УДК 539.3

© 1996 г. Л.М. Зубов, А.Н. Рудев

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАСТЯНУТОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО БРУСА

Исследуется устойчивость положения равновесия растянутого нелинейно-упругого прямоугольного бруса относительно малых плоских возмущений. Материал считается однородным, изотропным и несжимаемым. Получены достаточные признаки устойчивости и неустойчивости однородной деформации растянутого бруса. Установлено, что изгибная неустойчивость всегда носит характер поверхностного выпучивания. Для тонкого бруса отмечено отсутствие изгибных мод низших порядков. Обнаружено, что при умеренных значениях относительной толщины бруса потеря устойчивости с образованием "шейки" происходит при меньшем удлинении, чем изгибное выпучивание. Построена асимптотика критической деформации с широким диапазоном применимости. Указаны конкретные модели высокоэластичных материалов, для которых возможна неустойчивость равновесия бруса под действием растягивающей нагрузки.

1. Постановка и решение краевой задачи о бифуркации равновесия бруса. Рассмотрим однородную плоскую деформацию

$$X = \lambda x, \quad Y = \lambda^{-1} y, \quad Z = z \quad (\lambda = \text{const}) \tag{1.1}$$

упругого прямоугольного бруса $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant h$, загруженного по боковым граням $x = \pm a$ равномерно распределенными нормальными усилиями интенсивности q (на единицу площади актуальной конфигурации). Размеры $2a$ и $2h$ считаются соответственно длиной и толщиной бруса. Третий размер – ширина – в данном случае не играет роли и может быть выбран произвольно. Предполагается, что массовые силы отсутствуют, а лицевые грани $y = \pm h$ свободны от напряжений. Материал бруса считается однородным, изотропным и несжимаемым. При указанных условиях параметры q и λ связаны соотношениями

$$q = G(\lambda^2 - \lambda^{-2}), \quad G = 2(c_1 + c_2), \quad c_m = \partial\Pi / \partial I_m \quad (m = 1, 2)$$
$$I_1 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \quad I_2 = v_1^{-2} + v_2^{-2} + v_3^{-2} \tag{1.2}$$

Здесь x, y, z и X, Y, Z – декартовы координаты соответственно до и после деформации, v_l ($l = 1, 2, 3$) – главные растяжения [1, 2], G – модуль сдвига материала при малой деформации простого сдвига в плоскости XY из равновесного состояния (1.1), I_m ($m = 1, 2$) – первый и второй главные инварианты меры деформации Фингера [2], $\Pi = \Pi(I_1, I_2)$ – удельная потенциальная энергия деформации упругого материала [1, 2]. Производные по I_m ($m = 1, 2$) в формуле (1.2) (и далее) берутся при $I_1 = I_2 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1$. Предполагается, что потенциал Π является дважды непрерывно дифференцируемой функцией инвариантов I_1, I_2 всюду, за исключением, быть может, точки отсчета деформации $I_1 = I_2 = 3$, причем соблюдаются следующие требования:

1) материал удовлетворяет неравенству Адамара [1, 2] в некоторой области U пространства главных растяжений V, содержащей точку $v_0 = (1, 1, 1)$, отвечающую недеформированному состоянию тела;

2) в каждой точке связной кривой L, соответствующей однородной деформации (1.1) и целиком расположенной в области U, выполняется неравенство $G > 0$.

Вследствие несжимаемости материала пространство главных растяжений V представляет собой совокупность точек $v = (v_1, v_2, v_3)$ трехмерного арифметического пространства R^3 с положительными компонентами v_1, v_2, v_3, связанными условием изохоричности $v_1 v_2 v_3 = 1$. Заметим, что ограничения 1, 2 на потенциал Π не противоречат друг другу, так как следствием условия Адамара (на кривой L) является неравенство $G \geqslant 0$ [3, 4].

Нарушение дифференцируемости удельной энергии $\Pi(I_1, I_2)$ в точке $I_1 = I_2 = 3$ возможно, в частности, у материалов, обладающих физической нелинейностью даже при весьма малых деформациях из неискаженного состояния. Для таких материалов определяющие соотношения не допускают линеаризации в окрестности отсчетной конфигурации.

В качестве примера можно привести гипотетический материал с потенциалом

$$\Pi = d(I_1 - 3)^{\alpha} \quad (d > 0, \alpha \geqslant {}^1\!/_2) \tag{1.3}$$

для которого формула (1.2) принимает вид ($C = \mathrm{const} > 0$)

$$q = 2\alpha d(\lambda + \lambda^{-1})(\lambda - \lambda^{-1})^{2\alpha-1} = C\delta^{2\alpha-1}[1 + O(\delta)] \tag{1.4}$$

Здесь $\delta \equiv \lambda - 1$ – главное относительное удлинение бруса в направлении растяжения. Из (1.4) видим, что при $\alpha \neq 1$ зависимость q от δ нелинейна при сколь угодно малых значениях параметра δ. Вместе с тем при ${}^1\!/_2 \leqslant \alpha < 1$ производные $d\Pi/dI_1$, $d^2\Pi / dI_1^2$ разрывны в точке $I_1 = I_2 = 3$. Другой пример дает упругий материал с потенциалом

$$\Pi = d[1 + (\sqrt{I_1 - 3} - 1)\exp\sqrt{I_1 - 3}\,] \quad (d > 0) \tag{1.5}$$

В отличие от предыдущего случая, для модели (1.5) напряжение q и удлинение δ при $\delta \to 0$ связаны линейной зависимостью. Тем не менее вторая производная $d^2\Pi/dI_1^2$ терпит разрыв в точке отсчета деформации.

Заметим, что материалы (1.3), (1.5) удовлетворяют требованиям 1, 2 при $U = V$.

Исследуем устойчивость равновесной конфигурации (1.1) относительно малых плоских возмущений (в плоскости XY). Уравнения равновесия, линеаризованные в окрестности состояния (1.1), в случае плоской деформации имеют вид ($\gamma \equiv \lambda^{-2}$)

$$\begin{gathered}[(1+\varepsilon)\partial_1^2 + \partial_2^2]w_1 + \lambda^{-1}\partial_1 p = 0 \\ (\partial_1^2 + \partial_2^2)w_2 + \lambda\partial_2 p = 0\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\gamma\partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 = 0 \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon = 4G^{-1}\lambda^2(1-\gamma^2)^2(c_{11} + 2c_{12} + c_{22}) \\ c_{lm} = \partial^2\Pi / \partial I_l \partial I_m \quad (l, m = 1, 2)\end{gathered} \tag{1.8}$$

где w_i ($i = 1, 2$) – проекции векторного поля малого смещения из конфигурации (1.1) на оси X, Y декартовой системы координат, ∂_i ($i = 1, 2$) – операторы дифференцирования по x, y соответственно. Из-за несжимаемости материала система (1.6), (1.7) содержит неизвестную функцию координат p, имеющую размерность давления и определяемую в ходе решения задачи. Отметим, что уравнение (1.7) и является линеаризованным условием несжимаемости материала.

Компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы [1, 2] выражаются через перемещения w_i ($i = 1, 2$) и давление p по формулам

$$
\begin{aligned}
&P_{11} = G[(1+\gamma^2+\varepsilon)\partial_1 w_1 + \lambda^{-1} p], \quad P_{12} = G(\partial_1 w_2 + \gamma\partial_2 w_1) \\
&P_{21} = G(\gamma\partial_1 w_2 + \partial_2 w_1), \quad P_{22} = G(2\partial_2 w_2 + \lambda p) \\
&P_{33} = G[(\varkappa + 2\nu)\partial_1 w_1 + p], \quad P_{i3} = P_{3i} = 0 \quad (i = 1, 2) \\
&\nu = 2G^{-1} c_2 \lambda (1-\gamma^2), \quad \varkappa = 4G^{-1}(\lambda+\lambda^{-1})(1-\gamma^2)^2 [c_{11} + c_{12}(1+\lambda^2) + c_{22}\lambda^2]
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Вывод соотношений (1.6)–(1.9) осуществляется средствами теории наложения малой деформации на конечную [2].

В соответствии с (1.9) линеаризованные граничные условия на незагруженных лицевых гранях $y = \pm h$ бруса представляются в виде

$$
(\gamma\partial_1 w_2 + \partial_2 w_1)|_{y=\pm h} = 0, \quad (2\partial_2 w_2 + \lambda p)|_{y=\pm h} = 0 \tag{1.10}
$$

На боковых гранях $x = \pm a$ считаются выполненными условия скользящей заделки [5, 6], т.е. отсутствия касательных напряжений и нормального смещения:

$$
w_1|_{x=\pm a} = 0, \quad (\partial_1 w_2 + \gamma\partial_2 w_1)|_{x=\pm a} = 0 \tag{1.11}
$$

Таким образом, в возмущенном и невозмущенном положениях равновесия бруса продольные перемещения частиц, расположенных на его торцах $x = \pm a$, являются одинаковыми.

Решение краевой задачи (1.6), (1.7), (1.10), (1.11) получено ранее [7] и может быть записано в форме

$$
\begin{aligned}
&w_1^\pm = W_1^\pm(y)\varphi^\mp(k^\pm x), \quad w_2^\pm = W_2^\pm(y)\varphi^\pm(k^\pm x) \\
&p^\pm = \pm\lambda P^\pm(y)\varphi^\pm(k^\pm x) \\
&\varphi^+(x) = \cos x, \quad \varphi^-(x) = \sin x \\
&k^+ = \pi m / a, \quad k^- = \pi(2m-1)/(2a) \quad (m = 1, 2, 3 \ldots)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&W_1^\pm(y) = \beta[\omega_2(1+\omega_1^2)\Phi_1^\pm(\pm\omega_1 k^\pm y) - \omega_1(1+\omega_2^2)\Phi_1^\pm(\pm\omega_2 k^\pm y)] \\
&W_2^\pm(y) = \beta[(\omega_2^2+\gamma^2)\Phi_2^\pm(\pm\omega_1 k^\pm y) - (\omega_1^2+\gamma^2)\Phi_2^\pm(\pm\omega_2 k^\pm y)] \\
&P^\pm(y) = \pm\beta k^\pm[\omega_2^3(\omega_1^4-1)\Phi_1^\pm(\pm\omega_1 k^\pm y) - \omega_1^3(\omega_2^4-1)\Phi_1^\pm(\pm\omega_2 k^\pm y)]
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

$$
\beta[(\omega_1^2+\gamma^2)^2\omega_2\Phi_1^\mp(\omega_1 k^\pm h) - (\omega_2^2+\gamma^2)^2\omega_1\Phi_1^\mp(\omega_2 k^\pm h)] = 0 \tag{1.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1^+(\theta y) = \operatorname{ch}\theta y / \operatorname{sh}\theta h, \quad \Phi_1^-(\theta y) = \operatorname{sh}\theta y / \operatorname{ch}\theta h \\
&\Phi_2^+(\theta y) = \operatorname{sh}\theta y / \operatorname{sh}\theta h, \quad \Phi_2^-(\theta y) = \operatorname{ch}\theta y / \operatorname{ch}\theta h \\
&\omega_{1,2} = (\sqrt{\mu+2\gamma} \pm \sqrt{\mu-2\gamma})/2, \quad \mu = 1+\gamma^2+\varepsilon, \quad \beta = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{-1}
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Здесь θ – любое комплексное число. В формулах (1.12)–(1.14) действуют два независимых друг от друга правила согласования знаков "плюс", "минус". Первое из них распространяется только на индексы величин $w_m^\pm$, $p^\pm$, $W_m^\pm$, $P^\pm$, $\Phi_m^\pm$ ($m = 1, 2$), причем верхние и нижние знаки отвечают модам выпучивания, соответственно симметричным и антисимметричным относительно нейтральной линии $y = 0$ бруса. Симметричные моды описывают процесс образования "шейки", а антисимметричные определяют изгибные формы выпучивания. В остальных случаях работает второе правило, при этом выбор верхних или нижних знаков в формулах (1.12)–(1.14) осуществляется согласованно. В рамках действия этого правила верхние и нижние знаки определяют четные и нечетные моды выпучивания, соответственно симметричные и антисимметричные относительно прямой $x = 0$. Таким образом, существует четыре типа мод – симметричные четные, симметричные нечетные, антисимметричные четные и антисимметричные нечетные. Характер четности, как станет ясно из дальнейшего, не играет существенной роли.

Выражения (1.13), (1.14) теряют смысл при $\omega_1 = \omega_2$. В этом случае нужно осуществить в них предельный переход $\omega_1 \to \omega_2$.

Заметим, что следствием ограничения 1 на потенциал П является неравенство

$$\mu + 2\gamma \geqslant 0 \tag{1.16}$$

из которого, в частности, видно, что величины ω_m ($m = 1, 2$) либо вещественные ($\mu \geqslant 2\gamma$), либо комплексно-сопряженные ($|\mu| < 2\gamma$). Кроме того, можно показать, что условие (1.16) обеспечивает монотонный рост интенсивности q приложенной нагрузки с увеличением растяжения λ, а именно справедливость неравенства $dq/d\lambda > 0$.

Трансцендентные уравнения (1.14) определяют критические (или бифуркационные) значения параметра γ, для которых однородная краевая задача (1.6), (1.7), (1.10), (1.11) допускает нетривиальные решения. В дальнейшем уравнения (1.14) называются характеристическими.

2. Исследование характеристических уравнений. Признаки устойчивости и неустойчивости положения равновесия. При действии сжимающей нагрузки ($q < 0$) устойчивость однородной деформации (1.1) относительно малых плоских возмущений подробно исследована [7], поэтому ограничимся здесь случаем растяжения бруса ($q > 0$). Введем обозначения

$$\tau = h/a, \quad \Gamma = \{\gamma \in (0,1)\colon (\gamma^{-1/2}, \gamma^{1/2}, 1) \in L\}$$

$$L = \{(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3) \in U\colon \upsilon_1 = \lambda,\ \upsilon_2 = \lambda^{-1},\ \upsilon_3 = 1\ (\lambda > 0)\}$$

Теорема 1. Если в каждой точке $\gamma \in \Gamma$ соблюдается неравенство

$$\mu + 2\gamma^2 \geqslant 0 \tag{2.1}$$

то характеристические уравнения (1.14) не имеют корней, принадлежащих множеству Г, а вторая вариация потенциальной энергии бруса положительна на любом виртуальном смещении из состояния равновесия (1.1), что означает устойчивость последнего относительно малых плоских возмущений для всех $\tau > 0$ и $\gamma \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть υ – область, занимаемая телом до деформации, ∇ – набла-оператор в метрике неискаженного состояния, $\sigma^{\pm}$ – боковые грани $x = \pm a$ бруса в актуальной конфигурации, $\mathbf{N}^{\pm}$ – текущая внешняя нормаль к поверхности $\sigma^{\pm}$,$\mathbf{R}^0$ – вектор места произвольной частицы в равновесном состоянии (1.1), $\mathbf{R}$ – радиус-вектор той же частицы после некоторого виртуального перемещения (параллельного плоскости XY) из положения равновесия (1.1):

$$\mathbf{R} \in C^2(\upsilon), \quad \det \nabla\mathbf{R}|_{\upsilon} = 1, \quad \mathbf{N}^{\pm}(\mathbf{R}^0)\cdot(\mathbf{R} - \mathbf{R}^0)|_{\sigma^{\pm}} = 0 \tag{2.2}$$

Потенциальная энергия бруса [2] при виртуальном перемещении (2.2) имеет вид

$$W(\mathbf{R}) = \iiint_{\upsilon} \Pi[I_1(\nabla\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{R}^T),\ \ I_2(\nabla\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{R}^T)]d\upsilon \tag{2.3}$$

Верхний индекс T в формуле (2.3) означает операцию транспонирования тензора второго ранга. Обозначая для сокращения записи вариацию $\delta\mathbf{R} \equiv \mathbf{R} - \mathbf{R}^0$ через $\mathbf{w}$ и используя технику работы [8], для второй вариации функционала (2.3) находим ($\Omega \equiv [-a, a] \times [-h, h]$)

$$\delta^2 W = \frac{1}{2}\iiint_v \mathbf{P}\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}^T dv = \tag{2.4}$$
$$= bG\iint_\Omega [(\mu + 2\gamma^2)(\partial_1 w_1)^2 + (\partial_1 w_2)^2 + (\partial_2 w_1)^2 + 2\gamma(\partial_1 w_2)(\partial_2 w_1)]dxdy.$$

Здесь $2b$ – ширина бруса до деформации, $\mathbf{P}$ – линеаризованный тензор напряжений Пиолы, компоненты которого определяются соотношениями (1.9). При выводе формулы (2.4) использовано условие несжимаемости (1.7) и второе соотношение (1.15).

Так как $G > 0$ и при растяжении бруса параметр γ меньше единицы (что следует из (1.2)), то в случае $\mu + 2\gamma^2 > 0$ видим из (2.4), что $\delta^2 W > 0$ для всех $\mathbf{w}$, отличных от константы. Если же $\mu + 2\gamma^2 = 0$, то $\delta^2 W \geqslant 0$, причем равенство возможно лишь для векторных полей $\mathbf{w}$ с компонентами вида $w_1 = d_1 x + e_1$, $w_2 = d_2 y + e_2$, где d_i, e_i (i = = 1, 2) – некоторые постоянные. Но поскольку поле перемещений $\mathbf{w}$ обязано удовлетворять уравнению несжимаемости (1.7) и вытекающему из (2.2) кинематическому ограничению $\mathbf{N}^{\pm}(\mathbf{R}^0)\cdot\mathbf{w}|_{\sigma^{\pm}} = 0$, то необходимо $d_1 = d_2 = e_1 = 0$, т.е. $\mathbf{w}$ = const, что соответствует жесткому смещению тела, не представляющему здесь интереса.

Теорема доказана.

Заметим, что условие (2.1) допускает простую физическую интерпретацию. А именно рассмотрим интенсивность $Q = \lambda^{-1}q$ приложенных к брусу растягивающих усилий в расчете на единицу площади отсчетной конфигурации и вычислим производную $dQ/d\lambda$. С помощью (1.2), (1.8), (1.15) находим

$$dQ/d\lambda = G(\mu + 2\gamma^2) \tag{2.5}$$

Учитывая, что $G > 0$, видим из (2.5), что неравенство (2.1) равносильно требованию $dQ/d\lambda \geqslant 0$. А так как величина $4hbQ$ представляет собой силу, действующую на торцах $x = \pm a$ растягиваемого бруса, то отсюда следует, что до тех пор, пока приложенная сила не убывает с ростом удлинения, состояние однородной деформации в растянутом брусе остается устойчивым. Аналогичный результат получен [9] другим методом для стержня из сжимаемого материала.

Таким образом, бифуркация равновесия растянутого бруса возможна лишь на ниспадающем участке диаграммы "сила – удлинение". На практике убывающая зависимость силы от удлинения может быть реализована при деформировании бруса в жесткой испытательной машине. Именно этому случаю соответствуют граничные условия скользящей заделки на торцах бруса.

Посылка теоремы 1 выполняется для многих известных моделей несжимаемых упругих материалов, например, для моделей Трелоара, Муни–Ривлина, Бартенева–Хазановича, Черных–Шубиной [2], которым соответствуют потенциалы

$$\Pi = d(I_1 - 3) \quad (d > 0) \tag{2.6}$$

$$\Pi = d_1(I_1 - 3) + d_2(I_2 - 3) \quad (d_1, d_2 > 0) \tag{2.7}$$

$$\Pi = d(v_1 + v_2 + v_3 - 3) \quad (d > 0) \tag{2.8}$$

$$\Pi = d_1(v_1 + v_2 + v_3 - 3) + d_2(v_1^{-1} + v_2^{-1} + v_3^{-1} - 3) \quad (d_1, d_2 > 0) \tag{2.9}$$

Заметим, что материалы (2.6)–(2.9) удовлетворяют ограничениям 1, 2 разд. 1 при

$U = V$. Другие примеры дают потенциалы

$$\Pi = d_1 \int \exp[\alpha(I_1 - 3)^2]dI_1 + d_2 \ln(I_2 / 3) \quad (d_1 > 0, d_2 > 0, \alpha > 0) \tag{2.10}$$

$$\Pi = d[(1+\sigma)(v_1^{\alpha} + v_2^{\alpha} + v_3^{\alpha} - 3) + (1-\sigma)(v_1^{-\alpha} + v_2^{-\alpha} + v_3^{-\alpha} - 3)] \tag{2.11}$$

$$(d > 0,\ |\sigma| \leqslant 1,\ \alpha > 0)$$

$$\Pi = d_1 \int \exp[k_1(I_1 - 3)^{n_1}]dI_1 + d_2 \int \exp[k_2(I_2 - 3)^{n_2}]dI_2 \quad (d_1 > 0, d_2 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0, n_1 > 0, n_2 > 0) \tag{2.12}$$

отвечающие соответственно моделям Харт-Смита [10, 11], Огдена [12] и некоторому гипотетическому материалу. Можно доказать, что зависимость (2.10) удовлетворяет требованиям 1, 2 разд. 1 (где $U = V$) и неравенству (2.1) при выполнении условий

$$\eta < 8, \quad H(\alpha) - \eta / 24 \geqslant 0, \quad \eta \equiv d_2 / d_1$$
$$H(\alpha) \equiv (\sqrt{9\alpha^2 + 2\alpha} - 3\alpha)\exp[(9\alpha + 1 - 3\sqrt{9\alpha^2 + 2\alpha}) / 2] \tag{2.13}$$

То же самое справедливо для модели Огдена (2.11) при $\alpha \geqslant 1$ и для гипотетического материала (2.12) (без дополнительных оговорок). Таким образом, во всех рассмотренных случаях диаграмма "сила – удлинение" является неубывающей.

Отметим, что при задании потенциала Π в виде явной зависимости от главных растяжений v_1, v_2, v_3, не допускающей непосредственного перехода к переменным I_1, I_2 (как, например, в (2.11)), для вычисления параметров G, ν, ε, $\varkappa$ удобнее использовать формулы

$$\begin{gathered}
G = \xi\lambda(1 - \gamma^2), \quad \nu = \xi(1 + \gamma)[\Pi_3(1 + \gamma) - \lambda^{-1}(\Pi_1 + \Pi_2)] \\
\varepsilon = \xi[\Pi_2\gamma(\gamma^2 + 3) - \Pi_1(3\gamma^2 + 1)] + G^{-1}(\Pi_{11} - 2\Pi_{12}\gamma + \Pi_{22}\gamma^2) \\
\xi = (\Pi_1 - \Pi_2\gamma)^{-1}, \quad \varkappa = \xi\lambda^{-1}[2(\Pi_1 + \Pi_2) + (\Pi_2 - 2\Pi_3\lambda)(\gamma + 1)^2 + \\
+ (1 - \gamma^2)(\Pi_{22}\lambda^{-1} - \Pi_{12}\lambda + \Pi_{13}\lambda^2 - \Pi_{23})] \\
\Pi_l = \partial\Pi / \partial v_l, \quad \Pi_{lm} = \partial^2\Pi / \partial v_l \partial v_m \quad (l, m = 1, 2, 3)
\end{gathered} \tag{2.14}$$

Производные по v_l (l = 1, 2, 3) в соотношениях (2.14) берутся при $v_1 = \lambda$, $v_2 = \lambda^{-1}$, $v_3 = 1$.

Рассмотрим теперь случай нарушения неравенства (2.1). Положим

$$\begin{gathered}
R(\gamma) = \gamma^3 - 2\gamma^2 - \gamma - \mu, \quad S(\gamma) = \gamma^3 + 2\gamma^2 - \gamma + \mu \quad (\gamma \in \Gamma) \\
\rho(\gamma) = R(\gamma) / S(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_S^0), \quad \Gamma_S^0 = \{\gamma \in \Gamma:\ S(\gamma) = 0\} \\
\Sigma(\gamma) = \mu + 2\gamma, \quad \Delta(\gamma) = \mu - 2\gamma \quad (\gamma \in \Gamma) \\
\sigma(\gamma) = \sqrt{\Sigma(\gamma)}, \quad \delta(\gamma) = \sqrt{\Delta(\gamma)}, \quad (\gamma \in \Gamma) \\
\Gamma_* = \{\gamma \in \Gamma:\ \mu + 2\gamma^2 < 0\}
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Под $\sigma(\gamma)$, $\delta(\gamma)$ понимаются ветви соответствующих радикалов, расположенные в замыкании первого квадранта. Существование последних вытекает из соотношения (1.16). В дальнейшем, если это не приводит к недоразумениям, аргументы функций $R(\gamma)$, $S(\gamma)$ и т.д. для краткости опускаются.

Теорема 2. Если множество Γ_* непусто, то для всякого элемента $\gamma \in \Gamma_*$ существует такое значение $\tau > 0$ относительной толщины бруса, для которого в точке γ имеет место бифуркация равновесия однородной деформации (1.1).

Доказательство. Используя соотношения (1.15), можно проверить, что при обозначениях (2.15) характеристические уравнения (1.14) могут быть представлены в форме

$$R\,\mathrm{sh}\,\sigma k\tau/(\sigma k\tau) = \pm S\,\mathrm{sh}\,\delta k\tau/(\delta k\tau) \tag{2.16}$$

$$k = \pi n/2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

где знаки плюс, минус отвечают симметричным и антисимметричным, а четные и нечетные значения параметра n – четным и нечетным модам выпучивания соответственно.

Очевидно, что заключение теоремы выполняется тогда и только тогда, когда при любом фиксированном значении $\gamma \in \Gamma_*$ по крайней мере одно из уравнений

$$R\,\mathrm{sh}\,\sigma t/(\sigma t) = \pm S\,\mathrm{sh}\,\delta t/(\delta t) \tag{2.17}$$

имеет положительные решения относительно t.

Действительно, если t_* – положительный корень любого из уравнений (2.17), то при $\tau = \tau_* \equiv t_*/k$ разрешимо соответствующее уравнение (2.16). Верно и обратное.

Из соотношений (2.15), (1.16) следует, что в каждой точке $\gamma \in \Gamma_*$ соблюдаются неравенства

$$-2\gamma \leqslant \mu < 2\gamma, \quad |\rho| < 1 \tag{2.18}$$

Рассмотрим два случая. Пусть вначале $|\mu| < 2\gamma$. Тогда $\sigma > 0$, $\delta = i|\delta|$ (i – мнимая единица), и уравнения (2.17) можно записать в виде

$$\sin|\delta|t = \pm\omega\,\mathrm{sh}\,\sigma t, \quad \omega = \rho|\delta|/\sigma \tag{2.19}$$

Ясно, что при $\omega = 0$ уравнение (2.19) имеет счетное множество положительных корней. Допустим, что $\omega \neq 0$. Для определенности будем считать, что $\omega > 0$. Тогда при выборе в уравнении (2.19) верхнего знака последнее эквивалентно системе уравнений

$$\psi_l(t) = 0 \quad (l = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

$$\psi_l(t) \equiv |\delta|t - \pi l - (-1)^l \arcsin(\omega\,\mathrm{sh}\,\sigma t)$$

$$|t| \leqslant c \equiv \sigma^{-1}\mathrm{arsh}(\omega^{-1})$$

где функции arcsin, arsh понимаются в смысле главного значения. Если вычислить производные $\psi_l'(t)$, $\psi_l''(t)$ и заметить, что при $t = c$ величины $\psi_{2m}(t)$, $\psi_{2m+1}(t)$ ($m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) принимают совпадающие значения, то, используя второе неравенство (2.18), можно убедиться, что произведение функций $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ обращается в нуль на отрезке $(0, c]$. Это означает, что при выборе верхнего знака уравнение (2.19) обязательно имеет положительное решение. Случай $\omega < 0$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $\mu = -2\gamma$. Тогда $\sigma = 0$, $\delta = 2i\sqrt{\gamma}$, и уравнение (2.17) принимает вид

$$\psi(t) \equiv \sin|\delta|t/(|\delta|t) = \pm\rho \tag{2.20}$$

Вследствие непрерывности функции $\psi(t)$ область ее значений на положительной полуоси покрывает отрезок $[0, 1)$, поэтому в силу второго неравенства (2.18) хотя бы одно из уравнений (2.20) имеет положительные корни. А так как этим случаем исчерпываются возможные варианты соотношений между μ и 2γ (что вытекает из первого неравенства (2.18)), то теорема доказана.

Следствие теорем 1, 2. Для того чтобы растянутый брус сохранял устойчивость в каждой точке $\gamma \in \Gamma$ при произвольной толщине $\tau > 0$, необходимо и достаточно, чтобы множество Γ_* было пустым: $\Gamma_* = \phi$.

Теорема 2 свидетельствует о том, что ограничения, наложенные на потенциал Π в разд. 1, не исключают возможности бифуркации равновесия растянутого бруса на ниспадающем участке диаграммы растяжения $Q = Q(\lambda)$.

Посылка теоремы 2 выполняется, например, для материала Огдена (2.11) при $\alpha < 1$.

Действительно, в этом случае условие Адамара соблюдается в некоторой ограниченной области U пространства V [4]. Кроме того, используя формулы (2.14), можно проверить, что неравенство (2.1) нарушается при $\gamma < \gamma_0$, где $\gamma_0 = [(1-\alpha)/(1+\alpha)]^{1/2} \in \Gamma$, т.е. множество Γ_* непусто.

Другие примеры применимости теоремы 2 дают потенциалы

$$\Pi = d_0(I_2 - 3) + d_1(I_1 - 3) + d_2(I_1 - 3)^2 + d_3(I_1 - 3)^3 \tag{2.21}$$

$$(d_0, d_1, d_2, d_3 = \text{const})$$

$$\Pi = d_0(I_1 - 3) + d_1(I_2 - 3) + d_2 \ln[1 + (I_2 - 3)/\alpha] \tag{2.22}$$

$$(d_0 > 0, d_1 \geqslant 0, d_2 \geqslant 0, \alpha > 0)$$

$$\Pi = d_0 \int \exp[\beta(I_1 - 3)^2] dI_1 + d_1(I_2 - 3) + d_2 \ln[1 + (I_2 - 3)/\alpha] \tag{2.23}$$

$$(d_0 > 0, d_1 \geqslant 0, d_2 \geqslant 0, \alpha > 0, \beta > 0)$$

Первый из них отвечает материалу Бидермана [13, 11], а два других – четырехконстантной и пятиконстантной моделям Александера [14, 11]. Установлено, что достаточные условия выполнимости требований 1, 2 разд. 1 (при $U = V$) для материалов (2.21)–(2.23) имеют соответственно вид [7, 15]

$$d_0 \geqslant 0, d_1 \geqslant 0, d_3 \geqslant 0, d_1 + d_3 > 0, \quad 3d_2 + \sqrt{15 d_1 d_3} \geqslant 0 \tag{2.24}$$

$$d_2 \leqslant 8 d_1 \alpha \tag{2.25}$$

$$H(\beta) + (8 d_1 \alpha - d_2)/(8 d_0 \alpha) \geqslant 0 \tag{2.26}$$

причем функция $H(\beta)$ в неравенстве (2.26) та же, что и в (2.13).

Рассмотрим следующие наборы упругих постоянных:

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 12, \quad d_2 = -25, \quad d_3 = 32 \tag{2.27}$$

$$d_0 = 2, \quad d_1 = 78, \quad d_2 = 8, \quad \alpha = 1/78 \tag{2.28}$$

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 54, \quad d_2 = 48, \quad \alpha = 1/9, \quad \beta = 36 \tag{2.29}$$

Непосредственная проверка показывает, что каждый из них удовлетворяет соответствующему ограничению (2.24)–(2.26), при этом во всех случаях множество Γ_* непусто.

Следует отметить, что при ином выборе упругих постоянных каждый из материалов (2.21)–(2.23) может оказаться устойчивым при сколь угодно сильном растяжении. В частности, если величины d_i ($i = 0, 1, 2, 3$) в (2.11) неотрицательны, то для модели Бидермана в каждой точке $\gamma \in \Gamma$ соблюдается неравенство (2.1).

Теорема 2, вообще говоря, не гарантирует существования критической точки для произвольного значения параметра $\tau > 0$. Достаточные условия наличия такой точки даются ниже.

Теорема 3. Допустим, что выполняются следующие требования:

1) множество Γ_* непусто и содержит хотя бы один нуль функции $R(\gamma)$;

2) если $\sup\Gamma_* = 1$, то величина $\rho(\gamma)$ стремится к единице при $\gamma \to 1 - 0$.

Тогда справедливы нижеперечисленные утверждения:

1) при любом значении относительной толщины τ возможно как симметричное, так и антисимметричное выпучивание;

2) потеря устойчивости сколь угодно толстого бруса происходит при конечной величине растяжения λ;

3) существует такое значение τ_0 параметра τ, что при $\tau \leqslant \tau_0$ симметричная бифуркация происходит при меньшем удлинении, чем антисимметричная;

4) для любых $\tau > 0$ и $n \geqslant 1$ хотя бы одна из мод – симметричная или антисимметричная – обязательно существует.

Здесь n – порядковый номер моды выпучивания, совпадающий с количеством имеющихся узловых линий. Четные и нечетные значения порядкового номера n отвечают соответственно четным и нечетным модам выпучивания. Следовательно, при n четном роль параметра "волнообразования" выполняет k^+, а при n нечетном – k^-. Нетрудно установить, что целочисленная переменная m, входящая в определение величин k^+, k^-, связана с n соотношением $m = \mathrm{entier}[(n + 1)/2]$.

Доказательство теоремы опускается.

Проверка подтверждает, что все требования теоремы 3 соблюдаются, например, для материала Бидермана при $d_0 = 0$, $d_1 = 27$, $d_2 = -60$, $d_3 = 80$ и для пятиконстантной модели Александера при $d_0 = 1$, $d_1 = 216$, $d_2 = 96$, $\alpha = {}^1/_{18}$, $\beta = 36$. Заметим, что эти наборы упругих постоянных удовлетворяют также неравенствам (2.24), (2.26) соответственно, что обеспечивает справедливость требований 1, 2 при $U = V$.

Результаты численного расчета критических значений параметра λ для материала Бидермана (при только что указанных значениях постоянных d_i ($i = 0, 1, 2, 3$)) приводятся ниже

τ	0.05	0.10	0.50	1.00	1.50	2.00
λ_1^+	1.17626	1.17634	1.17891	1.18928	–	–
λ_1^-	–	–	–	–	1.19120	1.19145
λ_2^+	1.17634	1.17665	1.18928	–	1.19385	1.20738
λ_2^-	–	–	–	1.19145	–	1.19605
λ_3^+	1.17647	1.17616	–	1.19385	1.20405	1.19858
λ_3^-	–	–	1.19120	–	1.19650	1.19929
λ_4^+	1.17665	1.17791	–	1.20738	1.19858	1.19815
λ_4^-	–	–	1.19145	1.19605	1.19929	1.20005
λ_5^+	1.17688	1.17891	1.19733	1.19790	1.19837	1.19865
λ_5^-	–	–	1.20122	1.20040	1.19966	1.19925
λ_6^+	1.17716	1.18020	1.19385	1.19858	1.19965	1.19899
λ_6^-	–	–	–	1.19929	1.19838	1.19886

Индексами "плюс", "минус" помечены критические точки для случаев симметричной и антисимметричной бифуркации соответственно, а цифровые индексы совпадают с порядковым номером n рассматриваемой моды выпучивания. Прочерк означает отсутствие формы потери устойчивости с заданным числом узловых линий. Отметим, что при фиксированных значениях $\tau > 0$ и $n \geqslant 1$ каждое из характеристических уравнений (1.14) может быть разрешимо неоднозначно. В таких случаях в таблице приводится критическая точка, ближайшая к началу отсчета деформации $\lambda = 1$ и определяющая наименьшее удлинение бруса, при котором возможна та или иная мода выпучивания.

Анализ численных результатов свидетельствует о том, что при малых и умеренных значениях относительной толщины бруса (примерно $\tau \leqslant 1$) появление "шейки" происходит при меньшем удлинении, чем изгибная потеря устойчивости, при этом порядковый номер соответствующей моды выпучивания не обязательно равен единице. Так, при $\tau = 0{,}1$ ближайшей к начальной точке $\lambda = 1$ является критическая точка λ_3^+, которой отвечает форма потери устойчивости с тремя узловыми линиями. При больших значениях параметра τ (примерно $\tau > 1$) изгибная неустойчивость может наступать раньше, чем образование "шейки". В частности, это имеет место при $\tau = 1{,}5$ и $\tau = 2{,}0$. Отметим также, что в рассматриваемом примере потеря устойчивости растянутого бруса наблюдается при относительном удлинении порядка 17–20%, вполне осуществимом для высокоэластичных материалов.

Значительный интерес представляет тот факт, что в условиях теоремы 3 совокупность Λ_τ критических значений параметра λ, отвечающих фиксированной толщине $\tau > 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots$, обязательно имеет хотя бы одну точку сгущения λ^0 (не зависящую от выбора τ). При этом, как показывает исследование, в большинстве случаев множество Λ_τ локализовано в очень узкой окрестности величины λ^0. Таким образом, критические значения относительного удлинения бруса, соответствующие различным модам выпучивания, весьма близки между собой. По этой причине реальная форма "шейки" в растянутом стержне образуется в результате наложения большого числа гармоник различных порядков и может сильно отличаться от синусоидальной.

Еще одной важной особенностью бифуркации равновесия растянутого бруса, как видно из приведенной выше таблицы, является отсутствие изгибных мод низших порядков при малых и умеренных значениях параметра τ. Оказывается, этот факт имеет универсальный характер, т.е. относится к любому несжимаемому материалу, подчиняющемуся требованиям 1, 2 разд. 1.

Теорема 4. Если несжимаемый упругий материал удовлетворяет ограничениям 1, 2 разд. 1, то при $n\tau \leqslant 1/3$ не существует изгибных форм потери устойчивости бруса, обладающих n узловыми линиями.

Доказательство опускается.

Сопоставление теорем 3, 4 позволяет заключить, что в пределах применимости теоремы 3 для малых значений произведения $n\tau$ (условная граница $n\tau \leqslant 1/3$) имеет место только симметричная потеря устойчивости. Для умеренных значений величины $n\tau$ (примерно $1/3 < n\tau \leqslant 4/3$) антисимметричное выпучивание, наряду с симметричным, чаще всего возможно, но, как правило, происходит при большем удлинении бруса, чем симметричное. Наконец, при больших значениях произведения $n\tau$ ($n\tau > 4/3$) в условиях теоремы 3 наблюдается чередование симметричных и антисимметричных мод при неограниченном возрастании величины $n\tau$.

Заметим, что материалы, удовлетворяющие требованиям теоремы 3, обладают двумя характерными особенностями:

а) потеря устойчивости растянутого бруса имеет место для всех значений $\tau > 0$;

б) минимальное критическое значение $\lambda_{\min}(\tau)$ (для заданной толщины τ) является ограниченной функцией параметра τ на луче $(0, +\infty)$.

Подобные материалы, по аналогии с [7], можно назвать материалами малой жесткости при растяжении. Анализ показывает, что, как и в случае сжатия бруса, ограничения 1, 2 разд. 1, накладываемые на потенциал Π, допускают существование материалов с отличными от *а, б* бифуркационными свойствами.

Примерами могут служить модели (2.21)–(2.23) при значениях упругих постоянных (2.27)–(2.29) соответственно, для которых нарушается свойство *а*. Такие материалы, обладающие "предельной" толщиной, являются материалами повышенной жесткости при растяжении. Другой пример дает потенциал

$$\Pi = d_1\Phi(J_1) + d_2\Phi(J_2) \quad (d_1 > 0, d_2 > 0)$$

$$J_m = [I_m - 1 - \sqrt{(I_m - 3)(I_m + 1)}]/2 \quad (m = 1,2)$$

$$\Phi(x) = \int_x^1 y^{-3/2}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{\beta} \exp\left(\frac{1}{2}y\right)dy, \quad x \in (0,1), \quad \beta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

подчиняющийся требованию *а*, но не удовлетворяющий условию *б*. Следуя [7], логично отнести его к материалам умеренной жесткости при растяжении. Таким образом, проблема классификации материалов, подробно изученная [7] применительно к сжатому брусу, не теряет своей актуальности и в случае растяжения, однако в полном объеме здесь она не рассматривается (из-за недостатка места). Отметим только, что бифуркационные свойства материала при растяжении и сжатии, вообще говоря, неодинаковы.

3. Асимптотическое поведение критических значений деформации и нагрузки при $\tau \to 0$. Как следует из теоремы 4, речь идет о бифуркационных параметрах, отвечающих симметричным модам выпучивания, поскольку для антисимметричных мод в силу указанной теоремы постановка задачи не имеет смысла.

Теорема 5. Допустим, что множество Γ_* непусто, причем $\sup\Gamma_* < 1$. Тогда для любого порядкового номера $n \geq 1$ найдется такое значение $\tau_n > 0$ относительной толщины τ, что при $\tau \leq \tau_n$ существует хотя бы одна симметричная форма потери устойчивости бруса, обладающая n узловыми линиями, при этом для соответствующего критического значения $\gamma_n(\tau)$ параметра γ имеет место асимптотическая формула ($\tau \to 0$)

$$\gamma_n(\tau) = \gamma_* - \gamma_1 k_n^2 \tau^2 - \gamma_2 k_n^4 \tau^4 + O(\tau^6) \tag{3.1}$$

$$\gamma_* = \sup\Gamma_*, \quad k_n = \pi n/2 \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$\gamma_1 = \gamma_*\zeta_1/(3\mu_1), \quad \gamma_2 = \gamma_*^2\zeta_2/(45\mu_1^3), \quad \zeta_1 = \gamma_*(1-\gamma_*^2)$$

$$\zeta_2 = \zeta_1[5\mu_2\zeta_1 + 10\mu_1(2\gamma_*^2 - 1) + 2\gamma_*\mu_1^2]$$

Здесь μ_1, μ_2 – коэффициенты разложения функции $M(\gamma) \equiv \mu + 2\gamma^2$ в ряд Тейлора в точке γ_*:

$$M(\gamma) = \mu_1(\gamma - \gamma_*) + \mu_2(\gamma - \gamma_*)^2 + \ldots$$

Доказательство теоремы опускается.

Замечания. 1°. С физической точки зрения величина γ_* соответствует первой точке максимума λ_* на кривой $Q = Q(\lambda)$, определяющей зависимость растягивающей силы от удлинения бруса.

2°. Если вдобавок материал удовлетворяет всем требованиям теоремы 3, то для вышеупомянутых толщин τ_n ($n = 1, 2, 3,\ldots$) имеет место оценка снизу $\tau_n \geq 1/(3n)$.

3°. В случае неединственности бифуркационной точки для заданных значений n и τ под $\gamma_n(\tau)$ понимается ближайшая к началу отсчета деформации $\gamma = 1$, т.е. отвечающая наименьшему удлинению бруса, при котором возможна форма потери устойчивости с n узловыми линиями.

4°. Учитывая связь между параметрами γ и λ ($\gamma = \lambda^{-2}$), а также соотношение (1.2), можно получить асимптотические формулы для критических значений $\lambda_n(\tau)$ и $q_n(\tau)$, сходные по своей структуре с (3.1). Представляет интерес тот факт, что при $\tau \to 0$ критическое напряжение $q_n(\tau)$, в отличие от случая сжатия [16, 17], стремится к ненулевому пределу, совпадающему со значением величины q для точки максимума λ_*.

5°. **Сравнение асимптотики (3.1) с результатами численного расчета свидетельствует о широком диапазоне ее применимости (примерно $0 < \tau \leqslant 1/n$) и очень высокой точности. В частности, для материала Бидермана со значениями упругих постоянных $d_0 = 0$, $d_1 = 27$, $d_2 = -60$, $d_3 = 80$ вытекающее из (3.1) асимптотическое представление для критического удлинения $\lambda_n(\tau)$ имеет вид**

$$\lambda_n(\tau) = 1{,}176239 + 0{,}004066k_n^2\tau^2 + 0{,}000269k_n^4\tau^4 + \ldots \tag{3.2}$$

При $n = 1$ относительная погрешность формулы (3.2) составляет 0,005% для $\tau = 0{,}5$, 0,026% для $\tau = 0{,}7$ и 0,14% для $\tau = 1{,}0$. Сопоставляя эти данные с полученными ранее результатами [16, 17], приходим к выводу, что область применимости асимптотики (3.1) в три-четыре раза шире, чем у соответствующих формул при сжатии бруса.

4. Анализ форм потери устойчивости. Введем обозначения

$$k = \pi n/2, \quad \xi = k\tau\sqrt{2\gamma+\mu}/2, \quad \eta = k\tau\sqrt{2\gamma-\mu}/2$$

$$\psi^+(\xi) = \operatorname{ch}\xi, \quad \psi^-(\xi) = \operatorname{sh}\xi, \quad K^\pm = K_1^\pm / K_2^\pm$$

$$K_1^\pm = (\mu + 2\gamma^2)\psi^\pm(\xi)\sin\eta + \sqrt{4\gamma^2 - \mu^2}\,\psi^\mp(\xi)\cos\eta \tag{4.1}$$

$$K_2^\pm = (\mu + 2\gamma^2)\psi^\mp(\xi)\cos\eta - \sqrt{4\gamma^2 - \mu^2}\,\psi^\pm(\xi)\sin\eta$$

$$\varphi(\gamma) = \arccos[\gamma(\gamma^2 + 1 + \mu)/|S(\gamma)|] \quad (\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_S^0)$$

В формулах (4.1) берутся одновременно либо верхние, либо нижние знаки. Заметим, что на множестве Γ_* все подкоренные выражения неотрицательны. Для радикалов условимся выбирать неотрицательные ветви.

Теорема 6. Пусть $\gamma \in \Gamma_*$ – бифуркационная точка для заданного значения $\tau > 0$ при симметричном (антисимметричном) выпучивании растянутого бруса, n – порядковый номер соответствующей моды выпучивания с амплитудой прогиба $W_2^+(y)$ ($W_2^-(y)$). Тогда функция $W_2^+(y)$ ($W_2^-(y)$) имеет единственную смену знака по толщине бруса при выполнении условия $2\eta \leqslant \pi + \varphi(\gamma)$ и не менее трех смен знака при нарушении последнего (имеет всегда не менее двух смен знака по толщине бруса). Общее количество смен знака определяется формулой $N^+ = 2n^+ + 1$ ($N^- = 2n^-$), где

$$n^\pm = \operatorname{entier}\left(\frac{l^\pm}{2}\right) + \frac{1 + (-1)^{l^\pm + 1}}{2}\operatorname{sign}|K_1^\pm K_2^\pm| \times$$

$$\times \operatorname{entier}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\operatorname{tg}\eta - K^\pm(\operatorname{th}\xi)^{\pm 1})\right] \tag{4.2}$$

$$l^\pm = \operatorname{entier}\left(\frac{2\eta}{\pi}\right) + 1 - \operatorname{sign}|K_2^\pm| + \frac{1}{2}[\operatorname{sign}(K_1^\pm K_2^\pm) + \operatorname{sign}|K_1^\pm K_2^\pm|]\Lambda^\pm$$

$$\Lambda^+ = \operatorname{sign}(K^+\xi - \eta) + \operatorname{sign}|K^+\xi - \eta|, \quad \Lambda^- = 1$$

Предполагается, что в точках разрыва функция $\operatorname{tg}x$ принимает значение $-\infty$.

Доказательство опускается.

Следствие. Если соблюдается неравенство $n\tau \leqslant 4/3$, то в случае существования симметричной формы выпучивания с n узловыми линиями амплитуда прогиба $W_2^+(y)$ меняет знак только в точке $y = 0$.

Заметим, что это утверждение, как и заключение теоремы 4, универсально в том смысле, что относится к любому несжимаемому материалу, удовлетворяющему ограничениям 1, 2 разд. 1. Таким же свойством обладает и утверждение о наличии как минимум двух смен знака у амплитуды прогиба $W_2^-(y)$.

Формулы (4.1), (4.2) показывают, что с увеличением произведения $n\tau$ параметры $N^{\pm}$, определяющие количество смен знака у амплитуд прогиба $W_2^{\pm}(y)$, могут возрастать неограниченно. В частности, это имеет место в условиях теоремы 3. А так как всегда $N^- \geqslant 2$, то при антисимметричном выпучивании растянутого бруса обязательно существует хотя бы один внутренний слой, сохраняющий при деформировании свою первоначальную форму и размеры. Видимое формоизменение бруса сосредоточено в нижнем и верхнем наружных слоях. Таким образом, изгибная потеря устойчивости носит характер поверхностного выпучивания. Точно так же обстоит дело и при симметричной бифуркации, если $N^+ \geqslant 3$. В противном случае формоизменением охвачена вся область, занимаемая телом, и потеря устойчивости отличается глобальным характером. Как показывает следствие теоремы 6, такая неустойчивость имеет место при малых и умеренных значениях произведения $n\tau$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16497).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Гурвич Е.Л., Лурье А.И.* К теории распространения волн в нелинейно-упругой среде (эффективная проверка условия Адамара) // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 110–116.
4. *Zee L., Sternberg E.* Ordinary and strong ellipticity in the equilibrium theory of incompressible hyperelastic solids // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1983. V. 83. No. 1. P. 53–90.
5. *Зубов Л.М.* Об условиях единственности в малом состояния гидростатического сжатия упругого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 497–506.
6. *Зубов Л.М.* Выпучивание пластинок из неогуковского материала при аффинной начальной деформации // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 632–642.
7. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* Об особенностях потери устойчивости нелинейно-упругого прямоугольного бруса // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 65–83.
8. *Зубов Л.М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 848–852.
9. *Spector S.J.* On the absence of bifurcation for elastic bars in uniaxial tension // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1984. V. 85. No. 2. P. 171–199.
10. *Hart-Smith L.J.* Elasticity parameters for finite deformations of rubbery-like materials // ZAMP. 1966. Bd. 17. N 5. S. 608–626.
11. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
12. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 471 с.
13. *Бидерман В.Л.* Вопросы расчета резиновых деталей // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1958. Вып. 3. С. 40–87.
14. *Alexander H.* A constitutive relation for rubbery-like materials // Intern. J. Engng. Sci. 1968. V. 6. N 9. P. 549–563.
15. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* О признаках выполнимости условия Адамара для высокоэластичных материалов // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 21–31.
16. *Рудев А.Н.* Асимптотическая теория выпучивания упругих плит при боковом сжатии // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 882–891.
17. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* Теория устойчивости толстых упругих плит // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 96–111.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
21.VI.1995