УДК 532.546

© 1996 г. **О.Ю. Динариев**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОКОНДЕНСАТНОЙ СМЕСИ

Рассматриваются цилиндрически-симметричные фильтрационные течения многокомпонентной двухфазной смеси типа «газ – конденсат» с фазовыми переходами. При определенных предположениях, самое сильное из которых – отсутствие порога подвижности для жидкой фазы, найден достаточный признак абсолютной устойчивости в малом для стационарных течений. На основе численных оценок показано, что для реальных фильтрационных течений этот признак устойчивости удовлетворяется.

Известно, что однофазные стационарные фильтрационные течения устойчивы. В теории фильтации многокомпонентной смеси с фазовыми переходами устойчивость стационарных течений полностью не исследована. На основе результатов численного моделирования сообщалось [1, 2] о наблюдении незатухающих колебательных процессов при фильтрации газоконденсатной смеси в окрестности эксплуатационной скважины. В связи с этим возникло мнение, что неустойчивость при фильтрации возможна и, более того, широко распространена на практике.

Ниже показано, что в широком классе случаев стационарные фильтрационные течения газоконденсатной смеси абсолютно устойчивы в малом. Проблема устойчивости относительно конечных возмущений остается открытой.

В разд. 1 исследуется ряд общих свойств течений многокомпонентной двухфазной смеси с фазовыми переходами. В разд. 2 рассмотрена динамика малых возмущений на фоне точных стационарных решений, описанных ранее [3–5]; получен достаточный признак абсолютной устойчивости этих решений. В разд. 3 посредством численных оценок проверено, что в типичных случаях этот критерий удовлетворяется с большим запасом.

1. Рассмотрим $(M+1)$-компонентную смесь, и пусть n_i – соответствующие мольные плотности компонентов. Здесь и далее латинские индексы i, j, k пробегают значения $0,\ldots,M$, греческие индексы α, β – значения $1,\ldots,M$. По повторяющимся индексам везде предполагается суммирование. Будут изучаться только изотермические процессы, и потому для краткости зависимость от температуры всех механических и термодинамических величин опускается.

Из статистической физики [6] известно, что для гомогенных состояний смеси определена свободная энергия на единицу объема $f = f(n_i)$, которая является гладкой и однозначной функцией плотностей компонентов n_i. Выполняются термодинамические соотношения

$$df = \varkappa_i dn_i, \quad f = -p + \varkappa_i n_i \tag{1.1}$$

где $\varkappa_i$ – химические потенциалы, p – давление. Из (1.1) следует равенство Дюгема

$$dp = n_i d\varkappa_i \tag{1.2}$$

Соотношения (1.1) позволяют вычислить по известной свободной энергии химические потенциалы и давление в смеси.

Если функция $f = f(n_i)$ – выпуклая, то гомогенные состояния смеси термодинамически устойчивы в объеме. Для двухфазной системы типа «газ – конденсат» эта функция не является выпуклой. В последнем случае термодинамическая устойчивость гомогенного состояния n_i проверяется рассмотрением всевозможных виртуальных расслоений на фазы n_{i1}, n_{i2}:

$$n_i = sn_{i1} + (1-s)n_{i2} \tag{1.3}$$

где s – объемная доля фазы 1($0 \le s \le 1$). Если величина

$$f^* = sf(n_{i1}) + (1-s)f(n_{i2}) \tag{1.4}$$

оказывается меньше $f(n_i)$, то гомогенное состояние термодинамически неустойчиво. Устойчивым является такое гетерогенное состояние (1.3), которое обеспечивает минимальное значение величины (1.4).

Для двухфазных состояний обозначим n_{ic} и n_{ig} – мольные плотности компонентов в жидкой фазе (конденсате) и газовой фазе соответственно. Переопределим свободную энергию на единицу объема $f = f(n_i)$ в двухфазной области по формуле (1.4), задающей значение свободной энергии в устойчивом гетерогенном состоянии. Таким образом, вместо исходной функции $f = f(n_i)$ будем рассматривать ее выпуклую оболочку, обозначая последнюю тем же символом. Новая свободная энергия – дважды дифференцируемая функция. Однако в отличие от исходной свободной энергии вторые производные от $f(n_i)$ могут иметь скачки при переходе из однофазной области в двухфазную.

Можно убедиться, что при новом определении свободной энергии термодинамические соотношения (1.1), (1.2) по-прежнему выполняются, причем теперь в двухфазной области $\varkappa_i$ и p – химические потенциалы и давление в каждой из фаз.

Поскольку теперь $f = f(n_i)$ – выпуклая функция, то симметричная матрица

$$\alpha_{ij} = \partial\varkappa_i / \partial n_j = \partial^2 f / \partial n_i \partial n_j$$

является неотрицательно определенной. С помощью этой матрицы и соотношения (1.2) можно вычислить производную от давления по полной плотности $n = n_0 + \ldots + n_M$ при фиксированном составе $c_i = n_i/n$:

$$(\partial p / \partial n)_{c_i} = n\alpha_{ij}c_i c_j$$

Эта величина всегда неотрицательна, хотя может испытывать скачки на бинодали. Таким образом, обсуждавшаяся ранее возможность перемены знака сжимаемости для газоконденсатной смеси [1, 2] исключается.

Пусть имеется нестационарное цилиндрически-симметричное фильтрационное течение в однородном изотропном пласте с пористостью m и проницаемостью k в окрестности эксплуатационной скважины. Пусть r – расстояние до оси скважины. Тогда имеют место локальные законы сохранения компонентов [7]:

$$\partial_t(mn_i) + r^{-1}\partial_r(rJ_i) = 0 \tag{1.5}$$

Для потоков J_i в пренебрежении капиллярными силами по закону Дарси справедливы выражения

$$J_i = -kK_i\partial_r p, \quad K_i = f_g n_{ig}\mu_g^{-1} + f_c n_{1c}\mu_c^{-1} \tag{1.6}$$

Величины n_i, n_{ig}, n_{ic} связаны соотношением

$$n_i \Rightarrow sn_{ic} + (1-s)n_{ig}$$

где s – насыщенность порового пространства жидкой фазой. В соотношениях (1.6) $\mu_g = \mu_g(n_{ig})$, $\mu_c = \mu_c(n_{ic})$ – сдвиговые вязкости газа и конденсата соответственно, $f_g = f_g(s)$, $f_c = f_c(s)$ – фазовые проницаемости газа и конденсата.

Поскольку s, n_{ig}, n_{ic} – термодинамические функции плотностей n_i, то система уравнений (1.5) является полной для неизвестных функций $n_i = n_i(t, r)$.

Обсудим граничные условия. Пусть r_w – радиус скважины по долоту, r_0 – радиус контура питания. Наложим условия на давление:

$$p|_{r=r_w} = p_w, \quad p|_{r=r_0} = p_0, \quad p_w < p_0 \tag{1.7}$$

Для газоконденсатных месторождений типична ситуация, когда при исходных термобарических условиях пластовая смесь находится в газовой фазе. При понижении пластового давления в процессе разработки месторождения возникает явление так называемой ретроградной конденсации [8], когда газовая фаза становится термодинамически неустойчивой и выпадает жидкий конденсат. В пластовых условиях конденсат занимает малую часть порового пространства и из-за низких значений фазовой проницаемости может считаться гидродинамически неподвижным. Конденсат приобретает подвижность вблизи эксплуатационных скважин, где он может занимать большую часть порового объема [3–5].

Пусть c_{i0} – состав подвижной (газовой) фазы пластовой смеси, поступающей на контур питания скважины ($c_{i0} > 0$). Если p_d – давление начала конденсации для смеси этого состава, то, вообще говоря, $p_0 \geq p_d$. В случае, когда в пласте выпал кондесат, подвижная фаза насыщена, и $p_0 = p_d$.

Наложим дополнительное граничное условие

$$c_i|_{r=r_0} = c_{i0} \tag{1.8}$$

Введем в рассмотрение новые величины (суммирование от $i = 0$ до $i = M$)

$$n_g = \sum n_{ig}, \quad n_c = \sum n_{ic}$$

$$K = \sum K_i = f_g n_g \mu_g^{-1} + f_c n_c \mu_c^{-1}, \quad C_i = K_i / K$$

Величины C_i в соответствии с определением можно интерпретировать как концентрации компонентов в некоторой смеси, распадающейся при давлении p на те же фазы, что и исходная смесь. Соответствующие полная мольная плотность N, парциальные плотности N_i и доля жидкой фазы S определяются по формулам

$$N = K / (f_g \mu_g^{-1} + f_c \mu_c^{-1}), \quad N_i = NC_i = (1 - S)n_{ig} + Sn_{ic}$$

$$S = f_c \mu_c^{-1} / (f_g \mu_g^{-1} + f_c \mu_c^{-1}) \tag{1.9}$$

Рассмотрим обратную задачу определения параметров исходной смеси n_i по известным значениям C_i, p. Зная свободную энергию для гетерогенных состояний f, по величинам C_i, p можно определить величины n_{ig}, n_{ic}, S. Для вычисления n_i по известным n_{ig}, n_{ic} необходимо найти значение s, для которого имеется уравнение (1.9). Правая часть этого уравнения монотонно зависит от s, однако если есть пороги подвижности для фаз, эта зависимость не будет строго монотонной. Чтобы обеспечить однозначную разрешимость уравнения (1.9) в рассматриваемом классе процессов, когда обязательно присутствует газовая фаза, предположим отсутствие порога подвижности для жидкой фазы.

По поводу этого предположения отметим, что если принимаются во внимание капиллярные силы, при наличии порога подвижности для конденсата стационарное решение неединственно [4, 5]. Следовательно, в последнем случае любое возмущение начальных условий, не выводящее за пределы класса точных стационарных решений, не затухает, и абсолютная устойчивость не может иметь места.

Введем новую координату $\eta = \ln(r/r_w)$ и перепишем задачу (1.5), (1.7), (1.8) в виде

$$m\partial_t(r^2 n_i) - k\partial_\eta(KC_i\partial_\eta p) = 0 \qquad (1.10)$$

$$p|_{\eta=0} = p_w, \quad p|_{\eta=\zeta} = p_d, \quad C_i|_{\eta=\zeta} = c_{i0} \quad \left(\zeta = \ln\frac{r_0}{r_w}\right) \qquad (1.11)$$

Третье граничное условие (1.11) получается из (1.8) при учете неравенства $p_0 \geq p_d$.

Напомним свойства стационарных решений [3–5]. Из (1.10) и третьего граничного условия (1.11) получаем

$$C_i = c_{i0}, \quad K\partial_\eta p = q = Q/(2\pi kh) \qquad (1.12)$$

Постоянная интегрирования Q – дебит скважины, h – продуктивная мощность пласта.

В соответствии с (1.12) давление определяется из обыкновенного дифференциального уравнения $p = p(\eta + \alpha, q, c_{i0})$. Свободные параметры α, q определяются из первых двух граничных условий (1.11).

Итак, если не использовать первых два граничных условия (1.11), можно получить стационарное решение для плотностей в функциональном виде

$$n_i = n_i(\eta + \alpha, \ q, \ c_{j0})$$

Далее будем помечать звездочкой величины, вычисленные для стационарного решения. Определим набор векторных полей $e_i^j = e_i^j(\eta)$, где j – номер поля, i – номер компоненты, по формулам

$$e_i^0(\eta) = \frac{\partial}{\partial\alpha} n_i(\eta + \alpha, Q, c_{j0})|_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial n_i}{\partial\eta}\right)_*$$

$$e_i^\alpha(\eta) = \left(\frac{\partial n_i}{\partial C_\alpha}\right)_{p^*} = m_i^\alpha - m_j^\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial n_j}\right)_* (\partial_\eta p_*)^{-1} e_i^0 \qquad (1.13)$$

$$m_i^\alpha(\eta) = \frac{\partial}{\partial c_{\alpha 0}} n_i(\eta, q, c_{j0})$$

При дифференцировании по концентрациям в формулах (1.13) учитывается, что фактически имеется зависимость только от M величин C_α или $c_{\alpha 0}$ в силу нормировочных равенств $\sum C_i = \sum c_{i0} = 1$.

Очевидно, что векторные поля $e_i^j(\eta)$ задают базис в $(M + 1)$ -мерном пространстве при каждом значении η. По этому базису можно раскладывать любое другое векторное поле. Пусть $\delta n_i = \delta n_i(t, \eta)$ – малые возмущения стационарного решения. Произведем разложение по базису:

$$\delta n_i(t, \eta) = e_i^j(\eta) x_j(t, \eta)$$

и подставим его в динамическое уравнение относительно возмущений, вытекающее из (1.10)

$$m\partial_t(r^2\delta n_i) - k\partial_\eta(\delta KC_i\partial_\eta p + K\delta C_i\partial_\eta p + KC_i\partial_\eta\delta p) = 0$$

Тогда получается система $M + 1$ линейных уравнений относительно $M + 1$ неизвестных функций $x_j(t, \eta)$, описывающих динамику возмущений

$$m(kq)^{-1} r^2 G^j_\alpha \partial_t x_j - \partial_\eta x_\alpha = 0$$
$$m(kq)^{-1} r^2 \rho^j \partial_t x_j - \partial_\eta (\nu^\alpha x_\alpha) - \partial^2_\eta x_0 = 0 \qquad (1.14)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\rho^j = \sum_{i=1}^{M} e^j_i, \quad \nu^\alpha = (\partial \ln K / \partial C_\alpha)_{p^*}, \quad G^j_\alpha = e^j_\alpha - c_{\alpha 0}\rho^j$$

Граничные условия на функции $x_j(t, \eta)$ получаются из (1.11) и имеют вид

$$x_0|_{\eta=0} = 0, \quad x_0|_{\eta=\zeta} = 0, \quad x_\alpha|_{\eta=\zeta} = 0 \qquad (1.15)$$

Если задать какие-либо начальные условия для функций $x_j(t, \eta)$, то задача (1.14), (1.15) станет замкнутой и позволит определить эволюцию возмущений стационарного решения во времени. Однако для исследования устойчивости в малом излишне решать эту задачу в общем виде. В силу независимости коэффициентов в уравнениях от времени, задача (1.14), (1.15) допускает разделение переменных. Достаточно исследовать этот частный класс решений и выяснить, есть ли решения, которые не затухают со временем. Если таких решений нет, то стационарное фильтрационное течение устойчиво в малом. Эта проблема рассматривается в следующем разделе.

2. Для анализа устойчивости придется использовать линейные отображения в различных функциональных пространствах. Введем необходимые определения и обозначения.

В комплексном пространстве C^I, где $I \geq 1$, определим обычным образом скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ и норму $|\cdot|_I$:

$$(v, u)_I = \sum_{a=1}^{I} \bar{v}_a u_a, \quad |u|_I = (u, u)_I^{1/2}, \quad u, v \in C^I$$

Напомним выражения для норм и скалярных произведений в соответствующих пространствах функций на отрезке $[0, \zeta]$ со значениями в C^I[9,10]:

пространство $L^2_{C^I}[0, \zeta]$

$$(\varphi, \psi)_{L,I} = \int_0^\zeta (\varphi(\eta), \quad \psi(\eta))_I d\eta$$

$$\|\varphi\|_{L,I} = (\varphi, \varphi)_{L,I}^{1/2}, \quad \varphi, \psi \in L^2_{C^I}[0, \zeta]$$

пространство $H_{1,C^I}[0, \zeta]$

$$(\varphi, \psi)_{H,I} = (\varphi, \psi)_{L,I} + \zeta^2 (\partial_\eta \varphi, \partial_\eta \psi)_{L,I}$$

$$\|\varphi\|_{H,I} = (\varphi, \varphi)_{H,I}^{1/2}, \quad \varphi, \psi \in H_{1,C^I}[0, \zeta]$$

пространство $L^\infty_{C^I}[0, \zeta]$

$$\|\varphi\|_{\infty,I} = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(\eta)|_I, \quad \varphi \in L^\infty_{C^I}[0, \zeta]$$

Нормы непрерывных линейных отображений, которые будут рассматриваться далее, индуцируются обычным образом нормами линейных пространств, в которых они действуют.

Для линейного оператора B в пространстве C^l будем обозначать символом B^+ соответствующий сопряженный оператор. Напомним полезное неравенство

$$|B|_l \le (\mathrm{Tr}(BB^+))^{1/2} \tag{2.1}$$

В соответствии со сказанным в разд. 1 произведем разделение переменных в задаче (1.14), (1.15):

$$x_0(t,\eta) = e^{i\omega t} z(\eta), \quad x_\alpha(t,\eta) = e^{i\omega t} y_\alpha(\eta)$$

Подставляя эти выражения в соотношения (1.14), (1.15), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$i\omega A y + i\omega v_1 z - \partial_\eta y = 0, \quad (i\omega h_1 + h_2) y + i\omega f_1 z - \partial_\eta^2 z = 0 \tag{2.2}$$

$$y|_{\eta=\zeta} = 0, \quad z|_{\eta=0} = 0, \quad z|_{\eta=\zeta} = 0 \tag{2.3}$$

Здесь: y – вектор-столбец с компонентами y_α, A – $M \times M$-матрица размера с компонентами $A_{\alpha\beta} = m(kq)^{-1} r^2 G_\alpha^\beta$, v_1 – вектор-столбец с компонентами $v_{1\alpha} = m(kq)^{-1} r^2 G_\alpha^0$, h_1 – вектор-строка с компонентами $h_{1\alpha} = (m(kq)^{-1} r^2 \rho^\alpha - \nu^\beta A_{\beta\alpha}$, h_2 – вектор-строка с компонентами $h_{2\alpha} = (-\partial_\eta \nu^\alpha)$, $f_1 = (m(kq)^{-1} r^2 \rho^0 - \nu^\beta v_{1\beta})$.

Наряду с полной задачей (2.2), (2.3) мы будем рассматривать неполную задачу относительно вектор-функции $y(\eta)$ (первое уравнение (2.2) и первое граничное условие (2.3)), которую назовем задачей A.

Помимо предположений, изложенных в разд. 1, примем следующий ряд дополнительных утверждений:

$$(u, Au)_M \ge \lambda(u,u)_M, \quad \lambda > 0, \quad u \in C^M \tag{2.4}$$

$$A = A^+, \quad f_1 > 0 \tag{2.5}$$

Обсудим физический смысл этих условий. В предположении слабой зависимости полной плотности n от концентраций C_α при фиксированном давлении p условие (2.4) означает, что увеличение некоторой концентрации C_α (или линейной комбинации концентраций $\gamma^\alpha C_\alpha$) приводит к увеличению соответствующей концентрации c_α (или соответствующей линейной комбинации концентраций $\gamma^\alpha c_\alpha$). Матричное равенство в (2.5) можно интерпретировать так, что влияние изменения концентрации C_α на концентрацию c_β такое же, как и изменения концентрации C_β на концентрацию c_α. Неравенство в (2.5) в пренебрежении малой величиной $\nu^\beta v_{1\beta}$ сводится к утверждению, что $n_* = n_*(\eta)$ – монотонно возрастающая функция. Положим $f_0 = \min f_1(\eta)$. В соответствии с (2.5) $f_0 > 0$.

Будем искать решение задачи (2.2), (2.3) при $\mathrm{Im}\,\omega \le 0$, что соответствует незатухающим возмущениям. Сосредоточимся вначале на задаче A. Определим матричнозначную функцию $U = U(\eta, \zeta)$, как решение следующей задачи Коши:

$$\partial_\eta U(\eta,\xi) = i\omega A(\eta) U(\eta,\xi), \quad U(\xi,\xi) = 1 \tag{2.6}$$

Лемма 1. При $\eta \le \xi$ справедливо неравенство

$$|U(\eta,\xi)|_l \le \exp(\mathrm{Im}\,\omega\lambda(\xi-\eta))$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(\eta) = \mathrm{Tr}(U(\eta,\xi)U(\eta,\xi)^{+})$$

Используя равенство (2.6), а также (2.4) и равенство из (2.5), получаем

$$\partial_\eta F = -2\,\mathrm{Im}\,\omega\,\mathrm{Tr}(AUU^{+}) \geq -2\,\mathrm{Im}\,\omega\lambda F$$

Отсюда и из известного неравенства Гронуолла [11] выводим неравенство $F(\eta) \leq \leq \exp(2\,\mathrm{Im}\,\omega\lambda(\xi-\eta))$

Применяя неравенство (2.1), получаем утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть $h_0 = h_0(\eta)$ – вектор-строка, являющаяся фиксированным элементом пространства $L^{\infty}_{CM}[0,\zeta]$, $v_0 = v_0(\eta)$ – вектор-столбец, являющийся произвольным элементом пространства $H_{1,C^M}[0,\zeta]$. Рассмотрим линейное отображение из пространства $H_{1,C^M}[0,\zeta]$ в пространство $L^2_C[0,\zeta]$:

$$(Lv_0)(\eta) = \int\limits_{\eta}^{\zeta} h_0(\eta)U(\eta,\xi)v_0(\xi)d\xi \tag{2.7}$$

Это отображение непрерывно. Его норма удовлетворяет неравенствам

$$\|L\| \leq \theta_1, \quad \|L\| \leq \theta_2|\omega|^{-1} \tag{2.8}$$

$$\theta_1 = 2^{-1/2}\|h_0\|_{\infty,M}\,\zeta, \quad \theta_2 = (2 + 2^{1/2} + 3^{-1/2})\|h_0\|_{\infty,M}\,\Gamma_0$$

$$\Gamma_0 = \|A^{-1}\|_{\infty,M^2} + \zeta\|\partial_\eta A^{-1}\|_{\infty,M^2}$$

Доказательство. Оператор L – интегральный, поэтому он непрерывен, как оператор из пространства $L^2_{CM}[0,\zeta]$ в пространство $L^2_C[0,\zeta]$ [9]. Соответствующую норму легко оценить, используя лемму 1 и тот факт, что норма интегрального оператора ограничена сверху нормой ядра в L^2[9]. Проводя вычисления, убеждаемся, что оценка совпадает с числом в правой части первого неравенства (2.8). Далее, поскольку пространство $H_{1,C^M}[0,\zeta]$ вкладывается в пространство $L^2_{CM}[0,\zeta]$, и норма оператора вложения не превосходит единицу, то окончательно получаем первое неравенство (2.8).

Рассматривая задачу (2.6), можно убедиться, что

$$U(\eta,\xi)^{-1} = U(\xi,\eta)$$

Отсюда получаем равенство

$$\partial_\xi U(\eta,\xi) = -i\omega U(\eta,\xi)A(\xi)$$

Это позволяет преобразовать выражение (2.7) с помощью формулы интегрирования по частям:

$$(Lv_0)(\eta) = h_0(\eta)U(\eta,\xi)(-i\omega A(\zeta))^{-1}v_0(\zeta) + h_0(\eta)(i\omega A(\eta))^{-1}v_0(\eta) +$$

$$+\int\limits_{\eta}^{\zeta} h_0(\eta)U(\eta,\xi)\partial_\xi((i\omega A(\xi))^{-1}v_0(\xi))d\xi$$

Оценим норму в $L^2_C[0,\zeta]$ каждого слагаемого. При этом учтем, что $H_{1,CM}[0,\zeta]$ вкладывается в пространство непрерывных вектор-функций [10, 12], причем норма оператора вложения не превосходит числа $\zeta^{-1/2}(1+3^{-1/2})$. Кроме того, снова воспользуемся оценкой для нормы интегрального оператора и результатом леммы 1. Тогда получается второе неравенство (2.8).

Из неравенств (2.8) следует неравенство

$$\|L\| \le 2(\theta_1^{-1} + \theta_2^{-1}|\omega|)^{-1} \tag{2.9}$$

Решение задачи A находится по формуле

$$y(\eta) = i\omega \int_\eta^\zeta U(\eta,\xi)v_1(\xi)z(\xi)d\xi$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (2.2), приходим к интегродифференциальному уравнению:

$$i\omega(i\omega L_1 + L_2)z + i\omega f_1 z - \partial_\eta^2 z = 0 \tag{2.10}$$

$$(L_a z)(\eta) = \int_\eta^\zeta h_a(\eta)U(\eta,\xi)v_1(\xi)z(\xi)d\xi, \quad a = 1,2$$

Пусть Δ – обычное самосопряженное расширение оператора Лапласа ∂_η^2 в пространстве $L^2_C[0,\zeta]$, задаваемое вторым и третьим граничными условиями (2.3) [9, 12]. Положим $\tau = (-\Delta)^{-1/2}$. Очевидно, что τ – непрерывное линейное отображение из $L^2_C[0,\zeta]$ в $H_{1,C}[0,\zeta]$, причем $\|\tau\| \le \zeta(1+\pi^{-2})^{1/2}$. Можно рассматривать τ и как оператор в $L^2_C[0,\zeta]$. Тогда $\|\tau\| \le \zeta\pi^{-1}$.

Сделаем в уравнении (2.10) подстановку $z = \tau Z$. Тогда получаем линейное уравнение для Z в пространстве $L^2_C[0,\zeta]$:

$$Z + TZ = 0 \tag{2.11}$$

$$T = T(\omega) = i\omega V_0(i\omega V_1 + V_2)$$

$$V_0 = (1 + i\omega\tau f_1\tau)^{-1}, \quad V_1 = \tau L_1\tau, \quad V_2 = \tau L_2\tau$$

Теорема. Линейный оператор T является непрерывным в пространстве $L^2_C[0,\zeta]$. Его норма оценивается сверху величиной

$$D = D(\omega) = |\omega|\,|\,1 + i\omega\zeta^2\pi^{-2}f_0|^{-1}\, 2\left(\frac{|\omega|}{\theta_{11}+\theta_{21}|\omega|} + \frac{1}{\theta_{12}+\theta_{22}|\omega|}\right)$$

$$\theta_{1a}^{-1} = 2^{1/2}\zeta^2\pi^{-1}(1+\pi^{-2})^{1/2}\|h_a\|_{\infty,M}\,\Gamma_1$$

$$\theta_{2a}^{-1} = 2(2+2^{1/2}+3^{-1/2})\zeta^2\pi^{-1}(1+\pi^{-2})^{1/2}\|h_a\|_{\infty,M}\,\Gamma_1\Gamma_0$$

$a = 1, 2$

$$\Gamma_1 = \|v_1\|_{\infty,M} + \zeta\|\partial_\eta v_1\|_{\infty,M}$$

Функция $D(\omega)$ ограничена в нижней комплексной полуплоскости. Пусть D_0 – ее максимальное значение. Если $D_0 < 1$, то уравнение (2.11) имеет только нулевое решение и, следовательно, стационарное фильтрационное течение устойчиво.

Доказательство. В соответствии с изложенным все операторы V_a непрерывны в пространстве $L^2_C[0,\zeta]$. Оценка для нормы оператора T получается в результате применения неравенства (2.9) и оценок для нормы оператора τ. Если $D_0 < 1$, то оператор T – сжимающий, и уравнение (2.11) имеет только нулевое решение.

Итак, найдено достаточное условие устойчивости: $D_0 < 1$. Однако оно не является необходимым. Если это неравенство нарушается, то все же может оказаться, что уравнение (2.11) не имеет ненулевых решений. В случае $D_0 \geq 1$ утверждения теоремы могут быть использованы для доказательства устойчивости в определенном диапазоне частот, что часто бывает достаточным для практики.

3. Найденный признак устойчивости может быть полезным только в том случае, если для реальных фильтрационных течений величина D_0 действительно оказывается достаточно малой.

Оценим D_0 по порядку величины для типичных условий работы эксплуатационной скважины на газоконденсатном месторождении. Ограничимся случаем развитого двухфазного течения, когда $p_0 = p_d$ и конденсат занимает значительную часть порового объема. Все оценки будем производить в системе СИ.

Вначале фиксируем геометрические параметры задачи: $r_w \approx 0{,}1$ м, $r_0 \approx 30$ м, $\zeta \approx 5$. Далее зададимся фильтрационноемкостные характеристики $m \approx 0{,}1$, $k \approx 10^{-15}$ м^2 и условия по давлению: пластовое давление $p_0 \approx 5 \cdot 10^7$ Па, депрессия $\Delta p = (p_0 - p_w) \approx 5 \cdot 10^6$ Па.

Величины n_g, n_c могут быть одного порядка, но различаться в несколько раз:

$$n_g \approx n_c \approx \Delta n \approx 10^4 \text{ моль} \cdot \text{м}^{-3}, \quad \Delta n = n_g - n_c \tag{3.1}$$

Типичные порядки величин вязкостей:

$$\mu_g \approx 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \mu_c \approx 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с} \tag{3.2}$$

На основе (3.1), (3.2) видно, что величина K может принимать значения порядка 10^8 моль (Дж · с)$^{-1}$ или 10^9 моль (Дж · с)$^{-1}$. В качестве оценки примем меньшее значение. Тогда находим величину

$$q \approx K\zeta^{-1}\Delta p \approx 10^{14} \text{ моль}\cdot\text{м}^{-3}\,\text{с}^{-1} \tag{3.3}$$

Рассмотрим величину $\partial_\eta n_*$. Полная плотность n_* существенно меняется из-за сильных различий в распределении фаз: вблизи скважины поровое пространство в основном заполнено жидкой фазой, а вдали от скважины – газовой. Поэтому можно положить $\partial_\eta n_* \approx \zeta^{-1}\Delta n$ (см. (3.1)). Теперь с учетом (3.3) легко оценить величину f_1, а следовательно, и величину f_0:

$$f_0 \approx f_1 \approx m(kq)^{-1} r^2 \zeta^{-1} \Delta n \approx 2 \cdot 10^5 \text{ с} \tag{3.4}$$

Величинами ρ^α, а также производными $\partial_\eta A$, $\partial_\eta v_1$, $\partial_\eta \nu^\alpha$ будем пренебрегать.

Рассмотрим матрицу A. Она фактически рассчитывается по матрице $(\partial c_\alpha / \partial C_\beta)_p$. Расчеты по полуэмпирическим уравнениям показывают, что внедиагональные элементы последней матрицы пренебрежимо малы, а диагональные элементы порядка 10^{-1}. Получаем

$$\lambda \approx 10^5 \text{ с}, \quad \|A\|_{\infty, M^2} \approx M\lambda, \quad \Gamma_0 \approx \|A^{-1}\|_{\infty, M^2} \approx M\lambda^{-1} \tag{3.5}$$

Вектор v_1 оценивается аналогично тому, как и величина $\partial_\eta n_*$. В результате получаем

$$\Gamma_1 \approx \|v_1\|_{\infty, M} \approx 10^3 \text{ с} \tag{3.6}$$

Изучим величины v^{α}. Функция K при фиксированном давлении может сильно меняться, когда вектор δC_{α} коллинеарен $(C_{\alpha} - c_{\alpha})$. Однако относительное изменение очень мало. Расчеты показывают, что $\|v\|_{\infty,M} \approx 10^{-3}$. Существенно, что оценка не зависит от M.

С учетом (3.5) теперь получаем $\|h_1\|_{\infty,M} \approx 10^{-3} M\lambda$. Объединяя этот результат с (3.4)–(3.6), находим, что вместо точной функции $D(\omega)$ можно использовать приближенную функцию

$$D_1(\omega) = \alpha_1 |\omega|^2 |1 + i\omega\alpha_2|^{-1} (1 + \alpha_3 |\omega|)^{-1}$$

$$\alpha_1 = 10^7 \ \text{M} \cdot \text{c}^2, \ \ \alpha_2 = 2 \cdot 10^5 \ \text{c}, \ \ \alpha_3 = M^{-1} 10^5 \, \text{c}$$

Очевидно, что при $M \leq 10$ условие устойчивости выполняется. Можно заметить, что с увеличением M поведение функции $D_1(\omega)$ портится. Это не означает, что увеличение количества компонентов смеси разрушает устойчивость. Просто при учете большого количества компонентов нужно применять более тонкие интегральные оценки, которые «чувствовали» бы степень влияния компонента на двухфазное равновесие. Полученный выше признак устойчивости хорошо приспособлен к системе с примерно равным влиянием всех компонентов на фазовое состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митлин В.С.* Автоколебательные режимы течения двухфазных многокомпонентных смесей через пористые среды. // Докл. АН СССР, 1987. Т. 296. № 6. С. 1323–1327.
2. *Mitlin V.S.* Two-phase multicomponent filtration: instabilities, autowaves and retrograde phenomena // J. of Fluid Mech. 1990. V. 220. P. 369–395.
3. *Динариев О.Ю.* Ретроградная конденсация при стационарной радиальной фильтрации // Инж.-физ. ж. 1994. Т. 67. № 1–2. С. 98–102.
4. *Бабейко А.Ю., Динариев О.Ю.* Моделирование ретроградной конденсации при стационарной радиальной фильтрации // Изв. РАН. МЖГ, 1994. № 6. С. 92–97.
5. *Динариев О.Ю.* Многокомпонентные стационарные фильтрационные течения с фазовыми переходами//ПММ, 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 78–85.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.:Наука, 1976. 584 с.
7. *Николаевский В.Н., Бондарев Э.А., Миркин М.И., Степанова Г.С., Терзи В.П.* Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 192 с.
8. *Баталин О.Ю., Брусиловский А.И., Захаров М.Ю.* Фазовые равновесия в системах природных углеводородов. М.: Недра, 1992. 272 с.
9. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570 с.
10. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
11. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
12. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965. 798 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.VIII.1995