УДК 531.36

© 1996 г. **А.В. Карапетян, С.Я. Степанов**

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЕЙ

Рассматриваются консервативные и диссипативные системы, допускающие непрерывные группы симметрий. Обсуждаются вопросы о соответствии инвариантных множеств стационарных движений таких систем и отвечающих им инвариантных множеств относительных равновесий, а также о соотношении условий устойчивости этих инвариантных множеств.

1. Рассмотрим консервативную механическую систему с n степенями свободы, допускающую k-параметрическую группу симметрий. На основании общих теорем механики (см., например [1]) такие системы допускают $k+1$ первых интегралов: интеграл энергии

$$H=\frac{1}{2}\mathbf{v}^T\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{v}+V(\mathbf{r})=\text{const} \tag{1.1}$$

интегралы Нётер

$$\mathbf{K}=\mathbf{v}^T\mathbf{B}(\mathbf{r})=\mathbf{c}=\text{const} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}$ – n-мерный вектор-столбец квазискоростей, а $\mathbf{r}$ – m-мерный вектор-столбец квазикоординат, от которых зависят H и $\mathbf{K}$ ($\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{r}\in\mathbf{M}\subset\mathbf{R}^m$, $n\geqslant\dim\mathbf{M}$; $\mathbf{M}$ – конфигурационное многообразие системы); $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – положительно определенная для любого $\mathbf{r}\in\mathbf{M}$ $(n\times n)$-матрица кинетической энергии T, $V(\mathbf{r})$ – потенциал, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ – $(n\times k)$-матрица коэффициентов интегралов Нётер, $\mathbf{c}$ – k-мерный вектор-строка констант этих интегралов; индекс T означает транспонирование. Согласно теореме Рауса [2] (см. также [3–6]) критическим точкам интеграла энергии при фиксированных значениях других интегралов отвечают стационарные движения (СД) системы. Учитывая структуру интегралов (1.1) и (1.2), задачу отыскания СД можно свести к задаче отыскания критических точек эффективного потенциала [7]

$$W_\mathbf{c}(\mathbf{r})=\min_\mathbf{v}H(\mathbf{v},\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{K}(\mathbf{v},\mathbf{r})=\mathbf{c}}=V(\mathbf{r})+C(\mathbf{r})$$
$$\left(C(\mathbf{r})=\frac{1}{2}\mathbf{c}(\mathbf{D}(\mathbf{r}))^{-1}\mathbf{c}^T,\ \ \mathbf{D}(\mathbf{r})=\mathbf{B}^T(\mathbf{r})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r})\mathbf{B}(\mathbf{r})\right) \tag{1.3}$$

на конфигурационном многообразии $\mathbf{M}$.

Таким образом, СД системы имеют вид

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_\mathbf{c}^\circ,\ \ \mathbf{v}=\mathbf{v}_\mathbf{c}^\circ \tag{1.4}$$

Величины $\mathbf{r}_\mathbf{c}^\circ$ определяются из системы

$$\delta W_\mathbf{c}|_{\mathbf{r}\in\mathbf{M}}=0 \tag{1.5}$$

а $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_\mathbf{c}$ – из соотношений

$$\overset{\circ}{\mathbf{v}}_\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}|_{\mathbf{r}=\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\mathbf{c}}\,\mathbf{c}^T \tag{1.6}$$

Согласно теореме Рауса – Сальвадори об устойчивости СД [2–6] и ее обращению [8–11] СД (1.4) устойчиво, если в точке $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\mathbf{c}$ эффективный потенциал достигает строго минимального значения, и неустойчиво, если отрицателен определитель квадратичной формы

$$\delta^2 W_\mathbf{c}|_{\mathbf{r}=\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\mathbf{c}} \tag{1.7}$$

Заметим, что если этот определитель не равен нулю, то индекс квадратичной формы (1.7) называется степенью неустойчивости Пуанкаре СД (1.4).

На основании теоремы Рауса СД устойчиво, если степень неустойчивости Пуанкаре равна нулю, а на основании теоремы Кельвина – неустойчиво, если эта степень нечетна. В случае четной степени неустойчивости Пуанкаре возможна гироскопическая стабилизация, которая носит временный характер, поскольку разрушается диссипативными силами; при этом говорят, что СД неустойчиво в вековом смысле.

2. Предположим, что на рассматриваемую систему действуют дополнительные (к потенциальным производным от функции $V(r)$) управляющие силы, обеспечивающие на всех движениях системы, а не только на СД, рассмотренных в разд. 1, выполнение соотношений

$$\mathbf{v}^T\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – k-мерный вектор-строка постоянных. Будем называть движение, при котором выполняется условие (2.1) и $\mathbf{r} = \mathbf{const}$, относительным равновесием (ОР) системы. Таким образом, ОР имеют вид

$$\mathbf{r} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}_\omega, \quad \mathbf{v} = \overset{\circ}{\mathbf{v}}_\omega \tag{2.2}$$

Величины $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\omega$ определяются из системы

$$\delta W_\omega|_{\mathbf{r}\in\mathbf{M}} = 0 \tag{2.3}$$

а $\overset{\circ}{\mathbf{v}}_\omega$ – из соотношений

$$\overset{\circ}{\mathbf{v}}_\omega = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|_{\mathbf{r}=\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\omega}\,\boldsymbol{\omega}^T \tag{2.4}$$

Здесь

$$W_\omega(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) - \Omega(\mathbf{r}), \quad \Omega(\mathbf{r}) = 1/2\boldsymbol{\omega}\mathbf{D}(\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}^T \tag{2.5}$$

– приведенный потенциал системы, включающий дополнительные силы.

Согласно теореме Лагранжа об устойчивости равновесий и ее обращению (см. [8, 9, 12]) ОР (2.2) устойчиво, если приведенный потенциал (2.5) достигает в точке $\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\omega$ строго минимального значения, и неустойчиво, если определитель квадратичной формы

$$\delta^2 W_\omega|_{\mathbf{r}=\overset{\circ}{\mathbf{r}}_\omega} \tag{2.6}$$

отрицателен. Если этот определитель не равен нулю, то аналогично предыдущему можно определить степень неустойчивости ОР (2.2) как индекс квадратичной формы (2.6).

Таким образом, ОР устойчиво, если степень неустойчивости Пуанкаре равна нулю, и неустойчиво, если степень неустойчивости нечетна. В случае четной степени неустойчивости ОР неустойчиво в вековом смысле, однако может быть устойчивым по Ляпунову, если при этом имеется гироскопическая стабилизация.

3. Задачи определения стационарных движений и относительных равновесий систем с симметрией в определенном смысле эквивалентны. Точнее, справедлива

Теорема 1. Для любого набора $\mathbf{c}$ постоянных интегралов Нётер (для любого набора постоянных $\boldsymbol{\omega}$, определяющих скорость движения системы вдоль группы симметрии) найдется набор постоянных $\boldsymbol{\omega}$ (найдется набор постоянных $\mathbf{c}$), такой, что решение системы (2.3) совпадает с решением системы (1.5): $\mathring{\mathbf{r}}_{\omega} = \mathring{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}$.

Доказательство. Предположим, что конфигурационное пространство M определяется соотношениями

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\mathbf{0} \quad (\mathbf{F}(\mathbf{r})\colon\ \mathbf{R}^m \Rightarrow \mathbf{R}^{\mu},\ \mu<m) \tag{3.1}$$

Тогда величины $\mathring{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}$ и $\mathring{\mathbf{r}}_{\omega}$ определяются из уравнений

$$\partial \tilde{W}_{\mathrm{c}} / \partial \mathbf{r}=\mathbf{0} \quad (\tilde{W}_{\mathrm{c}}=W_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{F}) \tag{3.2}$$

$$\partial \tilde{W}_{\omega} / \partial \mathbf{r}=\mathbf{0} \quad (\tilde{W}_{\omega}=W_{\omega}+\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{F}) \tag{3.3}$$

соответственно ($\boldsymbol{\lambda}$ – μ-мерный вектор-столбец неопределенных множителей Лагранжа), к которым для получения замкнутой системы необходимо добавить соотношения (3.1).

Пусть $\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{c}}$ – решение системы (3.1), (3.2), т.е.

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}+\frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}}+\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r})=\mathbf{0} \tag{3.4}$$

при $\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{c}}$.

Положим

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{c}\mathbf{D}_0^{-1} \tag{3.5}$$

Здесь и далее нижний нулевой индекс означает, что соответствующая величина вычисляется при $\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}$.

Рассмотрим систему (3.1), (3.3)

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}-\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}}+\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r})=\mathbf{0} \tag{3.6}$$

из которой определяются величины $\mathring{\mathbf{r}}_{\omega}$ и $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\omega}$. Учитывая очевидное тождество

$$\partial / \partial \mathbf{r}(\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}) \equiv \mathbf{0}$$

второе слагаемое первого уравнения системы (3.6) можно представить в виде

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{r}}=\mathbf{D}\frac{\partial \Omega^{-1}}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{D}$$

Используя соотношение (3.5), заключаем, что этой системе удовлетворяют значения $\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{c}}$. Следовательно, $\mathring{\mathbf{r}}_{\omega} = \mathring{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}$, $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\omega} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{c}}$ (при условии (3.5)). Аналогично доказывается, что если $\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}}_{\omega}$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\omega}$ – решение системы (3.6), то $\mathring{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \mathring{\mathbf{r}}_{\omega}$, $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{c}} = \mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\omega}$, где $\mathring{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}$, $\mathring{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{c}}$ – решение системы (3.4) при

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{D}_0 \tag{3.7}$$

В вопросах устойчивости СД и ОР систем с симметрией аналогичного полного согласования нет. Точнее, справедлива

Теорема 2. Если приведенный потенциал W_ω имеет строгий локальный минимум в точке $\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}}_\omega$, то эффективный потенциал W_c имеет строгий локальный минимум в точке $\mathbf{r} = \mathring{\mathbf{r}}_c$ при условии, что $\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением (3.5) ((3.7)).

Доказательство. Пусть выполнено соотношение (3.5) ((3.7)). Тогда $\mathring{\mathbf{r}}_c = \mathring{\mathbf{r}}_\omega = \mathbf{r}^\circ$. При этом

$$(W_c(\mathbf{r}) - W_c(\mathbf{r}^\circ)) - (W_\omega(\mathbf{r}) - W_\omega(\mathbf{r}^\circ)) = C - C_0 + \Omega - \Omega_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{c}(\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}_0^{-1})\mathbf{c}^T + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)\boldsymbol{\omega}^T =$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{D}_0\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}_0 - 2\mathbf{D}_0 + \mathbf{D})\boldsymbol{\omega}^T = \frac{1}{2}\mathbf{x}\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{x}^T \geqslant 0 \quad (\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{D}_0 - \mathbf{D}))$$

Следовательно, $W_c(\mathbf{r}) - W_c(\mathbf{r}^\circ) \geqslant W_\omega(\mathbf{r}) - W_\omega(\mathbf{r}^\circ)$, т.е. если $W_\omega(\mathbf{r}) > W_\omega(\mathbf{r}^\circ)$, то и $W_c(\mathbf{r}) > W_c(\mathbf{r}^\circ)$.

Следствие. Если ОР устойчиво в вековом смысле, то соответствующее СД также устойчиво в вековом смысле.

Замечание. Условия устойчивости СД не могут быть у́же, но могут быть шире условий устойчивости соответствующих ОР.

Заметим, что обратное утверждение в общем случае не имеет места. В частности, СД может быть устойчивым в вековом смысле даже если соответствующее ОР неустойчиво (см. пример ниже).

Назовем СД (ОР) *тривиальным*, если $\mathring{\mathbf{r}}_c$ не зависит от $\mathbf{c}$ ($\mathring{\mathbf{r}}_\omega$ не зависит от $\boldsymbol{\omega}$).

Очевидно (см. (3.4) и (3.6) соответственно), тривиальные стационарные движения (ТСД) и тривиальные относительные равновесия (ТОР) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

т.е всегда совпадают. При этом на ТСД и ТОР

$$\partial C / \partial \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \partial \Omega / \partial \mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{3.9}$$

тождественно по $\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\omega}$ соответственно.

Теорема 3. Для ТСД и соответствующих ТОР индексы квадратичных форм (1.7) и (2.6) совпадают.

Доказательство очевидным образом следует из соотношений (3.5)–(3.9).

Следствие 1. Степень неустойчивости ТСД всегда совпадает со степенью неустойчивости соответствующего ТОР.

Будем называть СД (ОР) невырожденным, если определитель матрицы второй вариации функции W_c (W_ω) на этом СД (ОР) не равен нулю; в противном случае – вырожденным.

Следствие 2. Условия вековой устойчивости невырожденных ТСД и соответствующих им ТОР всегда совпадают.

Замечания. 1°. Условия устойчивости вырожденных ТСД не могут быть у́же, но могут быть шире условий устойчивости соответствующих вырожденных ТОР (см. пример).

2°. Степень неустойчивости невырожденных нетривиальных СД не может быть больше, но может быть меньше степени неустойчивости соответствующих нетривиальных ОР (см. пример).

3°. Если $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ – истинные позиционные и циклические координаты, а $\mathbf{v} = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{s}})$, то приведенные результаты переходят в полученные ранее [13–17].

4. Приведенные выше результаты естественным образом распространяются на случай диссипативных систем, допускающих первые интегралы (1.2) и энергетическое соотношение $dH/dt \leqslant 0$ (вместо интеграла энергии (1.1)), а также на случай, когда уравнения $\delta W_{\mathbf{c}} = 0$ ($\delta W_{\boldsymbol{\omega}} = 0$) определяют не точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{\circ}(\mathbf{c})$ ($\mathbf{r} = \mathbf{r}^{\circ}(\boldsymbol{\omega})$), а компактное множество $\mathbf{M}_0(\mathbf{c}) \subset \mathbf{M}$ ($\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega}) \subset \mathbf{M}$).

Действительно, для диссипативных систем по-прежнему можно ввести эффективный потенциал $W_{\mathbf{c}}(\mathbf{r})$ и измененный потенциал $W_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r})$ по формулам (1.7) и (2.5) соответственно. При этом, согласно полученным ранее [18, 19] результатам, множества, на которых $\delta W_{\mathbf{c}} = 0$ или $\delta W_{\boldsymbol{\omega}} = 0$, определяют инвариантные множества (ИМ) свободной или ограниченной диссипативной системы соответственно. Если, кроме того, множество $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ ($\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$) компактно и доставляет функции $W_{\mathbf{c}}(\mathbf{r})$ ($W_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r})$) локально строго минимальное значение, то $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ (($\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$) – устойчивое ИМ [18, 19].

Аналогично предыдущему можно показать, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. Для любого набора $\mathbf{c}$ постоянных интегралов Нётер (для любого набора постоянных $\boldsymbol{\omega}$, определяющих скорость движения системы вдоль группы симметрии) найдется набор постоянных $\boldsymbol{\omega}$ (найдется набор постоянных $\mathbf{c}$), такой, что множество $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ решений системы (1.5) совпадает с множеством $\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$ решений системы (2.3).

Теорема 5. Если приведенный потенциал $W_{\boldsymbol{\omega}}$ имеет строгий локальный минимум на множестве $\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$, то эффективный потенциал $W_{\mathbf{c}}$ имеет строгий локальный минимум на множестве $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ при условии, что $\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением (3.5) (или (3.7)).

Следствие. Если множество $\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$ устойчиво в вековом смысле, то множество $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ также устойчиво в вековом смысле.

Заметим, что $W_{\mathbf{c}}(\mathbf{r})$ ($W_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r})$) заведомо принимает локально строго минимальное значение на множестве $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ ($\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$), если вторая вариация $\delta^2 W_{\mathbf{c}}(\mathbf{M}_0(\mathbf{c}))$ ($\delta^2 W_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega}))$ определенно положительна относительно отклонений вектора $\mathbf{r}$ от ИМ $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ ($\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$).

Аналогично предыдущему будем называть ИМ $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ ($\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$) тривиальным (ТИМ), если оно не изменяется при изменении параметра $\mathbf{c}$ (параметра $\boldsymbol{\omega}$). Очевидно, ТИМ $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ отвечает ТИМ $\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$ и наоборот. Таким образом, справедлива

Теорема 6. Для ТИМ $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ и соответствующего ТИМ $\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$ индексы квадратичных форм (1.7) и (2.6) совпадают.

Следствия. 1°. Степень неустойчивости ТИМ $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ всегда совпадает со степенью неустойчивости соответствующего ТИМ $\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$.

2°. Условия вековой устойчивости невырожденного ТИМ $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ и соответствующего ему ТИМ $\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$ всегда совпадают.

Замечание. Если компактное инвариантное множество $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ ($\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$) изолировано при фиксированных значениях параметров $\mathbf{c}$ ($\boldsymbol{\omega}$) от множества $\dot{H} \equiv 0$, то, согласно полученным ранее результатам [18, 19], это множество частично асимптотически устойчиво (неустойчиво) при условии, что оно доставляет (не доставляет) функции $W_{\mathbf{c}}(\mathbf{r})$ ($W_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r})$) локально строго минимальное значение (даже не строго минимальное значение). В этом случае ТИМ $\mathbf{M}_0(\mathbf{c})$ и $\mathbf{M}_0(\boldsymbol{\omega})$ частично асимптотически устойчивы (неустойчивы) одновременно.

5. Проиллюстрируем изложенные результаты на задаче о движении тяжелого динамически симметричного шара по горизонтальной плоскости с трением скольжения.

Пусть m – масса шара, $\boldsymbol{\theta} = \operatorname{diag}(A, A, C)$ – центральный тензор инерции, a – смещение геометрического центра O шара от его центра масс G, r – радиус шара, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор восходящей вертикали, $\mathbf{e}$ – единичный вектор оси динамической симметрии шара, направленный вдоль вектора GO, $\mathbf{v}$ – скорость центра масс шара, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения шара вокруг центра масс, g – ускорение свободного падения.

Если на шар действуют только силы тяжести и трения скольжения, то рассматриваемая система допускает энергетическое соотношение

$$\frac{dH}{dt} \leqslant 0, \quad H = \frac{1}{2}(m\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma})$$

и интеграл Желле

$$J = (\boldsymbol{\theta\omega}, \boldsymbol{\rho}) = rj$$

где $\boldsymbol{\rho} = -r\boldsymbol{\gamma} + a\mathbf{e} = GK$, K – точка касания шара с опорной плоскостью и j – произвольная постоянная.

Эффективный потенциал системы определяется соотношением [20]

$$W_j = \min_{\mathbf{v},\boldsymbol{\omega}} H|_{J=rj} = -mga\cos\vartheta + \frac{1}{2}\frac{j^2}{A\sin^2\vartheta + C(\cos\vartheta - \varepsilon)^2} + \text{const}$$

$$\varepsilon = a/r, \quad \cos\vartheta = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e})$$

Минимум достигается при значениях $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{\rho}/r$, где

$$\omega = \omega(j) = \frac{r^2}{(\boldsymbol{\theta\rho}, \boldsymbol{\rho})} j \tag{5.1}$$

Если предположить, что на всех движениях шара выполняются соотношения $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho})r/(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) = \omega$, где ω –произвольная постоянная, то измененный потенциал определится соотношением

$$W_\omega = V - T|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{\rho}/r} = -mga\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}(A\sin^2\vartheta + C(\cos\vartheta - \varepsilon)^2)\omega^2$$

Согласно результатам, изложенным выше, множество критических точек $\vartheta = \vartheta^\circ(j)$ функции W_j совпадает с множеством критических точек $\vartheta = \vartheta^\circ(\omega)$ функции W_ω, если постоянные j и ω связаны соотношением (см. (5.1))

$$j = (A\sin^2\vartheta^\circ + C(\cos\vartheta^\circ - \varepsilon)^2)\omega \tag{5.2}$$

Очевидно, множество критических точек функции W_ω содержит две тривиальные ветви $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$ и одну нетривиальную $\vartheta_3 = \vartheta_3(\omega^2)$. Последняя определяется соотношением

$$\omega^2 = \frac{mga}{C(\varepsilon - (1-\delta)\cos\vartheta)} \quad \left(\delta = \frac{A}{C}\right) \tag{5.3}$$

Критические точки $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$ отвечают вертикальным вращениям шара, а множество критических точек $\vartheta = \vartheta_3$ – регулярным прецессиям шара. При этом функция W_ω имеет минимум (максимум) на решениях ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3 при условиях

$$C\omega^2(1 - \delta - \varepsilon) + mga > 0 \quad (< 0) \tag{5.4}$$

$$C\omega^2(1 - \delta + \varepsilon) - mga > 0 \quad (< 0) \tag{5.5}$$

$$\delta - 1 > 0 \quad (< 0) \tag{5.6}$$

Множество критических точек функции W_j также содержит две тривиальные ветви $\vartheta_1 \equiv 0$ и $\vartheta_2 \equiv \pi$ и не более двух нетривиальных $\vartheta_{3,4} = \vartheta_{3,4}(j^2)$. Последние определяются соотношением

$$j^2 = Cmga\frac{(\delta\sin^2\vartheta + (\cos\vartheta - \varepsilon)^2)^2}{(\delta - 1)\cos\vartheta + \varepsilon} \tag{5.7}$$

Заметим, что соотношение (5.3) однозначно разрешимо относительно $\vartheta(\omega^2)$, а соотношение (5.7) может иметь не более двух групп решений $\vartheta(j^2)$; однако в конфигурационном пространстве S^2 эти соотношения (при учете (5.2)) определяют одно и то же множество критических точек функций W_ω и W_j соответственно.

Согласно изложенным выше результатам условия

$$\frac{j^2}{C(1-\varepsilon)^4}(1 - \delta - \varepsilon) + mga > 0 \quad (< 0) \tag{5.8}$$

$$\frac{j^2}{C(1+\varepsilon)^4}(1 - \delta + \varepsilon) - mga > 0 \quad (< 0) \tag{5.9}$$

полученные из (5.4) и (5.5) при условиях $\vartheta^\circ = 0$ и $\vartheta^\circ = \pi$ соответственно (см. (5.2)), определяют условия минимума (максимума) функции W_j в точках $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$ соответственно. Ранее (см., например, [20]) аналогичные условия были получены непосредственным исследованием функции W_j.

Что касается условий (5.6), то при $\delta > 1$ согласно изложенному выше функция W_j также заведомо имеет минимум на единственной (при $\delta > 1$) нетривиальной ветви $\vartheta_3 = \vartheta_3(j^2)$. Однако эта функция может иметь минимум и при условии $\delta < 1$ (см., например [20]) в отличие от функции W_ω.

Таким образом, устойчивость вертикальных вращений свободного тяжелого динамически симметричного шара на плоскости с трением скольжения (устойчивость ТСД) определяется как соотношениями (5.4) или (5.5) (при этом ω – угловая скорость вращения), так и соотношениями (5.8) или (5.9) (j – постоянная интеграла Желле, отнесенная к радиусу шара). Регулярные прецессии такого шара (нетривиальные СД) заведомо устойчивы, если его эллипсоид инерции вытянут вдоль оси симметрии (см. (5.6)), но могут быть устойчивыми, даже если этот эллипсоид сплюснут. В то же время регулярные прецессии шара, движение которого связано соотношениями $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho})r/(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) = \omega$, устойчивы (неустойчивы), если эллипсоид инерции шара вытянут (сплюснут).

Заметим, что при исследовании движения волчка на плоскости с трением нельзя непосредственно воспользоваться известными результатами [13–17], так как рассмотренная система, во-первых, диссипативна и, во-вторых, наряду с нульмерными инвариантными множествами (вращения вокруг оси симметрии) допускает одномерные инвариантные множества (регулярные прецессии). Диссипативность системы не играет существенной роли и легко может быть учтена, тогда как отказ от инвариантного описания движения волчка и переход к тем или иным обобщенным координатам не позволяет единообразно описать все движения системы и существенно усложняет исследование задачи. Действительно, в углах Эйлера не удается исследовать вертикальные вращения, а в углах Крылова – регулярные прецессии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16242) и Международного научного фонда (MAK000, MAK300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
2. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: MacMillan and Co, 1884. 343 c.
3. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Харьков: Изд-е Харьк. Мат. О-ва, 1888. 54 с.
4. *Salvadori L.* Un'osservazione su di un criterio di stabilità del Routh. // Rend. Accad. sci. fis. e math. Soc. naz. sci. lett. et arti. Napoli. 1953. V. 20. P. 269–272.
5. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
6. *Рубановский В.Н., Степанов С.Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904–912.
7. *Смейл С.* Топология и механика // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 77–133.
8. *Thomson W., Tait P.* Treatise on natural phylosophy. V. 1. Pt. 1. Cambrige: Univ. Press, 1879. 508 p.
9. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
10. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений // Теор. и прил. механика. 1974. Т. 5. № 1. С. 67–79.
11. *Козлов В.В.* Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
12. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. 1. М., Л.: Гостехиздат, 1950. 594 с.

13. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta math. 1885. V. 7. P. 259–380.
14. *Румянцев В.В.* О влиянии гироскопических сил на устойчивость стационарного движения // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 6. С. 963–973.
15. *Pascal M.* Sur la recherche des mouvements stationnaires dans les systèmes ayant des variables cycliques // Celest. Mech. 1975. V. 12. № 3. P. 337–358.
16. *Степанов С.Я.* О соотношении условий устойчивости при трех различных режимах циклических движений в системе // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. Казань: КАИ, 1976. Т. 2. С. 303–308.
17. *Карапетян А.В., Степанов С.Я.* О соотношении условий устойчивости стационарных движений свободной системы и положений относительного равновесия ограниченной системы // Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. М.: Изд-во МПИ, 1990. Вып. 20. С. 31–37.
18. *Карапетян А.В.* Теорема Рауса и ее модификации // Тр. Тбил. ун-та. Сер. Мат., мех., физ., астрон. 1989. Т. 25. С. 65–88.
19. *Karapetyan A.V.* The Routh theorem and its extensions // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 53. Qualitative theory of differential equations. Amsterdam; New York: North Holland. 1990. P. 271–290.
20. *Карапетян А.В.* Качественное исследование динамики волчка на плоскости с трением // ПММ. 1991. Т. 55. № 4. С. 698–701.

Москва

Поступила в редакцию
31.X.1995