УДК 531.36;539.3

© 1996 г. В.С. Сергеев

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ОЦЕНКЕ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Для систем с последействием, описываемых интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерры решается задача об устойчивости по первому приближению с применением идей и методов, разработанных Ляпуновым [1] в теории устойчивости дифференциальных уравнений и получивших дальнейшее развитие применительно к теории нелинейных колебаний [2, 3].

Изучению вопросов устойчивости и существования решений различных типов уравнений с последействием и функционально-дифференциальных уравнений посвящено большое число работ, результаты которых в значительной мере нашли отражение в [4–8]. Отметим, что при анализе устойчивости большое распространение получил метод функционалов Ляпунова [4, 5, 9].

Рассматривались [10–13] интегродифференциальные уравнения типа Вольтерры, экспоненциально устойчивые в первом приближении, с нелинейностями, представимыми голоморфными функциями от переменных задачи и заданных функционалов. Общее решение в окрестности асимптотически устойчивого нулевого решения представлялось рядами первого метода Ляпунова. При этом строилось мажорирующее уравнение, использующее мажоранту для нелинейности в форме степенного ряда с неотрицательными коэффициентами (мажоранту Коши). Мажорирующее уравнение применялось для получения оценок области притяжения.

В данной работе обсуждается вопрос о возможности уточнения оценок области притяжения при использовании в качестве мажорирующих функций мажорант Ляпунова [3] и построения общего решения методом последовательных приближений. Одновременно расширяется класс нелинейных функций, входящих в уравнение, за счет отказа от требования голоморфности.

Пусть система с последействием задается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + \int_{t_0}^{t} K(t,s)\,x(s)\,ds + F(x,y,t), \quad x \in R^n, \quad y \in R^m \tag{1}$$

в котором непрерывные $n \times n$ – матрицы $A(t)$, $K(t, s)$, определенные соответственно на множествах $I = \{t \in R : t \geqslant t_0\}$ и $I_1 = \{(t, s) \in R^2 : t_0 \leqslant s \leqslant t < +\infty\}$, имеют ограниченные элементы. Переменная y определяется соотношением

$$y = \int_{t_0}^{t} K_1(t,s)\,f(x,s)\,ds \tag{2}$$

с ядром $K_1(t, s)$ того же типа, что и $K(t, s)$, и вектор-функцией $f(x, t) = \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_m)$, заданной на множестве $B_1(x) \times I$, где $B_1(x) = \{x \in R^n : \|x\| < R_1\}$ для некоторого $R_1 > 0$, принадлежащей классу C^1 по x, непрерывной, ограниченной по $t \in I$ и такой, что $f(0, t) \equiv 0$. Вектор-функция $F(x, y, t) = \mathrm{col}(F_1, \ldots, F_n)$: $B_2(x, y) \times I \to R^n$, где $B_2(x, y) = \{x \in R^n, y \in R^m : \|x\| < R_1, \|y\| < R_2\}$ для заданных $R_i > 0$ $(i = 1, 2)$, – класса C^1 по x, y

и непрерывна, ограничена по $t \in I$, причем $F(0, 0, t) \equiv 0$. Кроме того, вектор-функция $F(x, y, t)$ такова, что при замене переменной x на εx (в том числе и в выражении для y; ε – параметр) она переходит в вектор-функцию F', обладающую свойством: $\partial F'/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=0} = 0$.

Рассмотрим задачу Коши с начальным значением $x(t_0) = x_0$. Будем в дальнейшем использовать следующее обозначение. Пусть B – матрица (вектор). Символ B_* будет означать матрицу (вектор), каждый элемент (компонента) которой – модуль соответствующего элемента (компоненты) B.

Введем в рассмотрение вектор-функции, подобные мажорантам Ляпунова [3], а именно, мажоранты $\Phi(x, y) = \mathrm{col}(\Phi_1, ..., \Phi_n) > 0$, $\varphi(x) = \mathrm{col}(\varphi_1, ..., \varphi_m) > 0$ для $F(x, y, t)$, $f(x, t)$ соответственно, т.е. вектор-функции с положительными компонентами, монотонно возрастающими по каждой из координат x_k, y_j векторов x, y и обладающими положительными непрерывными ограниченными монотонно возрастающими в $B_2(x, y)$ (или $B_1(x)$) первыми производными, причем

$$
\begin{gathered}
F_*(x,y,t) \leqslant \Phi(u, v), \quad f_*(x,t) \leqslant \varphi(u) \\
\left(\frac{\partial F_k(x,y,t)}{\partial x}\right)_* \leqslant \frac{\partial \Phi_k(u,v)}{\partial u}, \quad \left(\frac{\partial F_k(x,y,t)}{\partial y}\right)_* \leqslant \frac{\partial \Phi_k(u,v)}{\partial v} \\
\left(\frac{\partial f_j(x,t)}{\partial x}\right)_* \leqslant \frac{\partial \varphi_j(u)}{\partial u}, \quad k=1,2,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,m \\
\Phi(0,0)=0, \quad \varphi(0)=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v}=0 \quad \text{при} \quad u=0, \quad v=0
\end{gathered}
\tag{3}
$$

для всех $x_* \leqslant u$, $y_* \leqslant v$, $t \in I$ и $(u, v) \in B_2(u, v)$.

Пусть $X(t, t_0)$ – фундаментальная матрица линеаризованного уравнения (1) такая, что $X(t_0, t_0) = E_n$.

Будем полагать, что при $t \in I$, $(t, s) \in I_1$, выполняются следующие условия:

$$
X_*(t,t_0) \leqslant C\exp[-\alpha(t-t_0)], \quad K_{1*}(t,\tau) \leqslant C_1\exp[-\beta(t-\tau)] \tag{4}
$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – постоянные и $C > 0$, $C_1 > 0$ – постоянные позитивные матрицы размера $n \times n$ и $m \times n$ соответственно.

Введем обозначения

$$
\begin{gathered}
V(x,p) = pC_1\varphi(x), \quad \nu = \min(\alpha,\beta) \\
M(\gamma) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\gamma/(\beta-\gamma)}, \quad m = \lim_{\gamma\to\nu} M(\gamma)
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Теорема 1. Пусть для уравнения (1), (2) справедливы указанные выше предположения относительно непрерывности и дифференцируемости функций $A(t)$, $K(t, s)$, $K_1(t, s)$, $F(x, y, t)$, $f(x, t)$ и выполняются условия (4). Пусть заданы мажоранты Ляпунова $\Phi(x, y)$, $\varphi(x)$ и, следовательно, справедливы неравенства (3); пусть, кроме того, имеют место неравенства

$$
\begin{gathered}
\Phi_k(\varepsilon u,\varepsilon v) \leqslant \varepsilon^{1+\delta}\Phi_k(u,v), \quad k=1,2,\dots,n \\
\varphi_j(\varepsilon u) \leqslant \varepsilon\varphi_j(u), \quad j=1,2,\dots,m
\end{gathered}
\tag{6}
$$

для любого ε ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$), некоторого $\delta = \mathrm{const} > 0$ и любых неотрицательных u и v, таких, что $(u, v) \in B_2(u, v)$.

Тогда

1) нулевое решение уравнения (1), (2) экспоненциально устойчиво;

2) граница Г множества $G \subset B_1(x_0)$, принадлежащего области притяжения, задается равенствами

$$\det(E_n - NC\,d\Phi'(u)/du) = 0, \quad u = C(x_{0*} + N\Phi'(u)) \tag{7}$$

$$(\Phi'(u) = \Phi(u, V(u,m)), \ N = 1/\alpha)$$

Доказательство. Фиксируем число $\gamma > 0$, такое, что $\gamma < \nu$, $\alpha - \gamma(1 + \delta) \neq 0$. Уравнение (1), (2) с начальным условием x_0 эквивалентно интегральному уравнению [7]

$$x(t) = X(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\,F(x(\tau), y(\tau), \tau)\,d\tau \tag{8}$$

Представим решение уравнения (8), (2) в форме последовательных приближений $x^{(k)}(t)$, $y^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, ...)$, где $x^{(1)}(t) = X(t, t_0)\,x_0$.

Для $k \geqslant 1$ при $t \in I$ имеют место неравенства

$$x_*^{(k)}(t) \leqslant \exp[-\gamma(t-t_0)]\,u^{(k)}, \quad y_*^{(k)}(t) < \exp[-\gamma(t-t_0)]\,V(u^{(k)}, M_1) \tag{9}$$

где $u^{(k)} > 0$ – постоянные векторы.

Доказательство проводится по индукции. Если $k = 1$, то в силу (4) для $x_*^{(1)}(t)$ это справедливо. Для $y_*^{(1)}(t)$, учитывая соотношения (3), (4), (6), получаем оценку

$$y_*^{(1)}(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} C_1 \exp[-\beta(t-\tau)]\exp[-\gamma(\tau - t_0)]\,\varphi(u^{(1)})\,d\tau < \exp[-\gamma(t-t_0)]\,V(u^{(1)}, M_1), \tag{10}$$

$$M_1 = (\beta - \gamma)^{-1}$$

Пусть неравенства (9) выполняются при $k = 1, 2, ..., s - 1$. Тогда при $k = s$ $(s > 1)$ на основании равенства

$$x^{(s)}(t) = X(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\,F(x^{(s-1)}(\tau), y^{(s-1)}(\tau))\,d\tau \tag{11}$$

а также (9), (3), (4), (6) имеем

$$x_*^{(s)}(t) \leqslant C\exp[-\gamma(t,t_0)]\,x_{0*} + C\int_{t_0}^{t} \exp[-\alpha(t-\tau) - (1+\delta)\,\gamma(\tau - t_0)]\,\Phi(u^{(s-1)}, V(u^{(s-1)}, M_1))\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \exp[-\gamma(t-t_0)]\,C(x_{0*} + N_1\Phi(u^{(s-1)}, V(u^{(s-1)}, M_1))) \tag{12}$$

где постоянная $N_1 > 0$ удовлетворяет при $t \in I$ неравенству

$$N_1 \geqslant (\exp[-\gamma\delta(t-t_0)] - \exp[-(\alpha-\gamma)(t-t_0)])/[\alpha - (1+\delta)\,\gamma]$$

Для $y^{(s)}(t)$ получим оценку, аналогичную (10), и, следовательно, неравенства (9) будут справедливы при $k = s$.

Введем монотонно возрастающую не зависящую от t последовательность $\tilde{u}^{(k)} > 0$, такую, что $\tilde{u}^{(k)} \geqslant x_*^{(k)}(t)$, обеспечивающую сходимость $x^{(k)}(t)$.

Положим

$$\tilde{u}^{(1)} = Cx_{0*}, \quad \tilde{u}^{(k)} = C\left(x_{0*} + \frac{1}{\alpha}\Phi(\tilde{u}^{(k-1)}, V(\tilde{u}^{(k-1)}, M))\right), \quad k = 2,3,... \tag{13}$$

Последовательность $\tilde{u}^{(k)}$ является мажорирующей для $x^{(k)}(t)$; она сходится к единственному положительному решению $u = u(x_0)$ уравнения

$$u = C\left(x_{0*} + \frac{1}{\alpha}\Phi(u, V(u, M))\right) \tag{14}$$

всегда существующему в силу свойств функций $\Phi(x, y)$, $\varphi(x)$ [3].

Действительно, проведя оценку, аналогичную (10), без выделения экспоненциально убывающего члена, получим неравенство $y_*^{(1)}(t) \leqslant V(\tilde{u}^{(1)}, M)$, а также

$$(x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t))_* \leqslant C\int_{t_0}^{t} \exp[-\alpha(t-\tau)]\, F_*(x^{(1)}(\tau), y^{(1)}(\tau))\, d\tau < \tilde{u}^{(2)} - \tilde{u}^{(1)}$$

Если для всех $k = 1, 2, \ldots, s - 1$ выполняются неравенства

$$(x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t))_* < \tilde{u}^{(k)} - \tilde{u}^{(k-1)}$$

то, используя свойства (3) мажорант Ляпунова ([3], гл. II), равенства (11), (13), оценку $y_*^{(k)}(t) \leqslant V(\tilde{u}^{(k)}, M)$, получим для $k = s$

$$(x^{(s)}(t) - x^{(s-1)}(t))_* \leqslant C\int_{t_0}^{t} \exp[-\alpha(t-\tau)](F(x^{(s-1)}(\tau), y^{(s-1)}(\tau)) -$$

$$-F(x^{(s-2)}(\tau), y^{(s-2)}(\tau)))_* d\tau < \frac{C}{\alpha}(\Phi(\tilde{u}^{(s-1)}, V(\tilde{u}^{(s-1)}, M)) -$$

$$-\Phi(\tilde{u}^{(s-2)}, V(\tilde{u}^{(s-2)}, M))) = \tilde{u}^{(s)} - \tilde{u}^{(s-1)}$$

Величина $M = M(\gamma)$ (5) монотонно убывает при возрастании γ на интервале $(0, \nu)$, имея конечный предел при $\gamma \to \nu$.

Полагая в (14) в качестве M значение $m = \lim M(\gamma)$ при $\gamma \to \nu$, получаем второе уравнение (7). Решение $u = u(x_0)$ этого уравнения существует для всех $x_0 \in G$, где граница Γ области G задается, как следует из [2, 3], уравнениями (7). Таким образом, решение $x(t)$ уравнения (1), (2) с начальным значением $x_0 \in G$ существует в виде равномерно сходящихся последовательных приближений для всех $t \in I$, и согласно (9) $x(t) \to 0$ экспоненциально при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

В конкретных случаях наряду со вторым уравнением (7) можно строить мажорирующие уравнения, которые позволяют получать более широкие оценки для области притяжения. Примером служит следующее утверждение.

Теорема 2. При сохранении всех предположений относительно свойств функций $A(t)$, $K(t, s)$, $K_1(t, s)$, $F(x, y, t)$, $f(x, t)$ пусть выполнены неравенства (4) при условии $\alpha < \beta$ и пусть заданы мажоранты Ляпунова $\Phi(x, y)$, $\varphi(x)$ в виде многочленов (либо сходящихся степенных рядов) с неотрицательными коэффициентами, причем члены наинизшей степени в $\Phi(x, y)$ имеют порядок $p \geqslant 2$.

Тогда справедливы утверждения теоремы 1 с уравнениями (7), в которых следует положить

$$\Phi'(u) = \Phi(u, V(u, m_1)), \quad m_1 = (\beta - \alpha)^{-1}, \quad N = \frac{1}{\alpha} p^{p/(1-p)}$$

На функции $\Phi(u, v)$, $\varphi(u)$ указанной в теореме 2 структуры не требуется накладывать дополнительное условие вида (6), и в качестве мажорирующей последовательности $\bar{u}^{(k)} \gg x^{(k)}(t)$ можно взять последовательность, определяемую согласно соотношениям, аналогичным (13) при замене $1/\alpha$ на N, а M на M_1, где

$$N \geqslant N'(t) = (\exp[-p\gamma(t-t_0)] - \exp[-\alpha(t-t_0)])/(\alpha - p\gamma) \tag{15}$$

Эти соотношения строятся на основании неравенств (12) без выделения экспоненциального сомножителя.

Мажорирующее уравнение для $u = \lim_{k\to\infty} \bar{u}^{(k)}$ принимает вид

$$u = C(x_{0*} + N\Phi(u, V(u, m_1)))$$

где в качестве N берется максимальное по $t \in I$ значение $N'(t)$ (15) при $\gamma = \alpha$.

Отметим, что оценку области притяжения, вытекающую из теоремы 2, конечно, имеет смысл использовать, когда $\beta - \alpha$ не является малой величиной. В частности, она эффективна, когда уравнение (1) не зависит от y.

Остановимся на исследовании уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + \int_{t_0}^{t} K(t,s)\,x(s)\,ds + F(x,y,z,t), \quad z \in R^l \tag{16}$$

в котором x, y, $A(t)$, $K(t, s)$ обладают теми же свойствами, что и в (1), (2), и которое зависит от аналитического функционала, представимого рядами Вольтерры–Фреше из кратных интегралов ([14], [15], гл. 1, V), так что, если $z = \mathrm{col}(z_1, ..., z_l)$, то

$$z_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j(k)=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t} K_i^{j(k)}(t,s_1,\ldots,s_k)\, x_{j_1}(s_1)\ldots x_{j_k}(s_k)\, ds_1 \ldots ds_k \cdot i = 1,2,\ldots,l \tag{17}$$

где $j(k)$ – набор индексов $j_1, ..., j_k$, и ядра $K_i^{j(k)}(t, s_1, ..., s_k)$: $I_k \to R$ – непрерывны и ограниченны, причем

$$I_k = \{(t,s_1,\ldots,s_k) \in R^{k+1} : t_0 \leqslant s_j \leqslant t < +\infty,\ j = 1,2,\ldots,k\}$$

Функция $F(x, y, z, t)$: $B_3(x, y, z) \times I \to R^n$ (область B_3 аналогична B_2 для (1)) принадлежит классу C^1 по x, y, z, непрерывна, ограничена по $t \in I$, $F(0, 0, 0, t) \equiv 0$, и при замене x на εx (в том числе и в (2), (17)) переходит в функцию F', такую, что $\partial F'/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=0} = 0$.

Будем полагать, что для интегральных ядер в (17) справедлива экспоненциальная оценка вида

$$|K_i^{j(k)}(t,s_1,\ldots,s_k)| \leqslant C_2 \exp\left[-\sum_{p=1}^{k} \varkappa_p (t - s_p)\right] \tag{18}$$

$$\varkappa_p > 0, \quad C_2 = \mathrm{const} > 0$$

причем $\varkappa_p \geqslant \varkappa$ ($p = 1, 2, ...$) для некоторого $\varkappa > 0$.

Пусть $\Phi(u, v, w) = \mathrm{col}(\Phi_1, ..., \Phi_n)$ – мажоранта Ляпунова для $F(x, y, z, t)$, удовлетворяющая условиям по u, v, w, аналогичным условиям (3) для $\Phi(u, v)$.

Обозначим через $W(x, p, q) \in R^l$ вектор с одинаковыми компонентами

$$w_0(x,p,q) = pC_2 \sum_{k=1}^{n} x_k \left(1 - q\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{-1}; \quad p,q - \mathrm{const}$$

и через $M_2(\gamma)$ величину $M(\gamma)$ (5), в которой β заменено на $\varkappa$, а также положим $\nu = \min(\alpha, \beta, \varkappa)$ и

$$M_3(\gamma) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma(1+\rho)}{\beta}\right)^L, \quad L = \frac{\gamma(1+\rho)}{\beta - \gamma(1+\rho)}, \quad m_i = \lim_{\gamma\to\nu} M_i(\gamma), \quad i = 2,3$$

Теорема 3. Пусть для уравнения (16), (2), (17) выполняются условия (4), (18) и пусть заданы мажоранты Ляпунова $\Phi(u, v, w)$, $\varphi(u)$ для функций $F(x, y, z, t)$, $f(x, t)$ соответственно, удовлетворяющие неравенствам

$$\Phi_k(\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon w) \leqslant \varepsilon^{1+\delta}\Phi_k(u, v, w)$$

$$\varphi_j(\varepsilon u) \leqslant \varepsilon^{1+\rho}\varphi_j(u), \quad j = 1,2,\dots,m; \quad k = 1,2,\dots,n$$

для любого ε $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$, некоторых постоянных $\delta > 0$, $\rho \geqslant 0$ и любых неотрицательных u, v, и w, таких, что $(u, v, w) \in B_3(u, v, w)$.

Тогда

1) нулевое решение уравнения (16) экспоненциально устойчиво;

2) граница Γ области G, принадлежащей области притяжения, задается равенствами (7), в которых $\Phi'(u) = \Phi(u, V(u, m_3), W(u, m_2, m_2))$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Оценивая последовательные приближения $\overset{k}{z_i}(t)$ функционалов $z_i(t)$ (17), получаем на основании (18), (9), например, для $k = 1$

$$|z_i^{(1)}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j(k)=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \dots \int_{t_0}^{t} C_2 \exp\left[-\sum_{p=1}^{k} (\varkappa_p(t - s_p) - \gamma(s_p - t_0))\right] u_{j_1}^{(1)} \dots u_{j_k}^{(1)} ds_1 \dots ds_k <$$

$$< C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j(k)=1}^{n} M_2^{k-1}(\gamma)\, u_{j_1}^{(1)} \dots u_{j_k}^{(1)} (\varkappa - \gamma)^{-1} \exp[-\gamma(t - t_0)] =$$

$$= w_0(u^{(1)}, (\varkappa - \gamma)^{-1}, M_2(\gamma)) \exp[-\gamma(t - t_0)] \tag{19}$$

причем $M_2(\gamma)$ – максимум по $t \in I$ функции $(\exp[-\gamma(t - t_0)] - \exp[-\varkappa(t - t_0)])/(\varkappa - \gamma)$. Неравенства, подобные (19), справедливы для $z_i^{(k)}(t)$ при всех $k \geqslant 1$. При построении мажорирующего уравнения используются оценки для $z_i^{(k)}(t)$ типа (19), но без выделения экспоненциального члена, а именно, $|z_i^{(k)}| < w_0(u^{(k)}, M_2(\gamma), M_2(\gamma))$.

Отметим, что величина $M_2(\gamma)$ монотонно убывает по γ на интервале $(0, \varkappa)$ между значениями $\varkappa^{-1}$ и $(e\varkappa)^{-1}$. Также монотонно убывает при возрастании $\gamma > 0$ функция $M_3(\gamma)$, особенности которой являются устранимыми.

В приложениях часто ограничиваются отрезками рядов (17). В этом случае мажоранты для $z_i(t)$ можно получить указанным способом в форме полиномов.

Рассмотрим простые примеры построения оценок областей притяжения.

Пример 1. Возьмем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \int_{t_0}^{t} K(t - s)\, x(s)\, ds - \sin x + by^2, \quad y = \int_{t_0}^{t} K_1(t - s)\, x(s)\, ds \tag{20}$$

$$x, y \in R^1, \quad b = \text{const}$$

в котором $K(t)$, $K_1(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть все корни λ_s характеристического уравнения

$$\lambda + 1 - \int_0^{\infty} K(s) \exp(-\lambda s)\, ds = 0$$

отвечающего (20), таковы, что $\operatorname{Re}\lambda_s < \lambda' < 0$. Тогда найдутся числа α и C, входящие в первое неравенство (4).

На основании теоремы 1, если $u = u_0$, $\mu = \mu_0$ – положительное решение системы уравнений

$$u = C(\mu + N\Phi'(u)), \quad CNd\Phi'(u)/du = 1 \tag{21}$$

то неравенство $|x_0| < \mu_0$ дает оценку области притяжения. В качестве мажоранты Ляпунова возьмем $\Phi(x, y) = x^3/6 + |b|\, y^2$. Тогда в (21) будем иметь $\Phi'(u) = u^3/6 + |b|\,(mC_1 u)^2$, $m = (e\beta)^{-1}$, если $\beta \leqslant \alpha$, и $m = \beta^{-1}(\alpha\beta^{-1})^{m_4}$, $m_4 = \alpha(\beta - \alpha)^{-1}$, если $\alpha < \beta$. Решив систему (21), найдем $\mu_0 = u_0/C - \Phi(u_0)/\alpha$, где $u_0 = -c + (c^2 + 2\alpha / C)^{1/2}$, $c = 2|b|\, m^2 C_1^2$.

В связи с данным примером сделаем одно замечание. Воспользуемся приведенной здесь мажорантой Ляпунова $\Phi(x, y)$ для исследования уравнения с неголоморфной по x нелинейностью, заданной в некоторой окрестности нуля, для которой $|x| < R_1$ ($R_1 = \text{const} > 0$). Пусть в уравнении (20) правая часть при $|x| \leqslant \varepsilon_0$ ($0 < \varepsilon_0 < R_1$) сохраняется, а при $\varepsilon_0 < |x| < R_1$ зависящие от x нелинейные члены $\psi(x) = x - \sin x$ правой части заменяются на квадратичные $\psi_1(x)$, такие, что парабола $z = \psi_1(x)$ проходит через точки $x = 0$, $z = 0$ и $x = \varepsilon_0$, $z = \varepsilon_0 - \sin\varepsilon_0$ с сохранением непрерывности в точке $x = \varepsilon_0$ первой производной для построенной таким образом нелинейной функции. Тогда сохраняется и полученная в данном примере оценка области притяжения. Однако ясно, что если определять оценку области притяжения для преобразованного указанным способом уравнения (20) в области $|x| < \varepsilon_0$, где правая часть уравнения голоморфна, то при некотором малом ε_0 получим более узкую оценку области притяжения. Это замечание подчеркивает важность отказа в общем случае от требования голоморфности.

Пример 2. Рассмотрим в однородном поле силы тяжести твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси OO_1, являющейся осью кручения двух прикрепленных к телу вязкоупругих стержней (опор тела). Ось OO_1 считается недеформируемой. Второй конец каждого из стержней закреплен. Обозначим через ϑ угол в плоскости, ортогональной OO_1, между нисходящей вертикалью и прямой, проходящей через OO_1 и центр масс, который отстоит от оси на расстоянии r. В положении равновесия $\vartheta = 0$. При вращении тела стержни скручиваются. Момент относительно OO_1 сил, действующих на тело со стороны стержней, возьмем в виде [15]

$$M_\upsilon = -k\vartheta + \int_{t_0}^{t} K'(t-s)\,\vartheta(s)\,ds, \quad k = \text{const} > 0$$

Пусть J – осевой момент инерции тела, mg – его вес. Уравнение возмущенного движения тела относительно положения равновесия

$$J\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -k\vartheta + \int_{t_0}^{t} K'(t-s)\,\vartheta(s)\,ds - mgr\sin\vartheta \tag{22}$$

запишем как систему второго порядка, полагая $\vartheta' = d\vartheta/dt$, и представим ее в интегральной форме (8). Рассмотрим одно уравнение этой системы

$$\vartheta(t) = x_{11}(t-t_0)\,\vartheta_0 + x_{12}(t-t_0)\,\vartheta_0' + \int_{t_0}^{t} x_{12}(t-s)\,F(\vartheta(s))\,ds \tag{23}$$

$$\vartheta_0 = \vartheta(t_0), \quad \vartheta_0' = \vartheta'(t_0), \quad F(\vartheta) = m_0(\vartheta - \sin\vartheta), \quad m_0 = mgr/J$$

где $(x_{ij}(t-t_0)) = X(t-t_0)$ – фундаментальная матрица. Будем считать, что выполнено первое неравенство (4), в котором $C = (c_{ij})$ $(i, j = 1, 2)$, и применим теорему 2 непосредственно к уравнению (23). Выпишем уравнения (7), полагая $p = 3$, $N = 3^{-3/2}/\alpha$ и $\Phi(u_1) = m_0 u_1^3/6$, где $u_1 \gg \vartheta$. Имеем

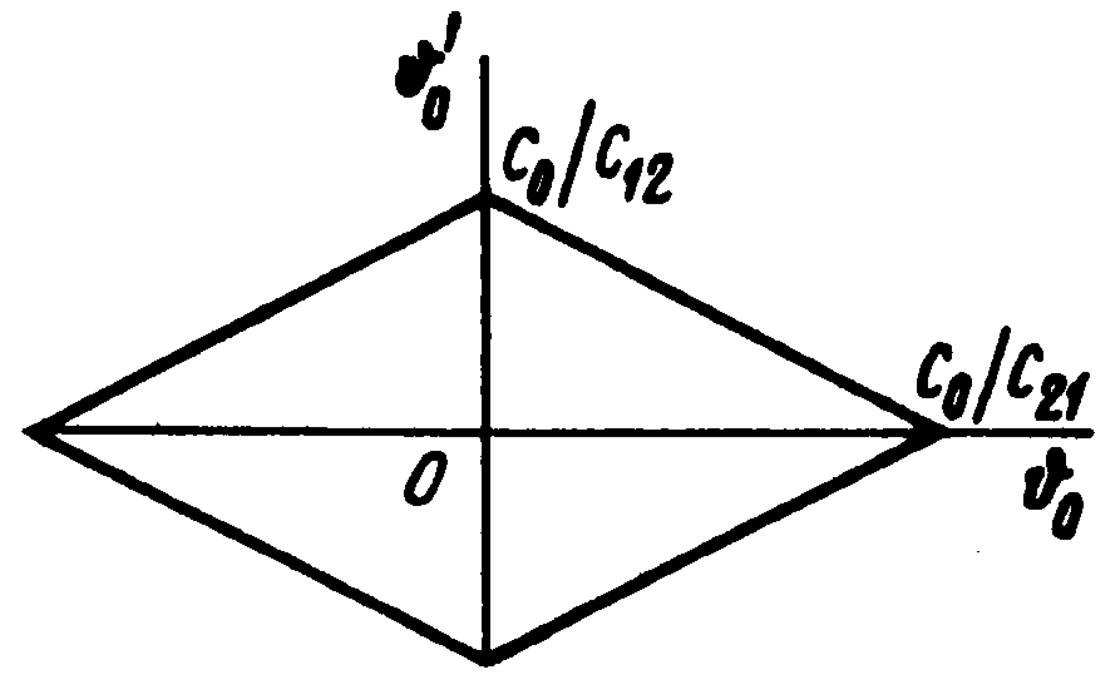
$$u_1 = c_{11}|\vartheta_0| + c_{12}|\vartheta_0'| + \frac{d}{3}u_1^3, \quad 1 - du_1^2 = 0, \quad d = \frac{c_{12}m_0}{6\sqrt{3\alpha}}$$

Искомая оценка для уравнения (22) такова:

$$c_{11}|\vartheta_0|+c_{12}|\vartheta_0'|<c_0, \quad c_0=\frac{2}{3}d^{-1/2}.$$

Вид области (23) показан на фигуре.

Отметим, что условие монотонности мажорант Ляпунова и их первых производных по всем переменным может быть несколько ослаблено, как это следует из общих свойств мажорирующих уравнений ([3], гл. I).



Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16242) и Международного научного фонда (MAK 000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
2. *Рябов Ю.А.* Оценка области сходимости периодических рядов – решений дифференциальных уравнений с малым параметром // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118. № 4. С. 642–645.
3. *Лика Д.К., Рябов Ю.А.* Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев: Штиинца, 1974. 291 с.
4. *Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D.* Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht et all.: Keumer Acad. Publ., 1992. 234 p.
5. *Burton T.A.* Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations // Mathematics in Science and Engineering. N.Y.: Acad. Press, 1985. V. 178. 337 p.
6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.
7. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1957. 327 с.
8. *Иманалиев М.И., Хведелидзе Б.В., Гегелия Т.Г., Бабаев А.А., Боташев А.И.* Интегральные уравнения // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 12. С. 2050–2069.
9. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
10. *Сергеев В.С.* Об устойчивости решений для одного класса интегродифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 3. С. 518–522.
11. *Сергеев В.С.* Об устойчивости решений интегродифференциальных уравнений в некоторых случаях // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 98–105.
12. *Сергеев В.С.* Об оценке области притяжения для одного класса интегродифференциальных уравнений // Устойчивость движения. Новосибирск: Наука, 1985. С. 88–93.
13. *Сергеев В.С.* Об асимптотической устойчивости движений в некоторых системах с последействием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 166–174.
14. *Fréchet M.* Sur les fonctionnelles continues // Ann. de l'École Normale Sup. 1910. Ser. 3. T. 27. P. 193–216.
15. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.II.1995