

УДК 533.6.011. 72

© 1996 г. Т.А. Журавская, В.А. Левин

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СХОДЯЩИХСЯ И РАСХОДЯЩИХСЯ УДАРНЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ИНТЕНСИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Исследуется движение газа с сильными расходящимися, генерируемыми подводом энергии к газу по степенному закону, и сходящимися ударными волнами в случаях сферической и цилиндрической симметрии. Предполагается, что интенсивный теплообмен обеспечивает температуру, одинаковую по всему объему движущегося газа и равную температуре частиц непосредственно за ударной волной, на которой выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии.

Адиабатическое движение совершенного газа с сильными цилиндрическими и сферическими сходящимися ударными волнами (УВ) хорошо изучено [1–3]. В частности, установлено [3], что при значениях показателя адиабаты $\gamma \in (1; 1,87)$ решение автомодельной задачи со сферической УВ существует и единственно. При $\gamma > 1,87$ единственность нарушается. Подробно изучено движение газа с расходящимися УВ. В частности, известно решение задачи о сильном точечном взрыве при наличии интенсивного теплообмена за УВ [4, 5].

В отличие от [4, 5], в данной работе предполагается выполнение всех законов сохранения на УВ, и в этих условиях изучается влияние гомотермичности на параметры течения и характеристики движения сходящихся УВ, а также расходящихся УВ, генерируемых подводом энергии к газу по степенному закону.

1. Задача о сходящейся ударной волне в совершенном газе при наличии интенсивного теплообмена. Рассмотрим вопрос о распространении сферических и цилиндрических сходящихся УВ в совершенном газе при гомотермическом течении.

Идеализируя реальный процесс, будем считать, что к неограниченному объему газа на бесконечности подведена энергия, в результате чего образовалась сильная УВ (противодавлением пренебрегаем); искомую зависимость радиуса этой УВ от времени t будем обозначать $R(t)$. Предполагаем, что УВ распространяется по покоящемуся газу с постоянной начальной плотностью ρ_0 ; за УВ течение газа непрерывно и одномерно.

В силу гомотермичности течения температура газа T за УВ зависит только от времени. Эта модель описывает газ с бесконечно большой теплопроводностью, так что температура в среде выравнивается за пренебрежимо малое время. Скорость движения газа имеет только радиальную составляющую u и она, как и давление p и плотность ρ , зависит только от времени и радиальной координаты r в сферической (или соответственно цилиндрической) системе координат.

Кроме того, будем считать, что УВ достигает центра симметрии в момент времени $t = 0$, т.е. движению газа до фокусировки отвечают моменты времени $t < 0$.

Таким образом, искомые функции $\rho(r, t)$, $u(r, t)$, $T(t)$ и $p(r, t)$ в области $\{(r, t) : t < 0;$

$r > R(t)$ описываются следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(\nu - 1)\rho u}{r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{R_0 T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0, \quad p = \rho R_0 T$$
(1.1)

где R_0 – газовая постоянная, ν – размерность пространства ($\nu = 3$ – для сферических; $\nu = 2$ – для цилиндрических УВ). Соотношения на скачке имеют вид

$$u(R(t), t) = \frac{2}{\gamma + 1} D(t), \quad \rho(R(t), t) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad T(t) = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 R_0} D^2(t)$$
(1.2)

где $D(t) = \dot{R}(t)$ – скорость УВ, $\gamma > 1$ – показатель адиабаты Пуассона.

В данной постановке задача автомодельна [6], и ее решение естественно искать в виде

$$R(t) = c(-t)^n, \quad n > 0; \quad u(r, t) = \sqrt{\theta_2} D(t) f(\xi)$$

$$\rho(r, t) = \rho_0 g(\xi), \quad T(t) = \theta_2 D^2(t) / R_0; \quad \xi = r / (\sqrt{\theta_2} R(t))$$
(1.3)

с неизвестным показателем автомодельности n ; c и θ_2 – неизвестные положительные постоянные. Подставляя (1.3) в уравнения (1.1), получим систему уравнений

$$f' = \frac{g'}{g} (\xi - f) - (\nu - 1) \frac{f}{\xi}, \quad \frac{g'}{g} = f' (\xi - f) + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) f, \quad p = \rho_0 g(\xi) \theta_2 D^2(t)$$
(1.4)

где $\xi \in (\xi_0; \infty)$, $\xi_0 = 1/\sqrt{\theta_2} > 0$. В новых переменных соотношения на УВ (при $\xi = \xi_0$) примут вид

$$f(\xi_0) = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} = f_0, \quad g(\xi_0) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \theta_2 = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}$$
(1.5)

Видно, что достаточно определить значение параметра n и функцию f , являющуюся на полуинтервале $[\xi_0; \infty)$ решением задачи Коши

$$f' = \frac{f[(\xi - f)\xi(1/n - 1) - (\nu - 1)]}{\xi[1 - (\xi - f)^2]} = F(\xi, f, n), \quad f(\xi_0) = f_0$$
(1.6)

Функция g определяется тогда формулой

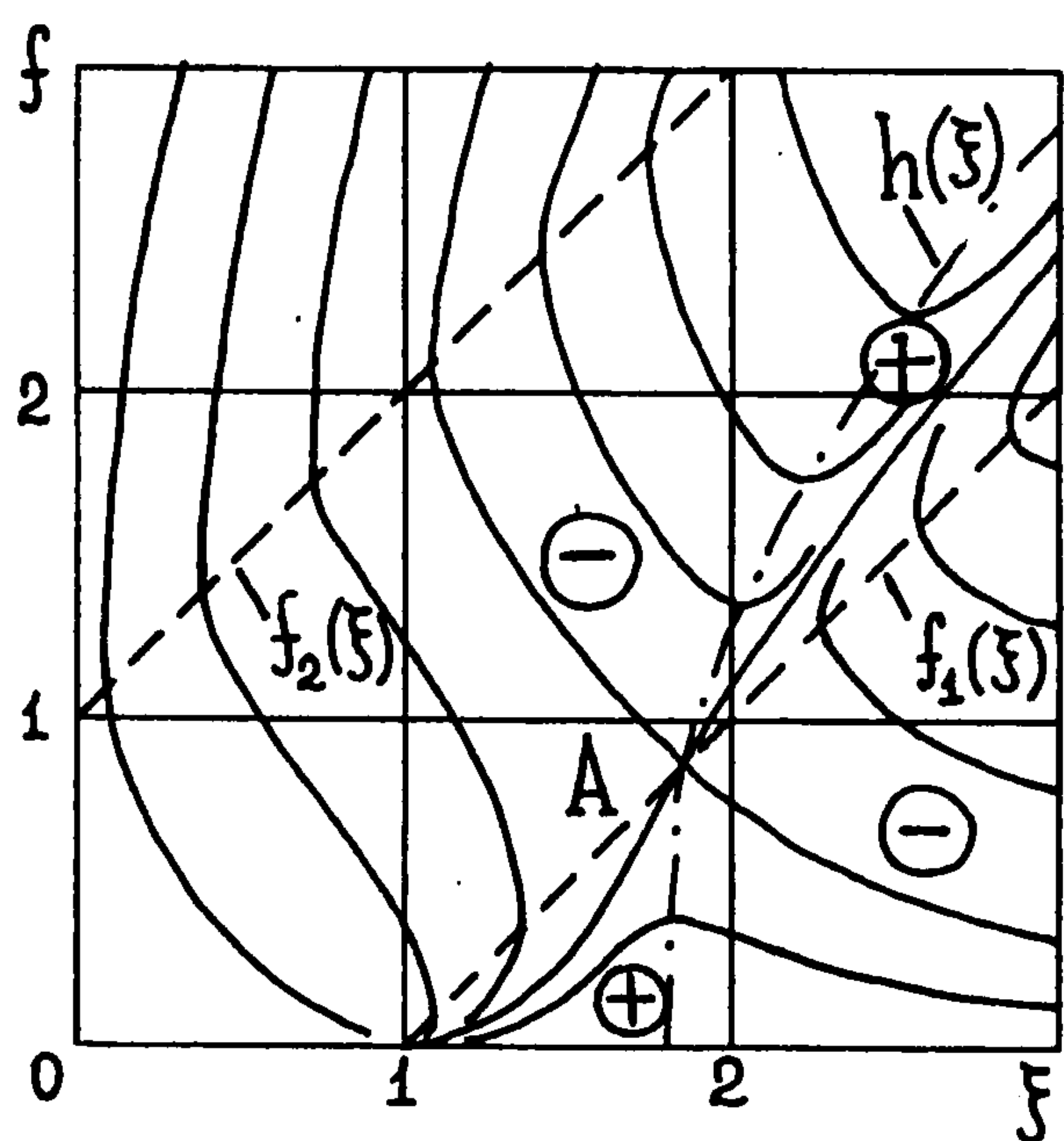
$$g(\xi) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \exp \left\{ -\frac{f^2(\xi)}{2} + \xi f(\xi) - \frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{1 - 2n}{n} \int_{\xi_0}^{\xi} f(x) dx \right\}$$
(1.7)

что решает задачу с точностью до положительной постоянной c , величина которой зависит от способа подвода энергии.

Таким образом, рассматриваемая задача сведена к определению параметра n и решению задачи (1.6) для этого значения параметра. При этом имеются дополнительные условия, налагаемые на искомое решение f , определенное на $[\xi_0; \infty)$:

1) поскольку в момент фокусировки скорость движения за УВ должна быть конечной, то $\xi^{1/n-1} f(\xi) \rightarrow C$ при $\xi \rightarrow \infty$, где C – некоторая постоянная;

2) так как в любой фиксированный момент времени $t < 0$ по мере удаления от УВ модуль скорости частиц газа не должен возрастать, то в силу (1.3) $d|f|/d\xi \leq 0$ при $\xi \in (\xi_0; \infty)$.



Фиг. 1

Так как для всех значений параметров координаты начальной точки (ξ_0, f_0) удовлетворяют неравенствам $\xi_0 > 1, f_0 > 0$, а луч $f=0, \xi > 1$ является ИК, на которой нет особых точек, то интересующая нас ИК при $\xi \geq \xi_0$ лежит в четверти $\{\xi \geq \xi_0, f \geq 0\}$ фазовой плоскости.

Отметим, что в указанной четверти существует особая точка только при $\xi_0 / (\nu - 1 + \xi_0) \leq n < 1$ и при $1 < n \leq \xi_0 / (\xi_0 - (\nu - 1))$ и она единственна; обозначим ее A . В первом случае она является седлом и имеет координаты $(n(\nu - 1) / (1 - n), (n\nu - 1) / (1 - n))$ (лежит на прямой $f = \xi - 1$ и ее координаты – монотонно возрастающие функции параметра n).

Удовлетворяющая указанным условиям ИК не существует при $n \geq 1$.

Действительно, в этой ситуации правая часть уравнения (1.6) положительна при всех $0 < f < \xi - 1$. В силу условия 1 при достаточно больших значениях ξ искомая ИК должна лежать ниже прямой $f = \xi - 1$, и, следовательно, на ней $f'(\xi) > 0$, что противоречит условию 2.

Рассмотрим теперь случай $n \in (0; 1)$. В этой ситуации правая часть F уравнения (1.6) отрицательна в точках первой четверти, лежащих правее прямой $f = \xi - 1 = f_1(\xi)$ и кривой $f = \xi - (\nu - 1) / (\xi(1/n - 1)) = h(\xi)$ (на этой кривой заданное уравнением (1.6) векторное поле горизонтально). Между этими линиями $F(\xi, f, n) > 0$ и, в силу условия 2, интересующая нас ИК не может заходить в эту зону. Левее этих линий и правее прямой $f = \xi + 1 = f_2(\xi)$ знак правой части (1.6) опять отрицателен (фиг. 1). Из уравнения (1.6) так же можно получить, что вдоль любой ИК в области $0 < f < \min\{\xi - 1; h(\xi)\}$ $f(\xi) \sim C\xi^{(n-1)/n}$ при $\xi \rightarrow \infty$ с некоторой положительной постоянной C , тогда $f(\xi)$ удовлетворяет условию 1.

Начальная точка (ξ_0, f_0) лежит на кривой $\xi = f + 1/f$, причем при $1 < \gamma < 3$ она расположена выше прямой $f = \xi - 1$, при $\gamma > 3$ – ниже этой прямой, а при $\gamma = 3$ является точкой их пересечения.

Пусть $1 < \gamma < 3$. Тогда интересующая нас ИК, очевидно, должна проходить через особую точку. Следовательно, $n \in [\xi_0 / (\nu - 1 + \xi_0); 1)$, особая точка – седло, а рассматриваемая ИК – сепаратриса.

Для любых фиксированных $\gamma \in (1; 3)$ и $\nu = 2; 3$ существует и единственно значение параметра n , при котором ИК (1.6), выходящая из точки (ξ_0, f_0) , является рассматриваемой сепаратрисой седла A , координаты которого обозначим $(\xi_A(n), f_A(n))$. Заметим, что так как координата $f_A(n)$ должна быть не больше f_0 , то имеет смысл

Покажем, что при $\gamma \in (1; 3)$ эти дополнительные условия однозначно определяют значения параметра n , а следовательно, и все характеристики рассматриваемого движения; при $\gamma \geq 3$ автомодельный параметр n может принимать любые значения из промежутка $(0; (\gamma + 1) / (\gamma + 1 + 2(\nu - 1))]$.

При произвольном значении автомодельного параметра $n > 0$ и при $\nu = 2; 3$ рассмотрим интегральную кривую (ИК) уравнения (1.6), выходящую из точки $(\xi_0, f_0) = ((\gamma + 1) / \sqrt{2(\gamma - 1)}, \sqrt{2} / (\gamma - 1))$, и определим те значения параметра n , при которых соответствующая значениям $\xi \geq \xi_0$ часть этой ИК является графиком функции $f = f(\xi)$, определенной на полуоси $\xi \geq \xi_0$ и удовлетворяющей условиям 1 и 2.

рассматривать только следующие значения параметра n :

$$n_1 = \frac{\xi_0}{\nu - 1 + \xi_0} \leq n \leq \frac{f_0 + 1}{\nu + f_0} = n_2 \quad (n_1 < n_2) \quad (1.8)$$

Сначала докажем единственность искомого значения параметра n . Предположим, что существует два различных значения параметра n : n_* и n_{**} (положим, что $n_* > n_{**}$), при которых сепаратриса седла A с отрицательным углом наклона касательной выходит из одной точки (ξ_0, f_0) . Рассмотрим множество точек пересечения этих сепаратрис (для $n = n_*$ и для $n = n_{**}$); все они, очевидно, лежат в треугольнике $\Delta = \{\xi - 1 < f \leq f_0, \xi \geq \xi_0\}$. Обозначим через (ξ_*, f_*) ту из точек пересечения, которая имеет наибольшую абсциссу. Можно показать, что такая точка существует.

Так как $\xi_A(n_*) > \xi_A(n_{**})$, то сравнение угловых коэффициентов наклона касательных в точке (ξ_*, f_*) к этим сепаратрисам дает неравенство $F(\xi_*, f_*, n_*) \geq F(\xi_*, f_*, n_{**})$, которое противоречит тому, что $\partial F / \partial n < 0$ во всем треугольнике Δ , а тем самым и в точке (ξ_*, f_*) . Полученное противоречие доказывает единственность искомого значения n .

Отметим, что на самом деле доказано несколько более сильное утверждение: отвечающие различным значениям параметра $n \in [n_1; n_2]$ сепаратрисы седла A с отрицательным углом наклона касательной не могут пересекаться в полосе $\xi > f > \xi - 1$.

Докажем теперь существование искомого значения параметра n .

Предположим, что не существует такого значения n , при котором ИК уравнения (1.6), проходящая через точку (ξ_0, f_0) , является сепаратрисой седла A с отрицательным углом наклона касательной. Тогда для любого значения n , удовлетворяющего неравенствам (1.8), ИК, выходящая из точки (ξ_0, f_0) , при $\xi > \xi_0$ либо проходит выше рассматриваемой сепаратрисы седла (множество значений таких n обозначим через N_+), либо ниже ($n \in N_-$); $[n_1; n_2] \subset \{N_+ \cup N_-\}$ и $N_+ \cap N_- = \emptyset$. Прежде всего, так как при $n = n_1$ имеем $\xi_A(n_1) = \xi_0$, а $f_A(n_1) < f_0 = f(\xi_0)$, то $n_1 \in N_+$. При $n = n_2$ имеем $\xi_A(n_2) > \xi_0$, а $f_A(n_2) = f_0 = f(\xi_0)$; поэтому $n_2 \in N_-$. Следовательно, множества N_+ и N_- не пусты.

В силу непрерывной зависимости правой части (1.6) от параметра n можно показать, что если некоторое значение n принадлежит множеству N_+ , то существует некоторая окрестность этого значения, также принадлежащая рассматриваемому множеству; аналогично любое $n \in N_-$ принадлежит множеству N_- вместе с некоторой своей окрестностью. Таким образом, получаем, что отрезок $[n_1; n_2]$ покрывается двумя непустыми открытыми непересекающимися множествами, что невозможно. Итак, существование искомого значения параметра n доказано.

Если $\gamma = 3$, то при $0 < n < 2/(\nu + 1)$ точка (ξ_0, f_0) лежит на прямой $f = \xi - 1$ выше точки A и ветвь ИК, лежащая в области $0 < f < \xi - 1$, является искомой ИК. При $n = 2/(\nu + 1)$ точка (ξ_0, f_0) совпадает с точкой A . Функция, график которой содержит сепаратрису, проходящую в области $0 < f < \xi - 1$, является искомой зависимостью f . При $n \in (2/(\nu + 1); 1)$ функция $f(\xi)$ вдоль ИК, выходящей из точки (ξ_0, f_0) , как легко видеть, не удовлетворяет условию 2.

Пусть теперь $\gamma > 3$. Тогда если $n \in (0; (\gamma + 1)/(\gamma + 1 + 2(\nu - 1)))$, то точка (ξ_0, f_0) находится в области, где $0 < f \leq h(\xi)$ и $f < \xi - 1$, и выходящая из нее ИК, очевидно, удовлетворяет требуемым условиям. Если же $(\gamma + 1)/(\gamma + 1 + 2(\nu - 1)) < n < 1$, то точка (ξ_0, f_0) попадает в область $f > h(\xi)$ и не выполняется условие 2.

Итак, доказано, что для любых значений $1 < \gamma < 3$ и $\nu = 2; 3$ автомодельное решение задачи, удовлетворяющее наложенным ограничениям, существует и единственно. При этом можно показать, что при увеличении γ значение искомого автомодельного параметра уменьшается.

Для некоторых γ значения n численно определены. Результаты счета приведены в табл. 1. В скобках даны для сравнения показатели автомодельности в случае адиабатического течения газа [7]. При $\gamma \geq 3$ задача имеет бесконечное множество авто-

модельных решений. Отметим, что в случае адиабатического течения со сферической симметрией [3] «пороговое» значение γ , после которого нарушается единственность, равно 1,87.

Отметим, что в силу наложенных ограничений, все возможные значения n меньше единицы, а соответствующие им функции $f(\xi)$ удовлетворяют условию

$$f(\xi) \sim C\xi^{-(1-n)/n} \text{ при } \xi \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

с некоторой положительной постоянной C . Тогда, используя (1.3), получим, что в любой фиксированный момент времени $t \neq 0$ в области течения газа за УВ модуль скорости стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ пропорционально $r^{-(1-n)/n}$.

Функция $g(\xi)$ (из (1.4)) удовлетворяет уравнению

$$\frac{g'}{g} = \frac{f[(1/n-1)\xi - (v-1)(\xi-f)]}{\xi[1-(\xi-f)^2]} \quad (1.10)$$

Используя свойства найденных функций $f(\xi)$, можно получить, что при $1 < \gamma < 3$ функция $g(\xi)$ – монотонно возрастающая на $[\xi_0; \infty)$. В этом случае в любой фиксированный момент времени в области течения газа за УВ плотность, а значит, и давление, являются возрастающими функциями. В случае, когда $\gamma \geq 3$, при $n \in (0; 1/v]$ в любой фиксированный момент времени плотность и давление – монотонно убывающие функции координаты r ; при $n \in [(\gamma+1)/(v(\gamma-1)+2); (\gamma+1)/(\gamma+1+2(v-1))]$ – монотонно возрастающие функции пространственной координаты; в случае $n \in (1/v; (\gamma+1)/(v(\gamma-1)+2))$ рассматриваемые характеристики при увеличении r сначала убывают, а затем возрастают.

Графики зависимости $u(r, t)/D(t)$ (сплошные линии) и $p(r, t)/(\rho_0 D^2(t))$ (штриховые линии) от $R(t)/r$ в фиксированный момент времени в случае течения со сферической симметрией для некоторых значений γ приведены на фиг. 2.

Для определения поведения $g(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$, используя (1.9) и (1.10), получим уравнение

$$\frac{g'}{g} = -\left(\frac{1-n}{n} - (v-1)\right) \frac{C}{\xi^{1+1/n}}$$

Видно, что при $\xi \rightarrow \infty$ $g(\xi) \rightarrow g_{np} \geq 0$.

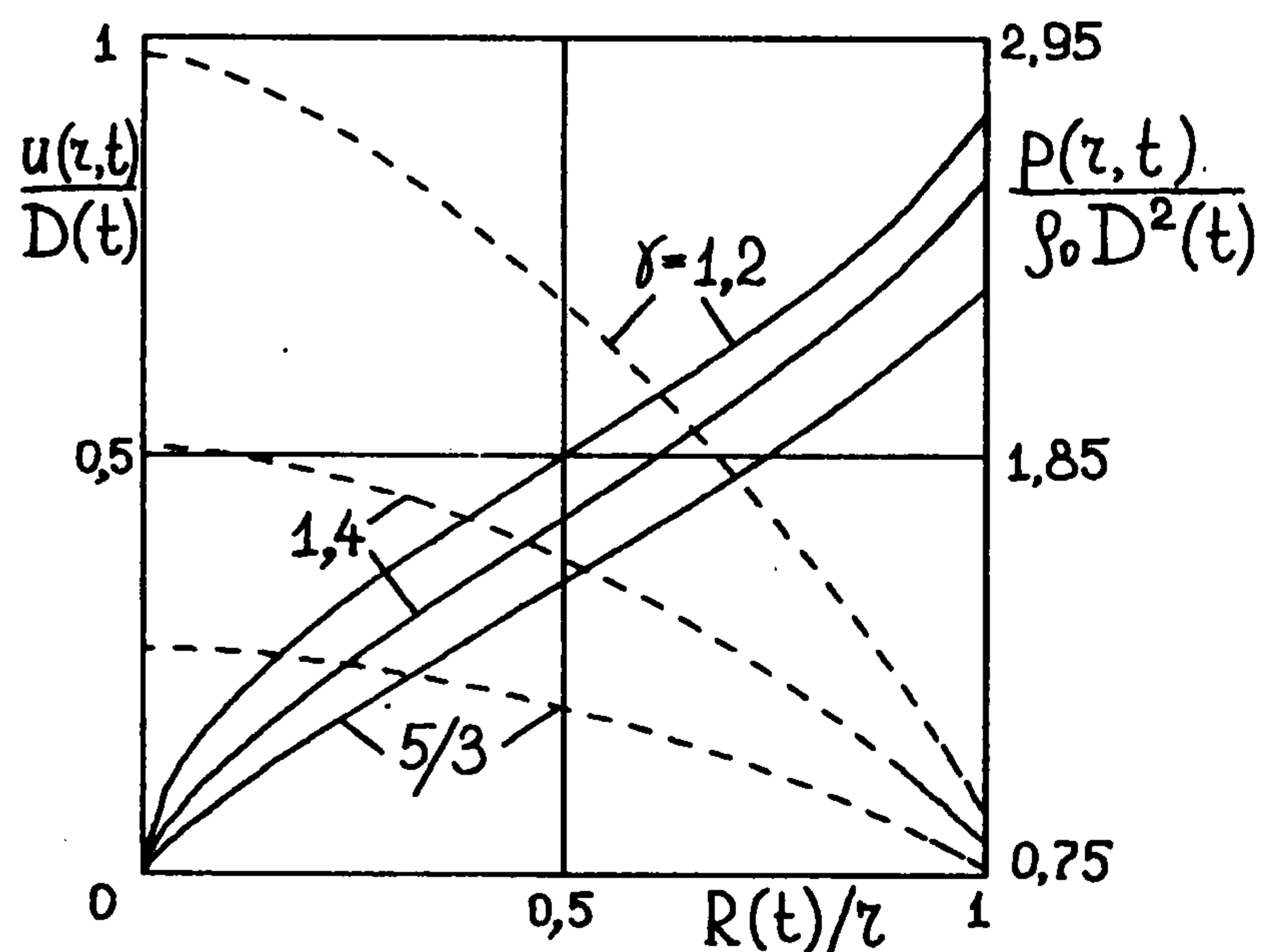
В момент фокусировки, при $t = 0$, наблюдается следующая картина: $R(t) = 0$, следовательно, из (1.3) при $r > 0$ имеем $\xi = \infty$; $u(r, 0) = Cr^{-(1-n)/n}$, где C – некоторая постоянная; $\rho(r, 0) = \rho_{np}$. Значения отношения ρ_{np}/ρ_0 для некоторых значений параметра γ приведены в табл. 2. В скобках даны значения ρ_{np}/ρ_0 для адиабатического течения газа [8]. Видно, что в рассматриваемом случае среда сжимается меньше, чем при адиабатическом процессе.

Таблица 1

Таблица 2

γ	$v = 2$	$v = 3$	γ	$v = 2$	$v = 3$
5/3	0,722 (0,816)	0,559 (0,688)	5/3	5,9	7,3 (9,55)
1,4	0,753 (0,835)	0,597 (0,717)	1,4	10,2	13,5 (20,1)
1,2	0,797 (0,861)	0,656 (0,757)	1,2	23,2	35,2

В центре симметрии выполняется условие на разрыве. В силу того, что возможны лишь значения $n < 1$, имеем $D(0) = \infty$. Тогда из (1.2) $u(0, 0) = \infty$ и $T(0) = \infty$. Следовательно, в момент фокусировки давление в пространстве бесконечно за счет бесконечно большого возрастания температуры. Фокусировка сходящейся УВ с учетом лучистого теплообмена качественно рассмотрена в [9], где получено, что кумуляция



Фиг. 2

энергии в момент фокусировки неограничена за счет бесконечно большого возрастания плотности, а температура при этом остается конечной.

Рассмотренную задачу можно решить приближенным методом Честера – Чиснелла – Уизема [7]. Используя его, при гомотермическом движении газа за УВ бесконечно большой интенсивности в канале с переменной площадью поперечного сечения $A(r)$ можно получить уравнение для скорости волны

$$\frac{k(\gamma)}{D} \frac{dD}{dr} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dr} = 0, \quad k(\gamma) = 1 + \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

Отсюда следует, что $D = CA^{-1/k(\gamma)}$, где C – постоянная.

Применим полученный результат к сходящимся сферическим и цилиндрическим УВ, взяв $A(r) = Cr^2$ и $A(r) = Cr$ соответственно, где C – произвольная постоянная. Получим, что скорость D пропорциональна $r^{-(\nu-1)/k(\gamma)}$. Для автомодельного решения из (1.3) видно, что скорость D пропорциональна $r^{-(1-n)/n}$. В табл. 3 приведены для сравнения показатели степеней $(1-n)/n$ и $(\nu-1)/k(\gamma)$ при некоторых значениях γ . Относительная величина ошибки между приближенными и точными значениями показателя степени не превосходит 0,0855, т.е. приближенный метод улавливает основную особенность течения.

Таблица 3

γ	$\nu = 2$		$\nu = 3$	
	$1/n - 1$	$1/k$	$1/n - 1$	$2/k$
5/3	0,385	0,366	0,789	0,732
1,4	0,328	0,309	0,675	0,618
1,2	0,255	0,240	0,525	0,481

Таким образом, сходящаяся УВ в случае гомотермического движения газа реагирует прежде всего на изменяющуюся геометрию течения. Остальные возмущения оказывают сравнительно малое влияние.

2. Нестационарное движение совершенного газа в условиях интенсивного теплообмена при подводе энергии по степенному закону. Рассмотрим неограниченный объем покоящегося совершенного газа с постоянной начальной плотностью ρ_0 и постоянным давлением p_0 , к которому, начиная с момента времени $t = 0$, подводится энергия по закону $E(t) = E_0 t^k$, где $E(t)$ – полное количество энергии, подведенное за интервал

времени $[0; t]$, E_0 – фиксированное положительное число, $k = \text{const} > 0$. Степенной закон подвода энергии осуществляется соответствующим движением расширяющегося из центра симметрии сферического поршня, искомую зависимость радиуса которого от времени будем обозначать $r_p(t)$, т.е.

$$r_p(t)|_{t=0} = 0, \quad dr_p(t)/dt \geq 0 \quad \text{при} \quad t > 0$$

В результате этого по невозмущенному газу распространяется сильная УВ, искомую зависимость радиуса которой от времени будем обозначать $R(t)$ (начальным давлением p_0 пренебрегаем, т.е. $p_0 = 0$).

Предположим, что между поршнем и УВ течение газа непрерывно и одномерно. В силу гомотермичности температура T в рассматриваемой области зависит только от времени.

Искомые функции: плотность $\rho(r, t)$, радиальная составляющая скорости $u(r, t)$, температура $T(t)$ и давление $p(r, t)$ удовлетворяют в области $\{(r, t) : t > 0, r_p(t) < r < R(t)\}$ уравнениям (1.1) при $\nu = 3$, условию непротекания на поршне (при $r = r_p(t)$) и соотношениям на УВ (1.2).

Заметим, что гомотермическое движение газа, вытесняемого расширяющимся по степенному закону поршнем, было исследовано в случае, когда закон сохранения энергии выполняется во всем пространстве и не выполняется на УВ [10].

Движение поршня осуществляется так, что для любого момента времени t работа, совершенная им за промежуток времени $[0; t]$, равна $E_0 t^k$. Тогда с учетом граничного условия на поршне получим

$$4\pi \int_0^t p(r_p(x), x) u(r_p(x), x) r_p^2(x) dx = E_0 t^k \quad (2.1)$$

Возьмем E^0 такое, что $E_0 = \alpha E^0$, где величина α выбрана так, что зависимость радиуса УВ от времени определяется формулой

$$R(t) = (E^0 / \rho_0)^{1/5} t^{(2+k)/5}$$

В силу автомодельности задачи решение будем искать в виде

$$r_p(t) = \lambda_p R(t), \quad u(r, t) = \sqrt{\theta_2} D(t) f(\xi), \quad \rho(r, t) = \rho_0 g(\xi) \quad (2.2)$$

$$T(t) = \theta_2 D^2(t) / R_0, \quad p(r, t) = \rho_0 D^2(t) \psi(\xi); \quad \xi = r / (\sqrt{\theta_2} R(t))$$

где $f(\xi)$, $g(\xi)$, $\psi(\xi)$ – неизвестные функции, λ_p и θ_2 – некоторые положительные постоянные, $D(t) = \dot{R}(t)$ – скорость распространения УВ.

Подставив (2.2) в уравнения (1.1), получим систему уравнений

$$f' = \frac{g'}{g} (\xi - f) - 2 \frac{f}{\xi}, \quad \frac{g'}{g} = f' (\xi - f) + \frac{3-k}{2+k} f, \quad \psi(\xi) = g(\xi) \theta_2 \quad (2.3)$$

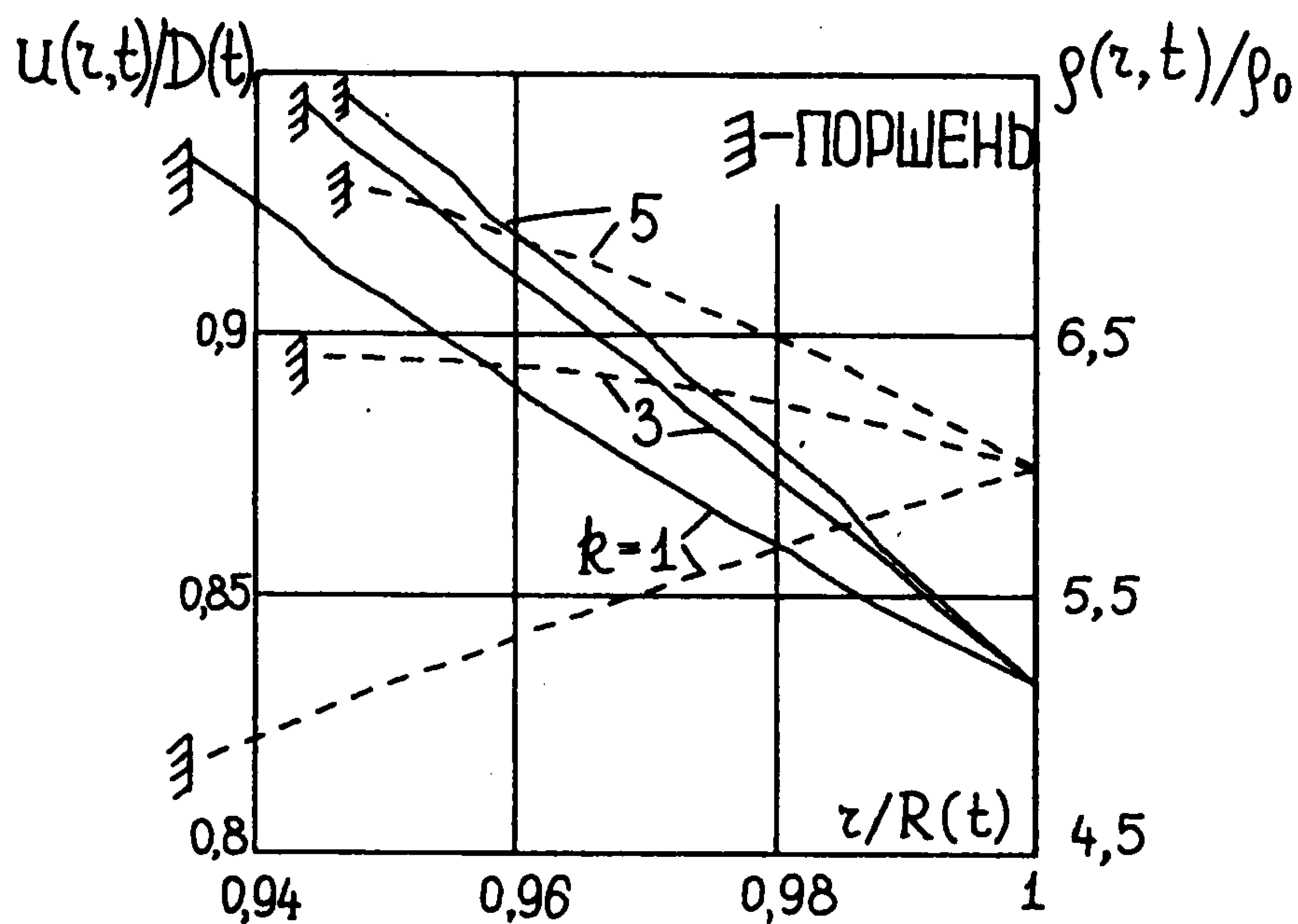
где $\xi \in (\xi_p, \xi_0)$, $\xi_p = \lambda_p / \sqrt{\theta_2}$, $\xi_0 = 1 / \sqrt{\theta_2}$.

На УВ (при $\xi = \xi_0$) имеем соотношения (1.5). Условие на поршне (при $\xi = \xi_p$) примет вид

$$f(\xi_p) = \xi_p \quad (2.4)$$

Учитывая уравнения (2.3) и (2.4), соотношение (2.1) в новых переменных перепишем в виде

$$\alpha = 4\pi \xi_p^3 \theta_2^{5/2} \left(\frac{2+k}{5} \right)^3 g(\xi_p) \frac{1}{k} \quad (2.5)$$



Фиг. 3

Таким образом, достаточно определить функцию $f(\xi)$, являющуюся решением задачи Коши (1.6) при $n = (2 + k)/5$, $\nu = 3$ (задача А) на отрезке $[\xi_p; \xi_0]$ ($\xi_p \neq 0$ и удовлетворяет уравнению (2.4)). Функция $g(\xi)$ задается тогда формулой (1.7) (при $n = (2 + k)/5$), что однозначно решает сформулированную выше задачу.

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к определению функции f , являющейся решением задачи А на отрезке $[\xi_p; \xi_0]$, при этом положительная величина ξ_p должна удовлетворять условию (2.4).

Анализируя ИК дифференциального уравнения задачи А, можно показать, что для любого значения параметра $k > 0$ и любого $\gamma \in (1; 5/3]$ решение задачи существует и единственно. Для этих значений параметра γ ИК, выходящая из точки (ξ_0, f_0) , при $\xi \in [\xi_p; \xi_0]$ лежит в первой четверти в той части области $\xi - 1 < f < \xi$, где правая часть уравнения задачи А меньше нуля. Поэтому в любой фиксированный момент времени t скорость – монотонно убывающая функция координаты r . Кроме того, можно показать, что для любого фиксированного γ из рассматриваемого промежутка в произвольный момент времени t

$$\frac{r_p(t, k_1)}{R(t, k_1)} \leq \frac{r_p(t, k_2)}{R(t, k_2)} \text{ при } k_2 > k_1$$

Функция $g(\xi)$ (из (2.3)) удовлетворяет уравнению

$$\frac{g'}{g} = \frac{f[-2(\xi - f) + (3 - k)\xi / (2 + k)]}{\xi[1 - (\xi - f)^2]}$$

используя которое, из (2.2) получим, что для любого фиксированного $\gamma \in (1; 5/3]$ при $k \geq 3$ в произвольный фиксированный момент времени $t > 0$ плотность и давление – убывающие функции координаты r , при $0 < k \leq (4f_0 - \xi_0)/(3\xi_0 - 2f_0)$ – возрастающие функции, при остальных значениях параметра k плотность и давление достигают своего наибольшего значения внутри области течения между поршнем и УВ. Температура T движущегося за УВ газа пропорциональна $t^{2(k-3)/5}$.

Рассмотренная задача была численно решена при $\gamma = 1.4$. На фиг. 3 приведены графики зависимости $u(r, t)/D(t)$ (сплошные кривые) и $\rho(r, t)/\rho_0$ (штриховые кривые) от $r/R(t)$ при разных значениях k .

Из закона сохранения энергии можно определить количество потерянной энергии за интервал времени $[0; t]$:

$$q(t, k) = E_0 t^k - 4\pi \int_{r_p(t,k)}^{R(t,k)} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) r^2 dr$$

Путем численного счета определены значения следующих величин:

$$\tilde{r}_p = \frac{r_p(t)}{r_0(t)}, \quad \tilde{R} = \frac{R(t)}{r_0(t)}, \quad \tilde{q} = \frac{q(t, k)}{E_0 t^k}$$

где $r_0(t) = (E_0 / \rho_0)^{1/5} t^{(2+k)/5}$ (\tilde{r}_p и \tilde{R} – безразмерные радиусы поршня и УВ) при некоторых значениях k . Результаты приведены ниже

k	0	1	3	3,154	5
\tilde{R}	0,000	0,924	0,796	0,787	0,705
\tilde{r}_p	0,000	0,863	0,751	0,743	0,667
\tilde{q}	1,000	0,258	0,008	0,000	-0,633

Оказывается, что существует значение $k_* = 3,15408$, такое, что при $k = k_*$ течение газа адиабатическое ($q(t, k_*) = 0$). При $k < k_*$ происходит излучение энергии ($q(t, k) > 0$) за пределы рассматриваемой области; в предельном случае, когда $k \rightarrow 0$, поршень двигаться не будет, и вся подведенная к газу энергия излучается. При $k > k_*$ в любой момент времени энергия газа больше полной энергии, подведенной к этому времени к системе. Такой процесс возможен лишь при дополнительном подводе энергии извне ($q(t, k) < 0$).

Таким образом, рассмотренное ранее [4] решение задачи о мгновенном точечном взрыве ($E(t) = E_0$) не является предельным для полученного семейства решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes oder der Zylinderachse // Luftfahrtforschung. 1941. Bd. 19. № 9. S. 302–312.
2. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
3. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 2. С. 3–23.
4. Коробейников В.П. Задача о сильном точечном взрыве при нулевом градиенте температуры // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 2. С. 271–273.
5. Рыжов О.С., Таганов Г.И. Второй предельный случай задачи о сильном взрыве // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 545–548.
6. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 432 с.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. Забабахин Е.И., Симоненко В.А. Сходящаяся ударная волна в теплопроводном газе // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 334–337.
10. Мельникова Н.С. О неустановившемся гомотермическом движении газа, вытесняемого поршнем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1966. Т. 87. С. 86–105.