R} = R_j\mathbf{e}_j = \iint\limits_{R^2} \sigma_{j0}\mathbf{e}_j dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega} S_{j3}\mathbf{e}_j dx_1 dx_2 \tag{1.7}$$

$$\mathbf{M} = M_j\mathbf{e}_j = \mathbf{M}_0 - [\mathbf{u}_C, \mathbf{R}]$$

$$\mathbf{M}_0 = M_{j0}\mathbf{e}_j = \iint\limits_{R^2}[\mathbf{r}_0,\ \sigma_{j0}\mathbf{e}_j]dx_1dx_2 = \iint\limits_{\Omega}[\mathbf{r}_0,\ S_{j3}\mathbf{e}_j]dx_1dx_2$$

$$\sigma_{j0}(x_1,\ x_2,\ \tau) = S_{j3}(x_1,\ x_2,\ \tau)H(D_\sigma), \quad \mathbf{r}_0 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

$$D_\sigma = \operatorname{supp}\sigma_{j0} = \{(x_1, x_2, \tau) \mid (x_1, x_2) \in \Omega, \tau \geq 0\}$$

Здесь $H(D_\sigma)$ – характеристическая функция множества $D_\sigma$. В случае граничных условия (1.3) $R_1 = R_2 = M_3 = 0$, а формулы для остальных компонент соответствующим образом упрощаются.

Соотношения (1.1), (1.5), (1.7), (1.2) или (1.3) совместно с условиями, определяющими область $\Omega$, и начальной задачей для ударника дают математическую постановку контактной задачи.

**2. Функции влияния.** Одним из возможных подходов к решению поставленной нестационарной контактной задачи является использование функций влияния для полупространства, которые определим следующим образом. Перемещения $u_n = G^1_{n,k}$ и напряжения $\sigma_{ln} = \Gamma^1_{ln,k}$, соответствующие граничным условиям

$$u_j\Big|_{x_3=0} = \delta(x_1,\ x_2)\delta(\tau)\delta_{kj} \tag{2.1}$$

назовем функциями влияния первого типа ($\delta$ – дельта-функция Дирака, $\delta_{kj}$ – символ Кронекера).

Аналогично перемещения $u_n = G^2_{n,k3}$ и напряжения $\sigma_{ln} = \Gamma^2_{ln,k3}$, определяемые граничными условиями

$$\sigma_{j3}\Big|_{x_3=0} = \delta(x_1,\ x_2)\delta(\tau)\delta_{kj} \tag{2.2}$$

назовем функциями влияния второго типа, а перемещения $u_n = G^3_{n,3}$ и напряжения $\sigma_{ln} = \Gamma^3_{ln,3}$ – функциями влияния третьего типа, если они соответствуют граничным условиям

$$u_3\big|_{x_3=0} = \delta(x_1,\ x_2)\delta(\tau),\ \ \sigma_{12}\big|_{x_3=0} = \sigma_{13}\big|_{x_3=0} = 0 \tag{2.3}$$

Тогда перемещения и напряжения в любой точке полупространства могут быть записаны в виде сверток функций влияния с соответствующими функциями, задающими граничные условия. В том числе на плоскости $x_3 = 0$ будем иметь ($G^{m0}_{n,k} = G^m_{n,k}\big|_{x_3=0}$, $\Gamma^{m0}_{ln,k} = \Gamma^m_{ln,k}\big|_{x_3=0}$; $m = 1,\ 2,\ 3$)

$$u_{n0} = u_n\big|_{x_3=0} = u_{k0} * G^{10}_{n,k},\quad \sigma_{n0} = u_{k0} * \Gamma^{10}_{3n,k} \tag{2.4}$$

$$u_{n0} = \sigma_{k0} * G^{20}_{nk},\quad \sigma_{n0} = \sigma_{k0} * \Gamma^{20}_{3n,k} \tag{2.5}$$

Здесь звездочкой обозначена свертка по трем переменным: $x_1, x_2$ и $\tau$. Соответствующие интегралы понимаются в смысле регуляризованного значения, так как входящие в (2.4) и (2.5) функции являются обобщенными.

Вторая группа сверток в (2.4) и первая в (2.5) – взаимно обратные операторы. Первые свертки в (2.5) могут быть использованы в качестве интегральных уравнений в контактных задачах (в случае свободного проскальзывания (1.3) $\sigma_{10} = \sigma_{20} = 0$). Пример такого подхода приведен, например, в [7]. Граничным условиям (2.3) отвечают свертки следующего вида:

$$u_{n0} = u_{30} * G^{30}_{n,3},\quad \sigma_{30} = u_{30} * \Gamma^{30}_{33,3} \tag{2.6}$$

Для нахождения функций влияния к задаче (1.1), (1.4) и (2.1) ((2.2) или (2.3)) применим интегральные преобразования Фурье по пространственным координатам $x_1$, $x_2$ (индекс $F$ указывает на изображение, $p_1$ и $p_2$ – параметры) и преобразование Лапласа по времени $\tau$ (индекс $L$ соответствует трансформанте, $s$ – параметр). Тогда уравнения (1.1) с учетом (1.4) в пространстве изображений можно записать в матричном виде

$$\mathbf{D}_2\mathbf{U}'' - i\sum_{m=1}^{2} p_m\mathbf{D}_{1m}\mathbf{U}' - \sum_{j,m=1}^{2} p_j p_m \mathbf{D}_{0jm}\mathbf{U} = \gamma^2 s^2 \mathbf{U}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}_2\mathbf{U}' - i\sum_{m=1}^{2} p_m\mathbf{A}_{0m}\mathbf{U},\quad \mathbf{S}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{U}' - i\sum_{m=1}^{2}\mathbf{B}_{0m}\mathbf{U} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}^0_2\mathbf{U}' + (\mathbf{E}_3 - i\sum_{m=1}^{2} p_m\mathbf{A}^0_{0m})\mathbf{U}$$

$$\mathbf{U} = \begin{Vmatrix} u_1^{FL} \\ u_2^{FL} \\ u_3^{FL} \end{Vmatrix},\quad \mathbf{S} = \begin{Vmatrix} \sigma_{13}^{FL} \\ \sigma_{23}^{FL} \\ \sigma_{33}^{FL} \end{Vmatrix},\quad \mathbf{S}_1 = \begin{Vmatrix} \sigma_{11}^{FL} \\ \sigma_{12}^{FL} \\ \sigma_{22}^{FL} \end{Vmatrix},\quad \mathbf{X} = \begin{Vmatrix} \sigma_{13}^{FL} \\ \sigma_{23}^{FL} \\ u_3^{FL} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3 = \|\delta_{k3}\delta_{l3}\|_{3\times 3},\quad \mathbf{E}^0 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_3,\quad \mathbf{D}^0_2 = \mathbf{E}^0\mathbf{D}_2,\quad \mathbf{A}^0_{0m} = \mathbf{E}^0\mathbf{A}_{0m}$$

Здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица, штрихом обозначено дифференцирование по координате

$x_3$, а матрицы $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_{1m}$, $\mathbf{D}_{0jm}$, $\mathbf{A}_{0m}$, $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_{0m}$ размерности $3 \times 3$ определяются упругими постоянными среды:

$$\mathbf{D}_2 = \|c_{m3n3}\|, \quad \mathbf{A}_{01} = \|c_{m3n1}\|, \quad \mathbf{A}_{02} = \|c_{m3n2}\|$$

$$\mathbf{D}_{011} = \|c_{m1n1}\|, \quad \mathbf{D}_{012} = \mathbf{D}_{021}^T = \|c_{m1n2}\|, \quad \mathbf{D}_{022} = \|c_{m2n2}\| \tag{2.8}$$

$$\mathbf{D}_{11} = \mathbf{A}_{01} + \mathbf{A}_{01}^T, \quad \mathbf{D}_{12} = \mathbf{A}_{02} + \mathbf{A}_{02}^T$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{Vmatrix} c_{1113} & c_{1123} & c_{1133} \\ c_{1213} & c_{1223} & c_{1233} \\ c_{2213} & c_{2223} & c_{2233} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B}_{0m} = \begin{Vmatrix} c_{111m} & c_{112m} & c_{113m} \\ c_{121m} & c_{122m} & c_{123m} \\ c_{221m} & c_{222m} & c_{223m} \end{Vmatrix}$$

Анализ характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений в (2.7)

$$\sum_{n=0}^{6} a_n(p_1,\ p_2,\ s)\lambda^{6-m} = 0 \tag{2.9}$$

показывает, что его коэффициенты $a_n(p_1, p_2, s)$ – однородные многочлены степени $n$, а корни $\lambda_l(p_1, p_2, s)$ – однородные функции порядка единицы, причем $\operatorname{Re} \lambda_l < 0$ ($l = 1, 2, 3$). Из соответствующей системы алгебраических уравнений следует, что собственные векторы $\boldsymbol{\gamma}_l^{(1)}(p_1,\ p_2,\ s)$ ортонормированной системы – однородные функции нулевого порядка.

Ограниченное на бесконечности решение системы (2.7) имеет вид

$$\mathbf{U} = \sum_{l=1}^{3} C_l \boldsymbol{\gamma}_l^{(1)} f_l(x_3), \quad \mathbf{S} = \sum_{l=1}^{3} C_l \boldsymbol{\gamma}_l^{(2)} f_l(x_3)$$

$$\mathbf{X} = \sum_{l=1}^{3} C_l \boldsymbol{\gamma}_l^{(3)} f_l(x_3), \quad \mathbf{S}_1 = \sum_{l=1}^{3} C_l \boldsymbol{\gamma}_l^{(4)} f_l(x_3) \tag{2.10}$$

$$f_l(x_3) = \exp(\lambda_l x_3), \quad \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{(2)} = (\mathbf{D}_2 \lambda_\alpha - i \sum_{m=1}^{2} p_m \mathbf{A}_{0m}) \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{(1)}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^{(3)} = \mathbf{E}^0 \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{(2)} + \mathbf{E}_3 \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{(1)}, \quad \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{(4)} = (\mathbf{B}_1 \lambda_\alpha - i \sum_{m=1}^{2} p_m \mathbf{B}_{0m}) \boldsymbol{\gamma}_\alpha^{(1)}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^{(j)} = \|\gamma_{1\alpha}^{(j)},\ \gamma_{2\alpha}^{(j)},\ \gamma_{3\alpha}^{(j)}\|^T$$

Постоянные $C_l$ определяются из граничных условий (2.1) или (2.2), или (2.3) в пространстве изображений ($[\delta(\tau)]^L = 1$, $[\delta(x_1,\ x_2)]^F = 1$). Тогда для функций влияния $j$-го типа получим (по индексу $k$ суммирование не производится)

$$\mathbf{U} = \|G_{1,\alpha}^{jFL},\ G_{2,\alpha}^{jFL},\ G_{3,\alpha}^{jFL}\|^T = |\boldsymbol{\Lambda}_j|^{-1} \sum_{l=1}^{3} (-1)^{k+l} M_{kl}^{(j)} \boldsymbol{\gamma}_l^{(1)} f_l(x_3)$$

$$\mathbf{S} = \|\Gamma_{13,\alpha}^{jFL},\ \Gamma_{23,\alpha}^{jFL},\ \Gamma_{33,\alpha}^{jFL}\|^T = |\boldsymbol{\Lambda}_j|^{-1} \sum_{l=1}^{3} (-1)^{k+l} M_{kl}^{(j)} \boldsymbol{\gamma}_l^{(2)} f_l(x_3) \tag{2.11}$$

$$\mathbf{S}_1 = \|\Gamma_{11,\alpha}^{jFL},\ \Gamma_{12,\alpha}^{jFL},\ \Gamma_{22,\alpha}^{jFL}\|^T = |\boldsymbol{\Lambda}_j|^{-1} \sum_{l=1}^{3} (-1)^{k+l} M_{kl}^{(j)} \boldsymbol{\gamma}_l^{(4)} f_l(x_3)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_n = \|\boldsymbol{\gamma}_1^{(n)},\ \boldsymbol{\gamma}_2^{(n)},\ \boldsymbol{\gamma}_3^{(n)}\|^T \ (n = 1, 2), \ |\boldsymbol{\Lambda}_1| = 1, \ \boldsymbol{\Lambda}_3 = \mathbf{E}^0 \boldsymbol{\Lambda}_2 + \mathbf{E}_3 \boldsymbol{\Lambda}_1$$

Здесь $M_{kl}^{(j)}$ – дополнительные миноры к элементам, стоящим в $k$-й строке и $l$-м столбце матриц $\Lambda_j$, а под индексом $\alpha$ понимаются следующие символы: $\alpha = k$ при $j = 1$, $\alpha = k3$ при $j = 2$ и $\alpha = k = 3$ при $j = 3$.

Найти аналитические выражения для оригиналов функций влияния прежде всего из-за сложности уравнения (2.9) не представляется возможным. Рассмотрение анизотропных сред с различными видами симметрии, за исключением известного случая изотропии, а также переход к задачам меньшей размерности (плоским или осесимметричным) фактически не упрощает задачу вычисления оригиналов.

Для указанных ниже видов симметрии [8] (здесь же дана связь двухиндексных $c_{ij}$ и четырехиндексных $c_{ijkm}$ обозначений упругих постоянных) уравнение (2.9) становится бикубическим:

$$\sum_{k=0}^{3} a_{2k}\lambda^{6-2k} = 0, \quad a_1 = a_3 = a_5 = 0 \tag{2.12}$$

и выявляются следующие функциональные зависимости:

*ось симметрии второго порядка $x_3$ или симметрия относительно плоскости $x_1x_2$*

$$a_{2k} = b_k(p_1^2,\ p_2^2,\ p_1p_2,\ s^2), \quad \lambda_l = -k_l(p_1^2,\ p_2^2,\ p_1p_2,\ s^2) \tag{2.13}$$

*ортотропная среда*

$$a_{2k} = b_k(p_1^2,\ p_2^2,\ s^2), \quad \lambda_l = -k_l(p_1^2,\ p_2^2,\ s^2) \tag{2.14}$$

*трансверсально-изотропная среда с осью $x_3$*

$$a_{2k} = b_k(p_1^2 + p_2^2,\ s^2), \quad \lambda_l = -k_l(p_1^2 + p_2^2,\ s^2) \tag{2.15}$$

*кубическая симметрия*

$$a_{2k} = b_k(p_1^2 + p_2^2,\ p_1^2p_2^2,\ s^2), \quad \lambda_l = -k_l(p_1^2 + p_2^2,\ p_1^2p_2^2,\ s^2) \tag{2.16}$$

*изотропная среда*

$$-\lambda_1 = k_1 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \eta_1^2 s^2}, \quad -\lambda_{2,3} = k_2 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \eta_2^2 s^2} \tag{2.17}$$

$$\eta_k = c_k / c_*, \quad c_{12} = \varkappa\gamma^2 / \eta_1^2, \quad c_{44} = \gamma^2 / \eta_2^2, \quad \varkappa = \lambda / (\lambda + 2\mu)$$

где $c_k$ – скорости распространения волн, $\lambda$ и $\mu$ – упругие постоянные Ламе.

Изображения функций влияния для плоской задачи (симмметрия тензора упругих постоянных относительно плоскости $x_1x_3$) могут быть получены из (2.7), если положить $p_2 = 0$, $p_1 = p$ и $u_2 \equiv 0$. Тогда характеристический многочлен (2.9) будет иметь четвертый порядок ($a_0 = a_1 = 0$). В частных случаях ортотропной трансверсально-изотропной среды или кубической симметрии характеристическое уравнение становится биквадратным. Хотя его корни могут быть выписаны в явном виде, однако так же, как и в общем случае плоской задачи, получить явные формулы для функций влияния затруднительно.

Несмотря на сложность изображений функций влияния (2.11), они могут быть использованы для установления связи интегральных характеристик контактной задачи.

**3. Связь интегральных характеристик.** Для задач с граничными условиями (1.2) или (1.3) напряжения $\sigma_{j0}$ или $\sigma_{30}$ имеют на плоскости $x_3 = 0$ носитель $\Omega$. Обозначим $\Omega_u$ аналогичный носитель для перемещений $u_{j0}$ ($\Omega \subset \Omega_u$). Под силовыми интегральными характеристиками будем понимать интегралы в (1.7), сохранив за ними обозначения контактной задачи: $R_j$ и $M_{0j}$. Кинематическими интегральными характеристиками назовем интегральные перемещения $U_j$, скорости $V_j$ и их моменты первого порядка $U_{mj}$, $V_{mj}$ $(j = 1,\ 2,\ 3;\ m = 1,\ 2)$:

$$U_{j0} = \iint\limits_{R^2} u_{j0} dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega_u} w_j dx_1 dx_2, \quad V_j = \iint\limits_{R^2} \dot{u}_{j0} dx_1 dx_2$$

$$U_{mj} = \iint\limits_{R^2} x_m u_{j0} dx_1 dx_2, \quad V_{mj} = \iint\limits_{R^2} x_m \dot{u}_{j0} dx_1 dx_2 \tag{3.1}$$

$$u_{j0}(x_1,\ x_2,\ \tau) = w_j(x_1,\ x_2,\ \tau) H(D_u)$$

$$D_u = \operatorname{supp} u_{j0} = \{(x_1, x_2, \tau) \mid (x_1, x_2) \in \Omega_u,\ \tau \geq 0\}$$

Установим связь между силовыми и кинематическими характеристиками для задачи с граничными условиями (1.2). Из формул (1.7) с учетом свойств преобразования Фурье аналогично [2, 5, 6] получим

$$R_j = \lim_{p_1, p_2 \to 0} \iint\limits_{R^2} \sigma_{j0} e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} dx_1 dx_2 = \sigma_{j0}^F(0,\ 0,\ \tau)$$

$$M_{01} = \lim_{p_1, p_2 \to 0} (x_2 \sigma_{30})^F = -i \lim_{p_1, p_2 \to 0} \frac{\partial}{\partial p_2} \sigma_{30}^F \tag{3.2}$$

$$M_{02} = i \lim_{p_1, p_2 \to 0} \frac{\partial}{\partial p_1} \sigma_{30}^F, \quad M_{03} = -i \lim_{p_1, p_2 \to 0} \left[ \frac{\partial}{\partial p_1} \sigma_{20}^F - \frac{\partial}{\partial p_2} \sigma_{10}^F \right]$$

Для вычисления пределов в (3.2) в соответствии с (2.4) необходимо знание предельных значений изображений функций влияния $\Gamma_{3n,k}^{10}$ и их производных. Задача на собственные значения для системы дифференциальных уравнений в (2.7) при $p_1 = $ $= p_2 = 0$ имеет следующий вид:

$$\left| \mathbf{D}_2 - \zeta_l^2 \mathbf{E} \right| = 0, \quad (\mathbf{D}_2 - \zeta_l^2 \mathbf{E}) \boldsymbol{\gamma}_{l0} = 0, \quad \lambda_l \zeta_l = -\gamma s \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{l0} = \boldsymbol{\gamma}_l^{(1)} \Big|_{p_1 = p_2 = 0} = \left\| \gamma_{1l0},\ \gamma_{2l0},\ \gamma_{3l0} \right\|^T, \quad \boldsymbol{\gamma}_{\alpha 0}^{(2)} \doteq \boldsymbol{\gamma}_{\alpha}^{(2)} \Big|_{p_1 = p_2 = 0} = -\gamma s \zeta_\alpha \boldsymbol{\gamma}_{\alpha 0}$$

Вещественность и положительность собственных значений $\zeta_l^2$ матрицы $\mathbf{D}_2$ вытекает из ее симметричности. Можно показать, что числа $\zeta_l^2$ имеют вполне конкретный физический смысл: $\zeta_l / \gamma = c_{3l}$ – скорости распространения плоских волн в направлении вектора $\mathbf{e}_3$.

Учитывая свойства интегральных преобразований и формулы (2.4), (2.11), (3.3), из (3.2) найдем ($\zeta_l > 0$; $l = 1, 2, 3$)

$$R_j^L(s) = -\gamma s \mu_{jk}^{(1)} u_{k0}^{FL}(0,\ 0,\ s) = -\gamma \mu_{jk}^{(1)} \iint\limits_{R^2} s u_{k0}^L(x_1,\ x_2,\ s) dx_1 dx_2 \tag{3.4}$$

$$\mu_{jk}^{(1)} = \Gamma_{j3,k}^{10FL}(0,\ 0,\ s) = \left| \boldsymbol{\Lambda}_{1k} \right|$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda}_{1k}$ – матрица, полученная из матрицы $\boldsymbol{\Lambda}_{10} = \boldsymbol{\Lambda}_1 \Big|_{p_1 = p_2 = 0}$ заменой $k$-й строки на строку $\left\| \zeta_1 \gamma_{j10},\ \zeta_2 \gamma_{j20},\ \zeta_3 \gamma_{j30} \right\|$. При этом непосредственным вычислением определителей $\left| \boldsymbol{\Lambda}_{1k} \right|$ можно показать, что матрица $\left\| \mu_{jk}^{(1)} \right\|$ – симметрическая.

В пространстве оригиналов формула (3.4) приобретает следующий вид:

$$R_j(\tau) = -\gamma\mu_{jk}^{(1)} V_k(\tau), \quad V_k(\tau) = \iint\limits_{\Omega_u} \dot{w}_k dx_1 dx_2 \tag{3.5}$$

Последнее равенство получено с учетом правила дифференцирования обобщенных функций с ограниченным носителем и отсутствия разрывов перемещений на границе $\partial D_u$ носителя: $[w_k]_{\partial D_u} = 0$.

Нахождение предельных значений производных функций влияния из (2.11) затруднительно. Их проще найти, продифференцировав по параметру $p_n$ систему уравнений в (2.7). Тогда при $p_1 = p_2 = 0$ с учетом граничных условияй (2.1) получим ($n = 1, 2$)

$$\mathbf{D}_2 \mathbf{V}_{n0}'' - \gamma^2 s^2 \mathbf{V}_{n0} = i\mathbf{D}_{1n}\mathbf{U}_0, \quad \mathbf{Q}_{n0} = \mathbf{D}_2 \mathbf{V}_{n0} - i\mathbf{A}_{0n}\mathbf{U}_0$$

$$\mathbf{V}_0\big|_{x_3=0} = \mathbf{V}_{00} = 0, \quad \mathbf{V}_{n0} = \mathbf{V}_n\big|_{p_1=p_2=0}, \quad \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}\big|_{p_1=p_2=0} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{Q}_{n0} = \mathbf{Q}_n\big|_{p_1=p_2=0}, \quad \mathbf{V}_n = \partial\mathbf{U}/\partial p_n, \quad \mathbf{Q}_n = \partial\mathbf{S}/\partial p_n$$

Вектор $\mathbf{U}_0$ определяется равенствами (2.11).

Решая задачу (3.6), найдем искомый вектор $\mathbf{Q}_{n00} = \mathbf{Q}_{n0}\big|_{x_3=0}$:

$$\mathbf{Q}_{n0} = i(\mathbf{K}_n\mathbf{U}_0 + \tfrac{1}{2} x_3 \mathbf{D}_{1n}\mathbf{U}_0') \tag{3.7}$$

$$\mathbf{Q}_{n00} = \left\| \frac{\partial}{\partial p_n}\Gamma_{13,k}^{jFL}, \;\; \frac{\partial}{\partial p_n}\Gamma_{23,k}^{jFL}, \;\; \frac{\partial}{\partial p_n}\Gamma_{33,k}^{jFL} \right\|_{p_1=p_2=x_3=0}^{T} = i\mathbf{K}_n\mathbf{U}_{00}$$

$$\mathbf{U}_{00} = \left\|\delta_{1k}, \; \delta_{2k}, \; \delta_{3k}\right\|^T, \quad \mathbf{K}_n = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A}_{0n}^T - \mathbf{A}_{0n}) = \left\|\varkappa_{lm}^{(n)}\right\|_{3\times 3}$$

$$2\varkappa_{lm}^{(n)} = c_{lnm3} - c_{l3m3}$$

Элементы матриц $\mathbf{K}_n$ в силу симметрии упругих постоянных $c_{ijkm}$ удовлетворяют следующим свойствам:

$$\varkappa_{lm}^{(n)} = -\varkappa_{ml}^{(n)}, \quad \varkappa_{lm}^{(3)} = \varkappa_{mm}^{(n)} = 0 \tag{3.8}$$

$$\varkappa_{lm}^{(n)} - \varkappa_{nm}^{(l)} = \varkappa_{ln}^{(m)}, \quad \varkappa_{l3}^{(n)} = \varkappa_{n3}^{(l)}$$

Подставляя (2.4) в (3.2), с учетом (3.7) и (3.8) аналогично (3.4) и (3.5) получим следующие формулы ($m = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$):

$$M_{01}(\tau) = \varkappa_{3k}^{(2)} U_k(\tau) - \gamma\mu_{3k}^{(1)} V_{2k}(\tau)$$

$$M_{02}(\tau) = -\varkappa_{3k}^{(1)} U_k(\tau) - \gamma\mu_{3k}^{(1)} V_{1k}(\tau) \tag{3.9}$$

$$M_{03}(\tau) = \varkappa_{21}^{(k)} U_k(\tau) - \gamma\mu_{2k}^{(1)} V_{1k} + \gamma\mu_{1k}^{(1)} V_{2k}(\tau)$$

$$V_{mk} = \iint\limits_{\Omega_u} x_m \dot{w}_k dx_1 dx_2$$

Отметим, что в соответствии с (3.8) в первых суммах слагаемые при $k = 3$ равны нулю. Следовательно, моменты $M_{0j}$ не зависят от $U_3$ – объема области, ограниченной деформированной поверхностью полупространства и плоскостью $x_3 = 0$.

Рассуждения, аналогичные (3.2)–(3.9), для граничных условий (1.3) приводят к следующим результатам:

$$R_1 = R_2 = 0, \quad R_3(\tau) = -\gamma\mu_{33}^{(3)}V_3(\tau)$$

$$M_{01}(\tau) = -\gamma\mu_{33}^{(3)}V_{23}(\tau), \quad M_{02}(\tau) = \gamma\mu_{33}^{(3)}V_{13}(\tau), \quad M_{03} = 0 \tag{3.10}$$

$$\mu_{33}^{(3)} = \sqrt{|\mathbf{D}_2| / |\mathbf{\Lambda}_{33}|}, \quad \mathbf{\Lambda}_{33} = \mathbf{E}^0\mathbf{\Lambda}_{23} + \mathbf{E}_3\mathbf{\Lambda}_{10}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{23} = \|\zeta_1\boldsymbol{\gamma}_{10}, \ \zeta_2\boldsymbol{\gamma}_{20}, \ \zeta_3\boldsymbol{\gamma}_{30}\|$$

В отличие от формул (3.8) здесь моменты не зависят от интегральных перемещений $U_1$ и $U_2$.

Таким образом, как следует (3.4), (3.8) и (3.9), интегральные силы и моменты – линейные комбинации кинематических характеристик с коэффициентами, зависящими только от свойств среды. При этом ненулевые коэффициенты $\varkappa_{lm}^{(n)}$ в формулах (3.9) в соответствии с (3.7) определяются пятью парами разностей десяти постоянных:

$$2\varkappa_{31}^{(2)} = 2\varkappa_{32}^{(1)} = c_{45} - c_{36}, \quad 2\varkappa_{32}^{(2)} = c_{44} - c_{23} \tag{3.11}$$

$$2\varkappa_{31}^{(1)} = c_{55} - c_{13}, \quad 2\varkappa_{21}^{(1)} = c_{56} - c_{14}, \quad 2\varkappa_{21}^{(2)} = c_{25} - c_{46}$$

Коэффициенты $\mu_{lm}^{(j)}$ в (3.4), (3.9) и (3.10) зависят от шести различных элементов матрицы $\mathbf{D}_2$: $c_{55}, c_{45}, c_{35}, c_{44}, c_{34}, c_{33}$. Следовательно, в общем случае анизотропии контактные силы и моменты зависят не от всех упругих постоянных: в случае граничных условий (1.3) от шести элементов матрицы $\mathbf{D}_2$, а при условиях (1.2) – от одиннадцати (к указанным шести добавляются в соответствии с (3.11) $c_{36}, c_{23}, c_{13}, c_{56}–c_{14}, c_{25}–c_{46}$).

Для упругих сред, обладающих симметрией, могут быть найдены явные формулы для коэффициентов $\mu_{lm}^{(n)}$ и $\varkappa_{lm}^{(n)}$. Приведем результаты для некоторых вариантов симметрии [8] (в скобках первое число указывает на общее количество независимых упругих постоянных, а второе – на число входящих в формулы для сил и моментов).

*Симметрия относительно плоскости* $x_1x_3$ (13–7):

$$\varkappa_{31}^{(2)} = \varkappa_{32}^{(1)} = \varkappa_{21}^{(1)} = \mu_{12}^{(1)} = \mu_{23}^{(1)} = 0$$

$$\mu_{11}^{(1)} = \zeta_3 - c_{35}^2(\zeta_3 - \zeta_1)/\beta^2, \quad \mu_{13}^{(1)} = c_{35}(\zeta_3^2 - c_{33})(\zeta_3 - \zeta_1)$$

$$\mu_{33}^{(1)} = \zeta_1 + \zeta_3 - \mu_{11}^{(1)}, \quad \mu_{22}^{(1)} = \zeta_2, \quad \mu_{33}^{(3)} = \zeta_1\zeta_2 / \mu_{11}^{(1)} \tag{3.12}$$

$$\zeta_{1,3}^2 = \frac{1}{2}\left(c_{33} + c_{55} \mp \sqrt{(c_{33} - c_{55})^2 + 4c_{35}^2}\right), \quad \zeta_3 > \zeta_1$$

$$\beta^2 = c_{35}^2 + (\zeta_3^2 - c_{33})^2$$

*Ось симметрии второго порядка* $x_3$ (13–7):

$$\varkappa_{21}^{(1)}=\varkappa_{21}^{(2)}=\mu_{13}^{(1)}=\mu_{23}^{(2)}=0$$

$$\mu_{11}^{(1)}=\zeta_2-c_{45}^2(\zeta_2-\zeta_1)/\beta^2,\quad \mu_{12}^{(1)}=c_{45}(\zeta_2^2-c_{44})(\zeta_2-\zeta_1)/\beta^2 \tag{3.13}$$

$$\mu_{22}^{(1)}=\zeta_1+\zeta_2-\mu_{11}^{(1)},\quad \mu_{33}^{(1)}=\mu_{33}^{(3)}=\zeta_3$$

$$\zeta_{1,2}^2=\frac{1}{2}\left(c_{44}+c_{55}\mp\sqrt{(c_{44}-c_{55})^2+4c_{45}^2}\right),\quad \zeta_2>\zeta_1$$

$$\zeta_3^2=c_{33},\quad \beta^2=c_{45}^2+(\zeta_1^2-c_{33})^2$$

*Ортотропная среда* (9–5):

$$\varkappa_{31}^{(2)}=\varkappa_{32}^{(1)}=\varkappa_{21}^{(1)}=\varkappa_{21}^{(2)}=0,\qquad \mu_{\alpha k}^{(1)}=\zeta_\alpha\delta_{\alpha k} \tag{3.14}$$

$$\mu_{33}^{(3)}=\zeta_3,\quad \zeta_1^2=c_{55},\quad \zeta_2^2=c_{44},\quad \zeta_3^2=c_{33}$$

*Ось $x_3$ – ось симметрии третьего (7–3), четвертого (7–3) порядков, трансверсально-изотропная среда (5–3), кубическая симметрия (3–3).* Эти среды неразличимы в смысле формул для результирующих сил и моментов. Остаются справедливыми формулы (3.11) и (3.14), где $c_{55}=c_{44}$, $c_{13}=c_{23}$.

*Изотропная среда* (2–2). В этом случае в выводах для трансверсально-изотропной среды необходимо положить $c_{33}=2c_{44}+c_{13}$. При этом с учетом обозначений (2.17) будем иметь

$$\zeta_1=\zeta_2=\frac{\gamma}{\eta_2},\quad \zeta_3=\frac{\gamma}{\eta_1},\quad \varkappa_{31}^{(1)}=\varkappa_{32}^{(2)}=\frac{\gamma^2}{2}\left(\frac{1}{\eta_2^2}-\frac{\varkappa}{\eta_1^2}\right) \tag{3.15}$$

*Акустическая среда* (1–1). Для нее есть смысл рассматривать только граничные условия (1.3) и соответствующие им формулы (3.10), где $\mu_{33}^{(3)}=\gamma/\eta_1$.

**4. Результирующие реакции.** Формулы связи контактных усилий (3.5), (3.9) и (3.10) могут быть непосредственно применены для контактной задачи только в так называемом сверхзвуковом случае ($\Omega=\Omega_u$), который может реализовываться для ударников, ограниченных гладкими выпуклыми поверхностями П, в начальные моменты взаимодействия. При этом граница $\partial\Omega$ области контакта точно определяется, как кривая, являющаяся пересечением граничной поверхности ударника П и плоскости $x_3=0$.

Наличие сверхзвукового этапа взаимодействия для анизотропной упругой среды связано с ограничениями на скорость изменения $v_N$ границы $\partial\Omega$ области контакта в направлении нормали $\mathbf{N}_\Omega$:

$$v_N\geqslant c_N\quad \forall(x_1,\ x_2)\in\partial\Omega,\quad c_N=\max(c_{1N},\ c_{2N},\ c_{3N}) \tag{4.1}$$

Здесь $c_{kN}$ – скорости распространения упругих волн в направлении $\mathbf{N}_\Omega$. Для изотропной среды это неравенство соответственно упрощается [5].

Найдем сначала интегральные кинематические характеристики в (3.1) с учетом конкретного вида перемещений $w_j$ в (1.5) и формул (1.6), (3.9):

$$U_j=S_j=S_{2,j}+u_{Cj}S,\quad V_j=\dot u_{Cj}S+\varepsilon_{jlm}\omega_l S_{2,m}$$

$$V_{kj}=u_{Ck}V_j+V_{2,kj},\quad V_{2,kj}=\dot u_{Cj}S_{2,k}+\varepsilon_{jlm}\omega_l T_{2,km} \tag{4.2}$$

$$I_{kn}=I_{2,kn}+u_{Ck}S_{2,n}+u_{Cn}S_{2,k}+u_{Ck}u_{Cm}S$$

Здесь $\varepsilon_{ijk}$ – компоненты псевдотензора Леви-Чивиты, а коэффициенты при кинематических параметрах имеют следующий геометрический смысл. $S$ – площадь области контакта $\Omega$; $S_k$ и $I_{km}$ ($k, m = 1, 2$) – ее статические моменты и моменты инерции в осях системы координат $Ox_1x_2$; $S_{2,k}$ и $I_{2,km}$ – аналогичные геометрические характеристики в системе координат $O_2z_1z_2$, полученной параллельным переносом $Ox_1x_2$ в точку $O_2$ – проекцию центра масс ударника на плоскость $x_3 = 0$; $S_{2,3}$ – разность объемов погруженной части $G_0$ ударника и цилиндра с основанием $\Omega$ и высотой $u_{C3}$; $I_{13} = I_{31}$, $I_{23} = I_{32}$ и $I_{33}/2$ – геометрические статические моменты тела $G_0$ соответственно относительно плоскостей $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$.

Подставляя (4.2) в формулы (3.5), (3.9) и (3.10) с учетом (1.7), получим следующие выражения для результирующих контактных сил и моментов:

*жесткое сцепление*

$$R_j = -\gamma\mu_{jk}^{(1)}(\dot{u}_{Ck}S + \varepsilon_{jlm}S_{2,m}\omega_l)$$

$$M_1 = u_{C3}R_2 + \varkappa_{3k}^{(2)}S_k - \gamma\mu_{3k}^{(1)}V_{2,2k} \qquad (4.3)$$

$$M_2 = -u_{C3}R_1 - \varkappa_{3k}^{(1)}S_k + \gamma\mu_{3k}^{(1)}V_{2,1k}$$

$$M_3 = \varkappa_{21}^{(k)}S_k - \gamma\mu_{2k}^{(1)}V_{2,1k} + \gamma\mu_{1k}^{(1)}V_{2,2k}$$

*свободное проскальзывание*

$$R_1 = R_2 = 0, \quad R_3 = -\gamma\mu_{33}^{(3)}(\dot{u}_{C3}S + \omega_1S_{2,2} - \omega_2S_{2,1})$$

$$M_1 = -\gamma\mu_{33}^{(3)}V_{2,23}, \quad M_2 = \gamma\mu_{33}^{(3)}V_{2,13}, \quad M_3 = 0 \qquad (4.4)$$

Отметим, что выражение для $R_3$ в (4.4) соответствует найденному в [6].

Таким образом, формулы (4.3) или (4.4) позволяют в сверхзвуковом случае свести задачу об определении кинематических параметров ударника к интегрированию квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для замыкания задачи должны быть построены формулы для геометрических параметров $S$, $S_{2,k}$ и $I_{2,km}$ как функций линейных угловых перемещений ударника, что несложно сделать при заданной конкретной форме поверхности П.

На основании результатов (4.3) и (4.4) могут быть рассмотрены различные случаи симметрии упругой среды в соответствии с выводами разд. 3, а также исследованы частные случаи контактной задачи: плоскопараллельное и вертикальное движения ударника, плоская задача. В последнем случае для изотропной среды формулы (4.3) и (4.4) совпадают с полученными ранее [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01083).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородич Ф.М.* Динамический контакт затупленного тела с анизотропной линейно-упругой средой // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 1. С. 38–42.
2. *Симонов И.В.* Динамическая задача о вдавливании осесимметричного штампа в упругое полупространство // Инж. журн. МТТ. 1967. № 2. С. 163–165.
3. *Robinson A.R., Thompson J.C.* Transient disturbances in a hald-space during the first stage of frictionless indentation of a smooth rigid die of arbitrary shape // Quart. Appl. Math. 1975. V. 33. № 3. P. 215–223.

4. *Thompson J.C., Robinson A.R.* An exact solution for the superseismic stage of dynamic contact between a punch and an elastic body // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. № 4. P. 583–586.
5. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Результирующие реакции в пространственной задаче об ударе твердым телом по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 95–98.
6. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В.* Влияние граничных условий на параметры нестационарной контактной задачи // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 133–143.
7. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В.* Наклонный удар абсолютно твердого цилиндра по упругому полупространству // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 27–37.
8. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 300 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.1995