

УДК 62-50

© 1996 г. Л.Д. Акуленко

## СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СФЕРЫ

Рассматривается классическая задача оптимального по быстродействию управления движениями материальной точки посредством ограниченной по модулю силы. Построены законы управления в форме программы и синтеза, обеспечивающего пересечение (снаружи или изнутри) сферы в координатном пространстве произвольной размерности. С помощью принципа максимума установлено, что управление максимально по величине и постоянно по направлению во времени, а оптимальные траектории являются параболами; общая ситуация многомерного пространства эквивалентна случаю плоского движения. Определены управление по обратной связи и время быстродействия как функции фазовых координат, проведено аналитическое исследование функции Беллмана задачи, установлены качественные особенности поведения управления и времени быстродействия в окрестности критических фазовых состояний управляемой системы. С помощью математического моделирования построены сечения функции Беллмана в широкой области изменения параметров движения и дано сравнение с результатами аналитического и асимптотического исследования.

Задача оптимального по быстродействию управления движениями материальной точки посредством ограниченных и импульсных сил в различных постановках является одной из основных моделей в приложениях теории и методов оптимального управления [1-5] и др.

В теоретическом и прикладном аспектах представляется интересным решение задачи об оптимальном по быстродействию пересечении сферы произвольного радиуса, заданной в геометрическом (без учета скорости) пространстве. Такая постановка может служить приближенной моделью при исследовании задач механики космического полета: попадание или выход управляемого аппарата из "сферы притяжения" небесного тела. Ее можно также рассматривать как расширение постановки задачи о попадании в фиксированную геометрическую точку – попадание в окрестность начала координат или движущейся с постоянной скоростью точечной цели.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу оптимального управления вида [1, 5]

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u, \quad x, v, u \in E^N, \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0 \tag{1.1}$$

$$x(t_f) \in S_r, \quad S_r = \{x: |x| = r\}, \quad t_f \rightarrow \min, \quad |u| \leq u_0$$

Без ограничения общности полагаем, что начало системы координат и центр сферы совпадают. Будем исследовать задачу (1.1) в ситуации общего положения, когда  $0 < u_0, r < \infty$ . Тогда введением безразмерных переменных на основе масштабов длины  $r$  и времени  $\tau = (r/u_0)^{1/2}$  получим соотношения (1.1), в которых  $r = 1, u_0 = 1$ . Упрощенная таким образом система не содержит параметров, а решение задачи будет определяться произвольными значениями  $n$ -векторов  $x^0, v^0$ . Заметим, что точка  $x^0$  может находиться как внутри ( $|x^0| < 1$ ), так и вне ( $|x^0| > 1$ ) шаровой области  $V$ , ограниченной единичной сферой  $S_1(|x| = 1)$ .

Решение задачи управления существует при произвольных значениях  $x^0, v^0 \in E^n$ . Для построения оптимальных законов управления применим необходимые условия принципа максимума [1]. Введем сопряженные  $x, v$  переменные  $p, q$ . Из условия максимума функции Гамильтона находим выражение для  $u$ :

$$u^* = q|q|^{-1} \equiv \eta, \quad q \neq 0 \quad (1.2)$$

Выпишем соответствующую управлению  $u^*$  (1.2) двухточечную краевую задачу принципа максимума; частично разрешая ее, получим

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \eta, \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0, \quad |x(t_f)| = 1 \quad (1.3)$$

$$p(t) \equiv p(t_f) = p^f, \quad q(t) = p^f(t_f - t), \quad p^f = \lambda x(t_f) |x(t_f)|^{-1}$$

Множитель Лагранжа  $\lambda$  вместе с постоянным вектором  $p^f$  и минимальным значением  $t_f$  подлежат определению как решение краевой задачи (1.3).

Из (1.2), (1.3) вытекает, что при  $x^0 \in S_1$  величина  $|p^f| > 0$ , т.е. управление  $u^*$  неособое. Однородность гамильтониана позволяет нормировать (разделить) вектор  $p^f$  на  $|p^f|$ , так что  $|p^f| = 1$ . Тогда из (1.3) следует, что  $\lambda = \pm 1$ , причем  $\lambda = 1$  при  $x^0 \in B$ , т.е.  $|x^0| < 1$ , и  $\lambda = -1$  при  $x^0 \in \overline{B}$ , т.е.  $|x^0| > 1$ , где  $B$  – внутренность единичного шара полной размерности, ограниченного сферой  $S_1$ . Кроме того, из (1.3) находим, что управление  $u^*$  (1.2) ортогонально плоскости, касательной к сфере в точке пересечения, определяемой ортом  $x^f$ , так как  $u^* = \lambda x^f$ ,  $x^f = x(t_f)$ ,  $|x^f| = 1$ .

Таким образом, оптимальное программное управление постоянно и равно по модулю единице, а траектории являются параболами. Направление вектора управления коллинеарно ( $x^0 \in B$ ) или антиколлинеарно ( $x^0 \in \overline{B}$ ) орту  $x^f$  точки пересечения сферы траекторией в момент времени  $t_f$ . Эти величины  $x^f, t_f$  подлежат дальнейшему определению (всего  $n$  неизвестных постоянных).

**2. Решение краевой задачи принципа максимума.** Чтобы найти неизвестные параметры  $x^f, t_f$ , проинтегрируем уравнения для  $x, v$  (1.3) при  $u^* = \eta = p^f$ . Приравняем  $x(t_f) = x^f$ , разрешим это соотношение относительно  $\eta$  и учтем равенства  $\eta = p^f$ ,  $|x^f| = 1$  и условие трансверсальности (1.3); получим выражения

$$\eta = -(x^0 + v^0 t_f)(t_f^2 / 2 - \lambda)^{-1}, \quad x^f = \eta / \lambda, \quad \lambda = \pm 1, \quad |x^0| \leq 1 \quad (2.1)$$

Здесь  $t_f$  – неизвестное время оптимального быстрогодействия, определяемое как минимальный положительный корень алгебраического уравнения четвертой степени вида

$$(t_f^2 / 2 - \lambda)^2 = l^2 + 2clh t_f + h^2 t_f^2 \quad (2.2)$$

$$l = |x^0|, \quad h = |v^0|, \quad c = \cos(x^0, v^0) = (x^0, v^0) |x^0|^{-1} |v^0|^{-1}$$

Отметим, что уравнение (2.2) непосредственно следует из (2.1) возведением в квадрат одного из векторных выражений. Кроме того, в случае сферы "нулевого радиуса" (попадание в начало координат) получается уравнение для  $t_f$  типа (2.2), в котором следует формально положить  $\lambda = 0$  [1, 5].

Дальнейшие усилия будут направлены на определение и исследование минимального положительного корня  $t_f^*$  уравнения (2.2). Его значение зависит от величин трех параметров

$$t_f^* = t_f^*(h, c, l), \quad h \geq 0, \quad -1 \leq c \leq 1, \quad l \geq 0; \quad \lambda = \pm 1, \quad l \leq 1 \quad (2.3)$$

Простой анализ показывает, что уравнение (2.2) всегда имеет положительный (и отрицательный) вещественный корень, т.е. задача оптимального быстрогодействия имеет решение. Отметим, что возможны ситуации, когда существуют два дополнительных положительных корня или один двукратный (см. ниже, а также [5]).

Из приведенных выше построений следует, что рассматриваемая задача движения точки в  $n$ -мерном пространстве по существу эквивалентна плоской ( $n = 2$ ). Оптимальные траектории лежат в плоскости, образованной неколлинеарными векторами  $x^0, v^0$  ( $|c| < 1$ ). Этот вывод с очевидностью следует из центральной симметрии задачи управления. Подтверждением является тот факт, что решение определяется всего тремя величинами  $h, l, c$ . Случай движения по прямой ( $c = \pm 1$ ) оказывается вырожденным (критическим).

Пусть минимальное время  $t_f^*$  (2.3) определено аналитически (см. разд. 3, например по формулам Кардано) или численно (разд. 4). Тогда искомое оптимальное управление в форме программы  $u_p^*(x^0, v^0)$ , орт вектора пересечения сферы  $x^{f*}$  и фазовая траектория  $x^*(t), v^*(t)$  определяются выражениями

$$u_p^* = \eta^* = -(x^0 + v^0 t_f^*)(t_f^{*2} / 2 - \lambda)^{-1}, \quad x^{f*} = \lambda \eta^*, \quad \lambda = \pm 1, \quad |x^0| \leq 1$$

$$x^* = x^0 + v^0 t + \frac{1}{2} \eta^* t^2, \quad v^* = v^0 + \eta^* t, \quad 0 \leq t \leq t_f^*$$
(2.4)

Предположим, что величина  $t_f^*$  определена как функция векторов  $x^0, v^0$  в достаточно больших областях их возможных значений:  $x^0 \in D_x \subseteq E^n, B \subset D_x, v^0 \in D_v \subseteq E^n$ . Тогда формулы (2.3), (2.4) определяют решение задачи синтеза в области  $D_x \times D_v$ , т.е. функцию Беллмана задачи  $\theta$  и управление по обратной связи  $u_s^*$ :

$$\theta(x, v) = t_f^*(h, c, l), \quad h = |v|, \quad l = |x|, \quad c = \cos(x, v)$$

$$u_s^*(x, v) = -(x + v\theta)(\theta^2 / 2 - \lambda)^{-1}, \quad \lambda = \pm 1, \quad l \leq 1$$
(2.5)

Исследуем зависимость корней  $t_f^*$  (2.2) от переменных  $h, c, l$  в окрестности некоторых характерных значений этих параметров движения, имеющих наглядный геометрический и механический смысл.

**3. Локальное исследование аналитических свойств функции Беллмана задачи.** Рассмотрим приближенные выражения и асимптотики функции  $\theta$  в зависимости от произвольных допустимых значений переменных  $h, c, l$  и дискретного параметра  $\lambda$ . Согласно разд. 2 имеем  $\theta(h, c, l, \lambda) = \min \arg Q(\theta) > 0$

$$Q(\theta) \equiv (\theta^2 / 2 - \lambda)^2 - l^2 - 2clh\theta - h^2\theta^2 = 0$$
(3.1)

**3.1. Поведение функции Беллмана вблизи центра шара.** Исследуем поведение функции  $\theta(h, c, l, \lambda)$  при  $0 \leq l \ll 1$  ( $\lambda = 1$ ) стандартными методами теории возмущений [5–7]. Полагая  $l = 0$ , получим из (3.1) выражение

$$\theta_0(h) = \sqrt{2} (h^2 + 1 + ((h^2 + 1)^2 - 1)^{1/2})^{-1/2}$$
(3.2)

не зависящее от  $c$ . Согласно (2.5) оптимальное управление  $u_s^*$  должно быть направлено вдоль вектора  $v$  ( $\theta_0^2 / 2 < 1$  при  $h > 0$ ). Случай  $h = 0$  ( $l = 0$ ) – особый: управление может быть направлено произвольно, если  $l = h = 0$ , что очевидно. С течением времени при  $h > 0, l > 0$  неоднозначность исчезает; векторы управления, скорости и положения будут коллинеарными (без учета возмущений). Отметим, что функция  $\theta_0(h)$  (3.2) (и  $\theta(h, c, l, 1)$ ) стремится к нулю как  $h^{-1}$  при  $h \rightarrow \infty$ , см. разд. 3.4.

Пусть  $h > 0$  ( $h \sim 1$ ); тогда корень  $\theta_0$  (3.2) простой и для  $\theta$  справедливо представление

$$\theta(h, c, l, 1) = \theta_0(h) + l\theta_1 + l^2\theta_2 + l^3 \dots, \quad \theta_1 = 2chd^{-1} \quad (3.3)$$

$$\theta_2 = (2ch + \theta_1(h^2 + 1))\theta_1(\theta_0 d)^{-1}, \dots, \quad d = -2h(h^2 + 2)^{1/2}$$

При  $h > 0$  величина  $d < 0$ , а разложения (3.3) абсолютно и равномерно сходятся для достаточно малых значений  $l > 0$ . Искомый корень  $\theta$  может быть определен также при помощи метода последовательных приближений. Коэффициенты  $\theta_i \sim h^{-1}$  при  $h \rightarrow \infty$ , что очевидно.

Рассмотрим ситуацию, близкую к вырожденной. Представляют интерес следующие подслучаи: а)  $h \sim l$ , б)  $h \sim l^{1/2}$  ( $l \ll h \ll 1$ ) и в)  $h \sim l^2$  ( $0 < h \ll l$ ). Пусть имеет место подслучай а, т.е.  $l = \varepsilon L$ ,  $h = \varepsilon H$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $L, H \sim 1$ ; тогда находим

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3 \dots, \quad \theta_0 = \sqrt{2}, \quad \theta_1 = -(L^2 + 2cLH\theta_0 + H^2\theta_0^2)^{1/2}\theta_0^{-1} \quad (3.4)$$

$$\theta_2 = (cLH + H^2\theta_0)\theta_0^{-2} - 1/2\theta_1^2\theta_0^{-1}, \dots \quad (\theta_1 \neq 0)$$

Полученные значения  $\theta_0, \theta_1$  имеют простой механический смысл и не нуждаются в комментариях. Особым состоянием является случай  $\theta_1 = 0$ , который требует дополнительного анализа; однако такая ситуация реализуется лишь при  $c = -1$ ,  $\sqrt{2}H = L$ . Построение решения проводится также элементарно; если  $\theta_1 \sim \varepsilon$ , то  $\theta = \theta_0 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3 \dots$  при  $\theta_2 \neq 0$  (случай  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  реализуется при  $L = 0, H = 0$ ).

Из анализа выражений (3.3) для коэффициентов  $\theta_i$  следует, что эти разложения справедливы также в подслучае б, т.е.  $h = \varepsilon^{1/2}H, l = \varepsilon L$ . Однако малым параметром, строго говоря, будет величина  $\varepsilon^{1/2}$ .

Построим разложения  $\theta$  по  $\varepsilon$  в подслучае в, когда  $h = \varepsilon^2H, l = \varepsilon L$ . Применение стандартной процедуры метода возмущений приводит к искомым выражениям типа (3.4)

$$\theta_0 = \sqrt{2}, \quad \theta_1 = -L/\sqrt{2}, \quad \theta_2 = -1/4L^2/\sqrt{2} - 2cH, \dots$$

Содержательный смысл коэффициентов  $\theta_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) достаточно ясен и не требует комментариев. Таким образом, полностью исследована функция Беллмана  $\theta$ , когда точка находится вблизи центра шара (начала координат), см. разд. 4.

**3.2. Асимптотическое исследование функции Беллмана на больших расстояниях.** Рассмотрим обратную ситуацию, когда  $l \gg 1$  ( $\lambda = -1$ ). Из анализа уравнения (3.1) следует, что  $\theta \sim l^{1/2}$ , в качестве малого параметра целесообразно взять  $\mu = l^{-1/2}$ . Разложения для  $\theta$  имеют асимптотический смысл:  $\theta = \mu^{-1}\theta_{-1} + \theta_0 + \mu\theta_1 + \mu^2 \dots$ . Стандартным образом определяются неизвестные коэффициенты  $\theta_i$ ; в результате получается искомое выражение вида

$$\theta = \sqrt{2}l^{1/2} + ch + (4h^2 - c^2h^2 - 2)(8l)^{-1/2} + O(h^3/l) \quad (3.5)$$

Первое слагаемое в (3.5) есть время движения (грубо), второе – компенсация ухода от центра шара, третье – уточнение, связанное с учетом размера сферы. Выражение (3.5) достаточно для оценок при  $h \sim 1$ ; в случае необходимости могут быть выписаны следующие члены разложения. Ситуация, когда  $h \gg 1$  (и  $l \gg 1$ ) требует отдельного рассмотрения, которое проводится ниже в разд. 3.5.

**3.3. Поведение функции Беллмана вблизи состояния покоя.** Рассмотрим случай малой скорости  $0 \leq h \leq 1$ , величина  $l \sim 1$ . Ситуация  $l \leq 1$  и  $l \gg 1$  рассмотрена ранее

в разд. 3.1, 3.2. Функцию  $\theta$  ищем в виде разложений по степеням малого параметра  $h$  аналогично (3.3), (3.4)

$$\theta = \theta_0 + h\theta_1 + h^2\theta_2 + h^3 \dots, \quad \theta_0 = \sqrt{2}||l-1||^{1/2}, \quad l \neq 1, \quad \theta_1 = \mp c \quad (3.6)$$

$$\theta_2 = (\mp 2c^2l + (2 - 3c^2)||l-1|| \pm c^2)d^{-1}, \quad d = \mp 2\sqrt{2}||l-1||^{1/2} \neq 0$$

В выражениях для  $\theta_1, \theta_2$  (3.6) верхний знак отвечает условию  $0 < l < 1$ , а нижний –  $l > 1$ , причем  $l \sim 1$  и  $||l-1|| \sim 1$ ; ситуация  $||l-1|| \sim \epsilon \ll 1$  изучается ниже в разд. 3.6. Кинематический смысл коэффициентов  $\theta_i$  (3.6) достаточно очевиден:  $\theta_0$  соответствует времени движения к сфере по прямой с нулевой начальной скоростью, а  $\theta_1$  учитывает величину и направление скорости, которая асимптотически мала; коэффициент  $\theta_2$  более сложен для толкования, поскольку учитывает довольно тонкие эффекты.

**3.4. Асимптотический анализ функции Беллмана для больших скоростей.** В случае  $h \gg 1$  для функции  $\theta$  возможны как регулярные ( $\theta \sim h^{-1}$ ), так и сингулярные ( $\theta \sim h$ ) представления. Первая возможность реализуется, очевидно, когда  $l < 1$  или  $l > 1$  при условиях  $-1 \leq c < 0, |s| \leq 1$ ; эти условия имеют наглядный геометрический смысл. Если же  $l > 1$  и  $|s| > 1$  ("промах"), то осуществляется вторая возможность (сингулярные разложения). Случай  $c < 0, 0 < 1 - s^2l^2 \ll 1$ , где  $s^2 = 1 - c^2$ , требует отдельного изучения.

Для удобства анализа введем малый параметр  $\xi = h^{-1}$  и преобразуем уравнение (3.1) к виду

$$\xi^2(\theta^2 / 2 - \lambda)^2 = \xi^2l^2 + 2\xi cl\theta + \theta^2, \quad l \neq 1 \quad (3.7)$$

Рассмотрим первую возможность и построим регулярные разложения по степеням параметра  $\xi$ :

$$\theta = \theta_0 + \xi\theta_1 + \xi^2\theta_2 + \xi^3\theta_3 + \xi^4 \dots, \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \theta_1^\pm = -cl \pm d$$

$$\theta_2 = \theta_2^\pm = \mp \frac{1}{2}(\theta_1^\pm)^2 d^{-1}, \quad \theta_3 = \theta_3^\pm = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}(\theta_1^\pm)^4 \mp$$

$$\mp \theta_1^\pm \theta_2^\pm - (\theta_2^\pm)^2)d^{-1}, \quad d = (1 - s^2l^2)^{1/2} \quad (3.8)$$

Верхние знаки отвечают  $\lambda = 1$ , т.е.  $l < 1$ , и  $\lambda = -1$ , т.е.  $l > 1$ , соответственно. Поведение коэффициентов  $\theta_i$  радикально зависит от величины  $s^2l^2$ , как отмечалось выше. Если  $d^2 > 0$ , что имеет место при  $x \in B$  ( $l < 1$ ), то регулярные разложения (3.8) справедливы и дают искомое представление функции Беллмана. При  $l > 1$  условие регулярности разложения также выполняется, если  $c < 0$  и  $d^2 > 0$ . В критическом случае  $d^2 = 0$  разложения также справедливы. Для искомых коэффициентов  $\theta_i$  тогда получим выражения

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = -cl, \quad \theta_2 = (-cl)^{1/2}, \quad \theta_3 = \frac{1}{2}, \dots \quad (3.9)$$

В случае, близком к критическому, когда  $d^2 = O(\xi) > 0$ , можно применить разложения (3.8). Если же  $d^2 = O(\xi) < 0$ , то регулярные разложения не справедливы: происходит "промах". При  $d^2 = 1 - s^2l^2 = -a^2\xi^2$  возможны регулярные разложения, если выполнено дополнительное условие  $a^2 < 1$ , в частности при  $a^2 = O(\xi)$ .

Рассмотрим случай сингулярного представления  $\theta$  при  $|s|l > 1$  или  $c \geq 0$ . Для искомых разложений получим

$$\theta = \xi^{-1}\theta_{-1} + \xi\theta_1 + \xi^3\theta_3 + \xi^5 \dots, \quad \theta_{-1} = 2$$

$$\theta_1 = 2cl - 1, \quad \theta_3 = l^2 - 1 + (1 - 8cl)(2cl - 1), \dots \quad (3.10)$$

Первое слагаемое в (3.10) соответствует суммарному времени торможения и возврата к сфере; при этом скорость "подлета" будет порядка  $h = \xi^{-1}$ . Малые добавки  $O(\xi)$  и др. характеризуют тонкие эффекты маневра, близкого к оптимальному по быстродействию.

3.5. *Асимптотическое поведение функции Беллмана при больших расстояниях и скоростях.* Теперь естественно рассмотреть ситуацию, когда  $l, h \gg 1$ . Для определенности возьмем сперва величины одинакового порядка:  $l = \varepsilon^{-1}L, h = \varepsilon^{-1}H$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Определяющее функцию  $\theta$  уравнение (3.1) приводится к виду

$$L^2 + 2cLH\theta + H^2\theta^2 = \varepsilon^2(\theta^2/2 + 1)^2, \quad L, H \sim 1 \quad (3.11)$$

Для искомой функции  $\theta$  возможны как регулярные, так и сингулярные представления по  $\varepsilon$ ; построим их. Регулярные разложения могут иметь место, если  $s = \varepsilon S, S \sim 1$ , где  $s$  – синус угла между векторами  $x$  и  $u$ . Тогда стандартным образом получим

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3 \dots, \quad \theta_0 = LH^{-1} \quad (3.12)$$

$$\theta_1 = -((\theta_0^2/2 + 1)^2 - S^2\theta_0^2)^{1/2}, \quad \theta_2 = \theta_0 H^{-2}(\theta_0^2/2 + 1) - 1/2\theta_0 S^2, \dots$$

При этом предполагается, что выражение для  $\theta_1$  определено (вещественно) и строго отрицательно; в случае  $\theta_1 = 0$  требуется дополнительный анализ этого вырождения. Если  $s$  – величина более высокого порядка малости, например  $s = \varepsilon^2 S$ , то решение всегда существует в виде (3.12).

Рассмотрим теперь сингулярные разложения  $\theta$ , которые следуют при  $s \sim 1$ . Положим  $\theta = \varepsilon^{-1}\Theta$ ; для неизвестной  $\Theta \sim 1$  получим уравнение

$$1/4\Theta^4 + \varepsilon^2\Theta^2 + \varepsilon^4 = \varepsilon^2 L^2 + 2\varepsilon cLH\Theta + H^2\Theta^2 \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) практически совпадает с аналогичным для (3.7) в случае "промаха" ( $s^2 l^2 > 1$ ); таким же образом находим искомое разложение  $\Theta = 2H + \varepsilon cLH^{-1} + \varepsilon^2 \dots$

Пусть величины  $l, h$  имеют разный порядок. Представляет интерес ситуация  $l = \varepsilon^{-2}L, h = \varepsilon^{-1}H$ . Очевидно, величина  $\theta$  будет асимптотически большой, т.е.  $\theta = \varepsilon^{-1}\Theta, \Theta \sim 1$ . Подставляя это выражение в уравнение (3.1), приведем его к виду

$$1/4\Theta^4 + \varepsilon^2(\Theta^2 + \varepsilon^2) = L^2 + 2cLH\Theta + H^2\Theta^2 \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) с точностью до членов  $O(\varepsilon^2)$  совпадает с исследованным ранее [5]. Оно может быть формально преобразовано к выражению, не содержащему возмущений

$$1/4\Theta^4 = L^{*2} + 2c^*L^*H^*\Theta + H^{*2}\Theta^2 \quad (3.15)$$

$$L^{*2} = L^2 - \varepsilon^4, \quad H^{*2} = H^2 - \varepsilon^2, \quad c^* = c(L/L^*)(H/H^*)$$

При этом следует иметь в виду, что  $L^2, H^2 \sim 1$ , т.е.  $L^*, H^*$  определены, а величина  $c^*$  изменяется в более широких на  $O(\varepsilon^2)$  пределах, чем  $c$  ( $-1 \leq c \leq 1$ ). Численно-аналитическое решение уравнения (3.15) построено полностью [5]. Тем самым можно определить решение уравнения (3.14). Отметим, что такое уравнение получается также в случае сферы асимптотически малого радиуса при другой нормировке.

Обратная ситуация, когда  $l = \varepsilon^{-1}L, h = \varepsilon^{-2}H$ , в основном, сходна со случаем, исследованным в разд. 3.4.

3.6. *Поведение функции Беллмана вблизи поверхности шара.* Рассмотрим приближенное выражение  $\theta$  при  $l = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \leq 0, |\varepsilon| \ll 1$ , т.е. вблизи сферы. Под-

ставляя значение  $l$  в уравнение (3.1), получим соотношения

$$\theta^4 - 4\lambda\theta^2 = 8ch\theta + 4h^2\theta^2 + 4\varepsilon(2 + \varepsilon + 2ch\theta) \quad (3.16)$$

$$\lambda = \pm 1, \quad \varepsilon \leq 0; \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3 \dots$$

Решение уравнения согласно (3.16) будем искать в виде ряда по целым степеням  $\varepsilon$ , полагая при этом, что  $c \sim 1$ ,  $h \sim 1$ . При  $\varepsilon = 0$  для неизвестного  $\theta_0$  получаются соотношения

$$\begin{aligned} \theta_0 P(\theta_0) = 0, \quad P(\theta) &\equiv \theta^3 - 4(\lambda + h^2)\theta - 8ch \\ \theta_0 = 0, \quad \theta_0 = \min \arg P(\theta) &> 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

допускающие две возможности; рассмотрим обе. Первый (нулевой) корень приводит к соответствующим разложениям

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = -(ch)^{-1}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{2}(\lambda + h^2)(ch)^{-3} + \frac{1}{2}(ch)^{-1}, \dots \quad (3.18)$$

Главным членом в разложении (3.16), (3.18) будет  $\varepsilon\theta_1 = -\varepsilon(ch)^{-1}$ . Поскольку  $\theta > 0$ , то условие положительности  $\varepsilon\theta_1$  приводит к неравенству  $\varepsilon c < 0$ . Таким образом, при  $\varepsilon < 0$  ( $l < 1$ ,  $\lambda = 1$ ) вектор  $v$  должен быть направлен наружу шара ( $c > 0$ ) и, наоборот, при  $\varepsilon > 0$  ( $l > 1$ ,  $\lambda = -1$ ) вектор  $v$  должен быть направлен внутрь шара ( $c < 0$ ).

Рассмотрим критический случай, когда  $ch = \varepsilon\gamma$ ,  $\gamma \sim 1$ . Разложения в общем случае проводятся по степеням  $|\varepsilon|^{1/2}$ :

$$\theta = |\varepsilon|^{1/2} (2(1 \mp \gamma) / (1 - h^2))^{1/2} + |\varepsilon| \dots, \quad h^2 \neq 1, \quad \varepsilon \leq 0, \quad \lambda = \pm 1 \quad (3.19)$$

и существуют, если выражение для  $\theta_1$  вещественно. Аналогично могут быть изучены другие критические случаи.

Исследуем другую ситуацию, когда скорость для точек внутри ( $l < 1$ ) направлена внутрь ( $c < 0$ ), а для точек снаружи шара ( $l > 1$ ) – наружу ( $c > 0$ ). Неизвестное значение  $\theta_0$  в разложении (3.16) определяется вторым выражением (3.17).

Переходим к исследованию корней кубического уравнения (3.17). Требуется найти минимальный положительный корень  $\theta_0$  как функцию параметров  $h$ ,  $c$  и  $\lambda = \pm 1$ . Прежде чем применить формулы Кардано, разрешим его относительно  $h = h(\theta, c, \lambda)$ :

$$h = -c\theta^{-1} \pm (c^2\theta^{-2} + \theta^2 / 4 - \lambda)^{1/2}, \quad c \leq 0, \quad \lambda = \pm 1 \quad (3.20)$$

Из (3.20) следует, что при  $c < 0$ ,  $\lambda = 1$  ( $l < 1$ ) семейство кривых  $\theta(h, c, 1)$  состоит из двух немонотонных семейств ветвей (знаки  $\pm$  в (3.20)), а при  $c > 0$ ,  $\lambda = -1$  ( $l > 1$ ) кривая  $\theta(h, c, -1)$  состоит из одного монотонно возрастающего семейства ветвей (со знаком плюс; знак минус приводит к  $h < 0$ ). Считается, что  $h$  – аргумент, а  $c$  – параметр семейств.

Применим непосредственно к уравнению  $P(\theta_0) = 0$  (3.17) формулы Кардано. Как обычно, введем величины

$$p = -4(\lambda + h^2), \quad q = -8ch, \quad d = q^2 / 4 + p^3 / 27 \quad (3.21)$$

Возможны три случая. Пусть  $d < 0$ , что заведомо имеет место при  $-1 < c < 0$ ,  $\lambda = 1$  ( $l < 1$ ). Тогда уравнение допускает два положительных корня (и один отрицательный), которые вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \theta_0^{(k)} &= (-q / 2 \pm j |d|^{1/2})^{1/3} + (-q / 2 \mp j |d|^{1/2})^{1/3} \geq 0, \quad j = \sqrt{-1} \\ k &= 1, 2, 3, \quad \theta_0^{(k)} = 2\mu_k, \quad \mu_k = \operatorname{Re}(-q / 2 + j |d|^{1/2})^{1/3} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из двух положительных корней  $\theta_0^{(k)}$  выбирается наименьший. Отметим, что  $d < 0$  также при  $0 < c < 1$  ( $\lambda = -1, l > 1$ ), если  $h \geq 2$ , и при  $1 < h < 2$ , если  $0 < c < f(h)$ , где  $f(h) \equiv (4/27)^{1/2}(h^2 - 1)^{3/2}h^{-1}$ . Уравнение (3.17) в этой ситуации допускает один положительный и два отрицательных корня, которые вычисляются по формулам (3.22).

Пусть  $d = 0$ , что справедливо лишь при  $c = -1$  для  $h = 1/\sqrt{2}$  ( $\lambda = 1, l < 1$ , точка внутри шара) и при  $0 < c < 1, c = f(h)$  для  $1 < h < 2$  ( $\lambda = -1, l > 1$ , точка вне шара). В этом случае уравнение (3.17) имеет три вещественных корня, два из которых совпадают

$$\theta_0^{(1)} = -2(q/2)^{1/3}, \theta_0^{(2,3)} = (q/2)^{1/3}, \quad q = -8ch \quad (3.23)$$

Как следует из (3.21), в первой ситуации ( $c = -1$ ) положительным является кратный корень  $\theta_0^{(2,3)}$  (3.23), а во второй ( $c = f(h)$ ) – искомым будет  $\theta_0^{(1)}$  (3.23).

Пусть теперь  $d > 0$ , что может выполняться лишь при  $1 < h < 2$  для  $1 > c > f(h) > 0$  ( $\lambda = -1, l > 1$ , точка вне шара) и при  $0 < h < 1, 0 < c < 1$ . Тогда уравнение (3.17) допускает один положительный вещественный корень  $\theta_0$ :

$$\theta_0 = (-q/2 + d^{1/2})^{1/3} + (-q/2 - d^{1/2})^{1/3}, \quad q = -8ch < 0 \quad (3.24)$$

Полученные выражения для корней могут быть представлены также в тригонометрической форме. На их основе методами возмущений строятся регулярные разложения по целым степеням  $\varepsilon$  во всех случаях, кроме критического, соответствующего двукратному корню  $\theta_0^{(2,3)}$  (3.23) при  $c = -1$ . В последнем случае уравнение (3.1) (и (3.16)) допускает точное аналитическое решение элементарного вида, см. разд. 3.9.

Искомые разложения имеют вид

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3 \dots, \quad \theta_0 = \theta_0(h, c, \lambda), \theta_1 = 8(1 + ch\theta_0)(P_0 + \theta_0 P_0')^{-1} \quad (3.25)$$

$$\theta_2 = (8ch\theta_1 + 4 - (P_0' + \frac{1}{2}\theta_0 P_0'')\theta_1^2)(P_0 + \theta_0 P_0')^{-1}, \dots, \quad P_0 \equiv P(\theta_0)$$

Здесь  $\theta_0 = 0$  или  $\theta_0 = \min_k \theta_0^{(k)} > 0$  согласно (3.17) и вычислениям (3.22) – (3.24). Отметим, что разложения для  $\theta_0 = 0$ , имеющие конкретный вид, приведены в (3.18), (3.19). Основной содержательный комментарий относится к главным членам разложений (3.18), (3.19), (3.25); он приведен выше.

*3.7. Поведение функции Беллмана при взаимной ортогональности радиус-вектора и вектора-скорости.* Исследуем теперь ситуацию, когда  $|c| \ll 1$ , а  $l \sim 1, h \sim 1$ . При  $c = 0$  уравнение (3.1) переходит в биквадратное, решение которого имеет вид

$$\theta_0 = \sqrt{2}(h^2 + \lambda \mp ((h^2 + \lambda)^2 + l^2 - 1)^{1/2})^{1/2}, \quad \lambda = \pm 1, \quad l \leq 1 \quad (3.26)$$

Отметим, что функция  $\theta_0$  (3.26) не является непрерывной при  $l \rightarrow 1 \pm 0$ ; полагаем далее  $l \leq 1$  (случай  $l = 1 \pm \varepsilon$  изучен ранее). При этом условии  $\theta_0$  – простой корень и для величины  $z = \theta^2$  получаем разложения регулярного вида

$$z = z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon^3 \dots, \quad z_0 = \theta_0^2, \quad z_1 = 2lh\theta_0 d^{-1} \quad (3.27)$$

$$z_2 = 2l^2 h^2 d^{-2} - l^2 h^2 \theta_0^2 d^{-3}, \quad d = \mp((h^2 + 1)^2 + l^2 - 1)^{1/2}, \quad l \leq 1$$

Выражение  $\theta_0$  (3.26) довольно громоздко и представляет трудности для комментария. Однако его предельные значения при  $l \rightarrow 0, 1, \infty$  или (и) при  $h \rightarrow 0, \infty$  отвечают интуитивным представлениям. Следующая добавка  $\varepsilon z_1$  учитывает увеличение или уменьшение времени быстрогодействия в зависимости от знака параметра  $c$  и положения точки ( $l \leq 1$ ).

3.8. *Исследование функции Беллмана вблизи вырожденного случая почти коллинеарных векторов положения и скорости.* Приближенно построим решение уравнения (3.1) при  $c = 1 - \varepsilon$ ,  $0 \leq \varepsilon \ll 1$ . Для  $\varepsilon = 0$  ( $c = -1$ ) имеем искомые значения корня

$$\theta_0 = \mp h + (h^2 \mp 2(l-1))^{1/2}, \quad l \leq 1 \quad (3.28)$$

Это выражение соответствует одномерному движению и не требует пояснений. В ситуации общего положения корень  $\theta_0$  (3.28) простой, а его уточнение при  $\varepsilon > 0$  проводится стандартным образом

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3 \dots, \quad \theta_0 = \theta_0(h, l), \quad \theta_1 = -2lh\theta_0 d^{-1} \quad (3.29)$$

$$\theta_2 = ((h^2 + \lambda - 3\theta_0^2 / 2)\theta_1^2 - 2lh\theta_1)d^{-1}, \dots, \quad d = \theta_0^3 - 2(h^2 + \lambda)\theta_0 - 2lh$$

Наличие небольшого угла  $\alpha$  ( $\alpha^2/2 = \varepsilon$ ) между векторами приводит к увеличению ( $l < 1$ ) или уменьшению ( $l > 1$ ) времени быстрогодействия, что интуитивно очевидно.

3.9. *Анализ функции Беллмана вблизи вырожденного случая почти антиколлинеарных векторов положения и скорости.* Аналогично вышеизложенному рассмотрим ситуацию  $c = -1 + \varepsilon$ ,  $0 \leq \varepsilon \ll 1$ . Полагая  $\varepsilon = 0$ , получим выражения

$$\theta_0 = -\beta h + \gamma(h^2 + 2(\lambda + \beta l))^{1/2} \quad (3.30)$$

Здесь знаки  $\gamma = \pm 1$ ,  $\beta = \pm 1$  независимы. Анализ показывает, что для  $l < 1$  ( $\lambda = 1$ ) величина  $\theta_0$  описывается двумя выражениями

$$\theta_0 = h + (h^2 + 2(1-l))^{1/2}, \quad 0 < h^2 \leq l^2 / 2 \quad (3.31)$$

$$\theta_0 = -h + (h^2 + 2(1+l))^{1/2}, \quad h^2 > l^2 / 2$$

Если точка находится вне шара ( $l > 1$ ,  $\lambda = -1$ ), то время быстрогодействия описывается всегда одним выражением

$$\theta_0 = -h + (h^2 + 2(l-1))^{1/2}, \quad h > 0 \quad (3.32)$$

Эти выражения элементарны и не требуют пояснений. Отметим лишь, что стыковка выражений (3.31) негладкая, причем на линии стыковки значение  $\theta_0 \equiv \sqrt{2}$  постоянно, т.е. не зависит от  $l$  и  $h$  ( $l < 1$ ), см. разд. 4.

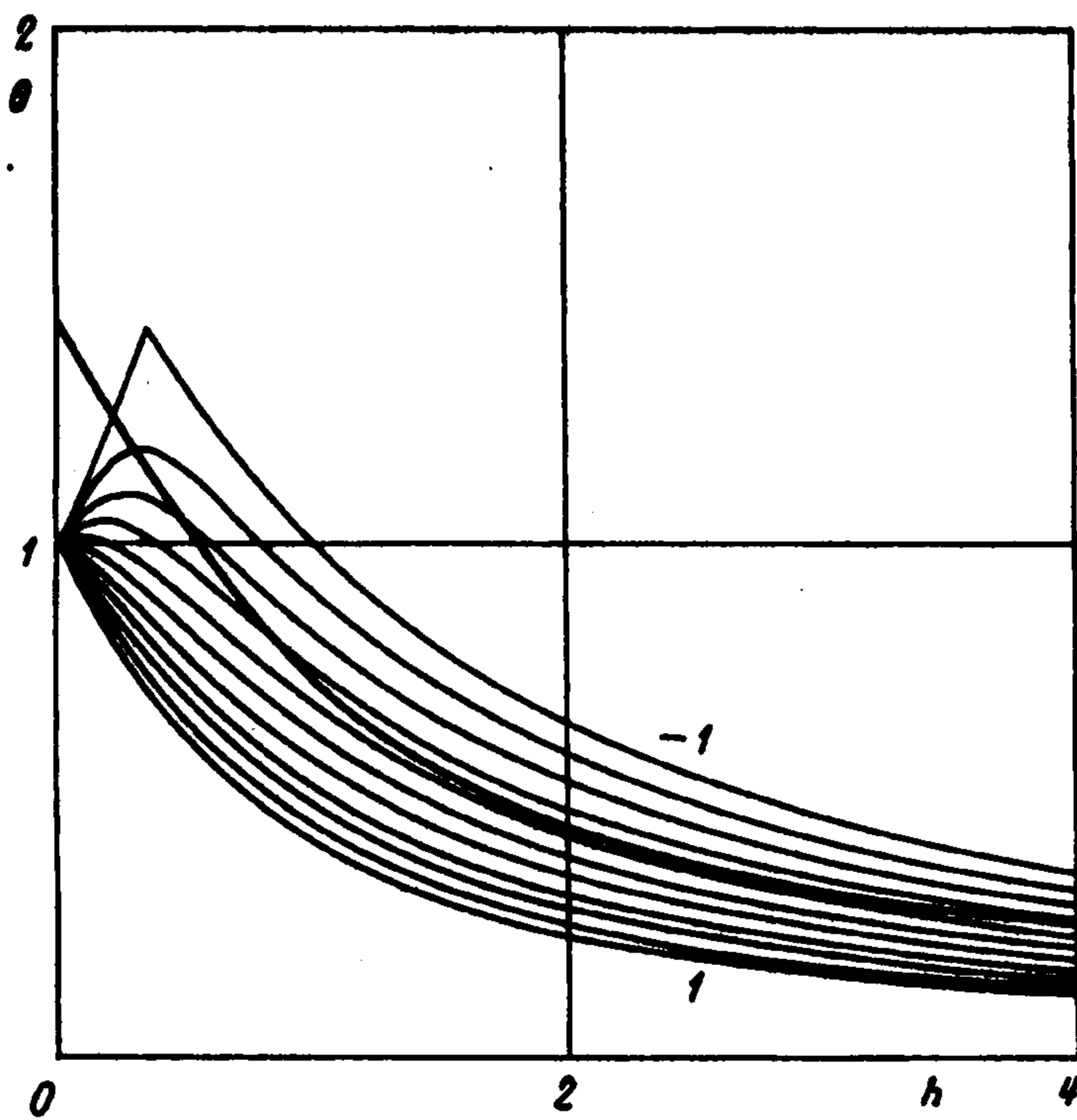
Уточнение величины  $\theta$  в ситуации общего положения проводится стандартным образом

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3 \dots, \quad \theta_0 = \theta_0(h, l), \quad \theta_1 = 2lh\theta_0 d^{-1} \quad (3.33)$$

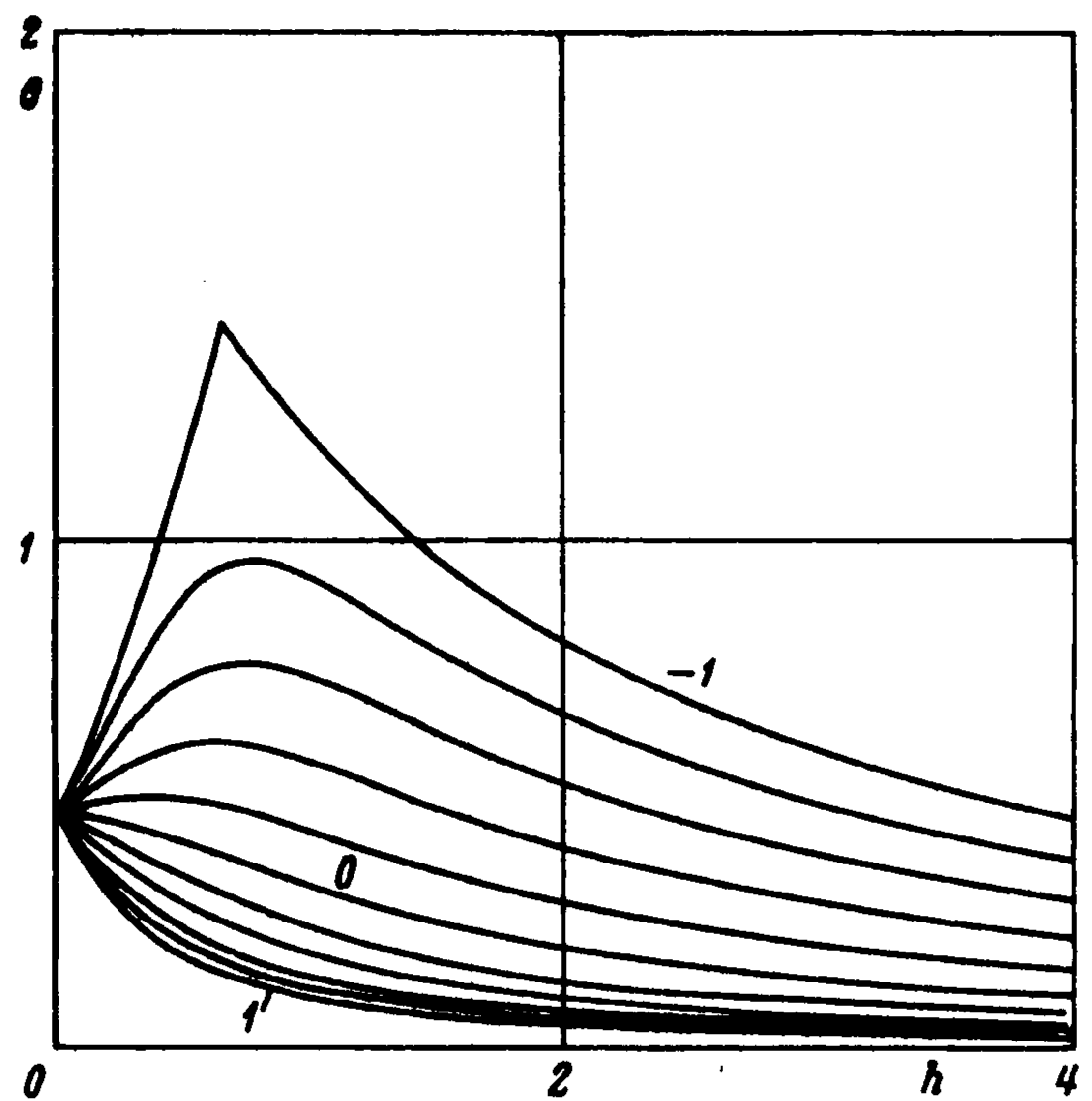
$$\theta_2 = ((h^2 + \lambda - 3\theta_0^2 / 2)\theta_1^2 + 2lh\theta_1)d^{-1}, \dots, \quad d = \theta_0^3 - 2(h^2 + \lambda)\theta_0 + 2lh$$

Величины  $\theta_0$  в (3.33) определены согласно (3.31), (3.32). Выражения для  $\theta_i$ ,  $d$  в этих разложениях отличаются лишь знаком перед  $2lh$  от соответствующих выражений в (3.29).

Таким образом, в разд. 3 достаточно подробно изучены аналитические свойства функции Беллмана в окрестности состояний, для которых может быть получено точное аналитическое решение. Проведен также асимптотический анализ, соответствующий асимптотически большим значениям параметров движения ( $l, h \rightarrow \infty$ ). Представляет значительный интерес сравнение полученных аналитических результатов с результатами достаточно полного численного решения задачи оптимального управления.



Фиг. 1



Фиг. 2

**4. Результаты численного моделирования.** Непосредственное численное решение алгебраического уравнения четвертой степени (3.1) относительно  $\theta = \theta(h, c, l, \lambda)$  и выбор минимального положительного значения для неограниченной области значений параметров  $h, l$  представляет весьма трудоемкую задачу. Функцию  $\theta$  можно представить как семейство поверхностей в первом октанте трехмерного пространства  $(\theta, h, l)$ , для которого  $-1 \leq c \leq 1$  – параметр семейства,  $\lambda = \pm 1$ . Однако построение этого семейства приводит к очень громоздким и ненаглядным результатам вследствие сложности проектирования указанных поверхностей. Предварительный анализ показывает, что более предпочтительным является задание семейства кривых  $(\theta, h)$  с параметром  $c$  для сравнительно небольшого числа значений параметра  $l$ .

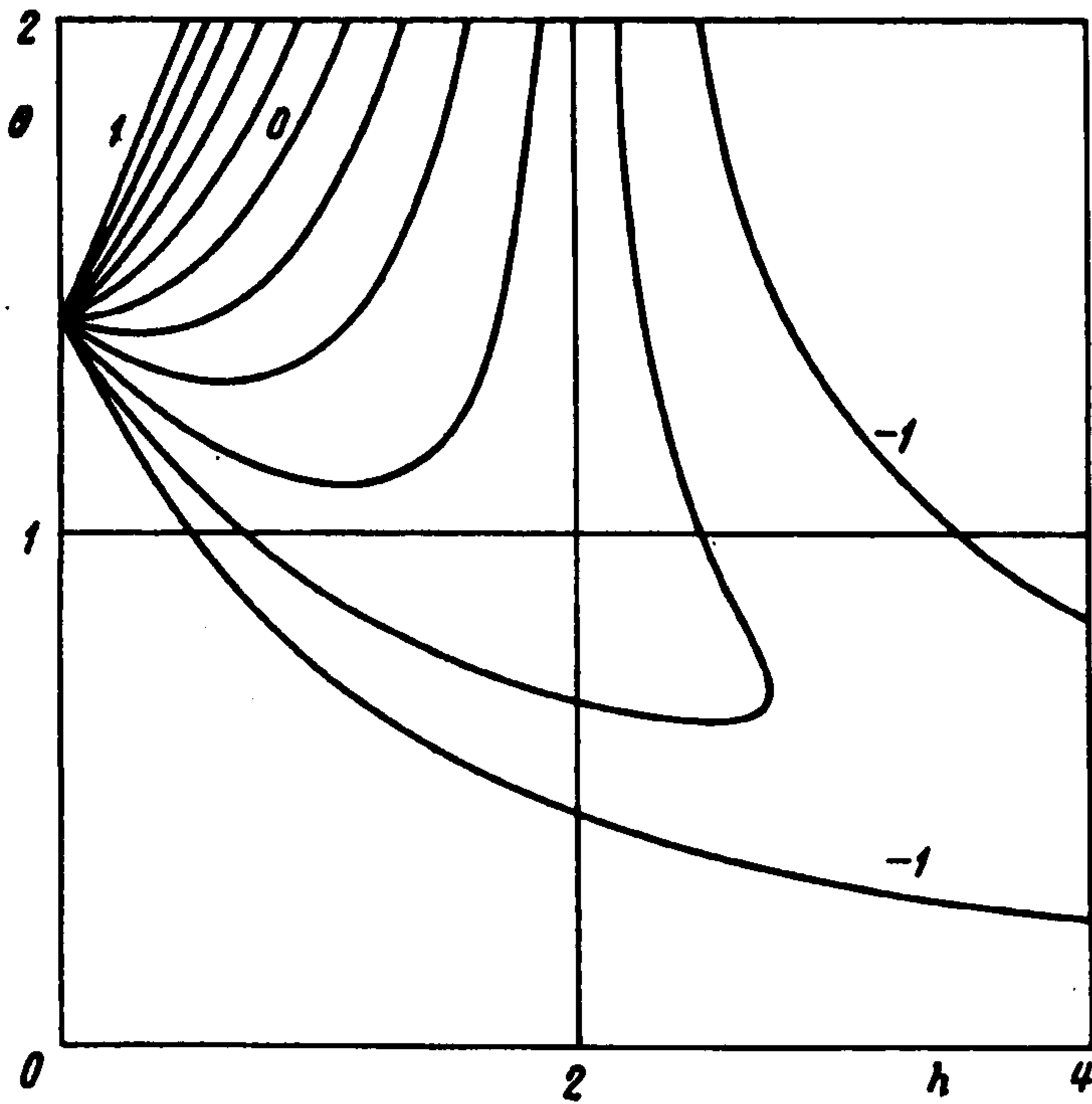
Построение функций  $\theta(h)$  для фиксированных  $c, l$  упрощается и сводится к явным алгебраическим выражениям, если разрешить квадратное уравнение (3.1) относительно  $h = h(\theta, c, l, \lambda)$ . Имеем [5]

$$h = \frac{1}{2} \theta^{-2} (-2\theta c l + \gamma (4\theta^2 c^2 l^2 + 4\theta^2 ((\theta^2 / 2 - \lambda)^2 - l^2))^{1/2}) \quad (4.1)$$

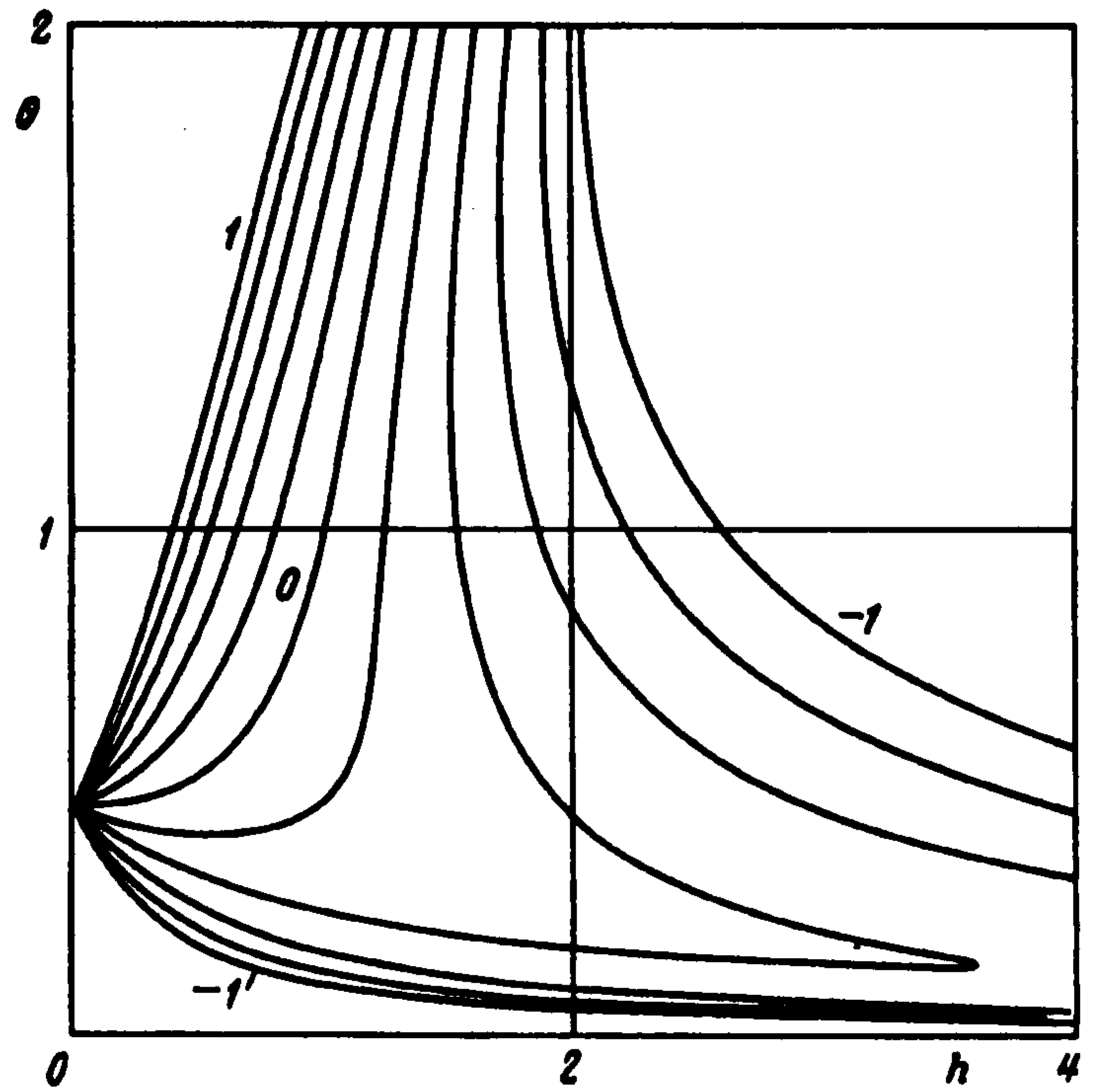
$$h \geq 0, \quad \theta > 0, \quad l \leq 1, \quad \lambda = \pm 1, \quad -1 \leq c \leq 1, \quad \gamma = \pm 1$$

Вместо искомой функции  $\theta(h)$  можно аналитически и численно исследовать обратную ей функцию  $h(\theta)$  согласно (4.1). В результате математического моделирования по формуле (4.1) было построено графическое решение  $\theta(h, c, l)$ , отвечающее проведенному в разд. 3 анализу поведения функции Беллмана. Приведем и исследуем некоторые типичные семейства по  $c$  кривых для различных значений  $l \geq 0$ .

Рассмотрим сперва ситуацию  $0 \leq l \leq 1$ , фиг. 1, 2. На фиг. 1 приведены семейства графиков для  $c_i = -1 + 0,2i, i = 0, 1, \dots, 10$  (с шагом  $\Delta c = 0,2$ ) и двух значений  $l$ :  $l = 0$  (см. разд. 3.1) и  $l = 0,5$  ("общий" случай). При  $l = 0$  семейство не зависит от  $c$  (см. (3.2)) и сливается в одну кривую, выходящую из точки  $\theta_0 = \sqrt{2}$  при  $h = 0$ . Поведение кривых при  $0 \leq l \leq 1$  полностью соответствует аналитическим результатам разд. 3. Рассмотрим семейства кривых для различных значений  $l$ . Общая точка  $\theta$ , из которой выходят кривые каждого семейства при  $h \geq 0$ , поднимается кверху до значения  $\theta = \sqrt{2}$ , а семейство начинает сужаться ("слипание") при  $l \rightarrow 0$  и переходит в указанную выше единственную кривую (3.2). С увеличением значения  $l \rightarrow 1$  семей-



Фиг. 3



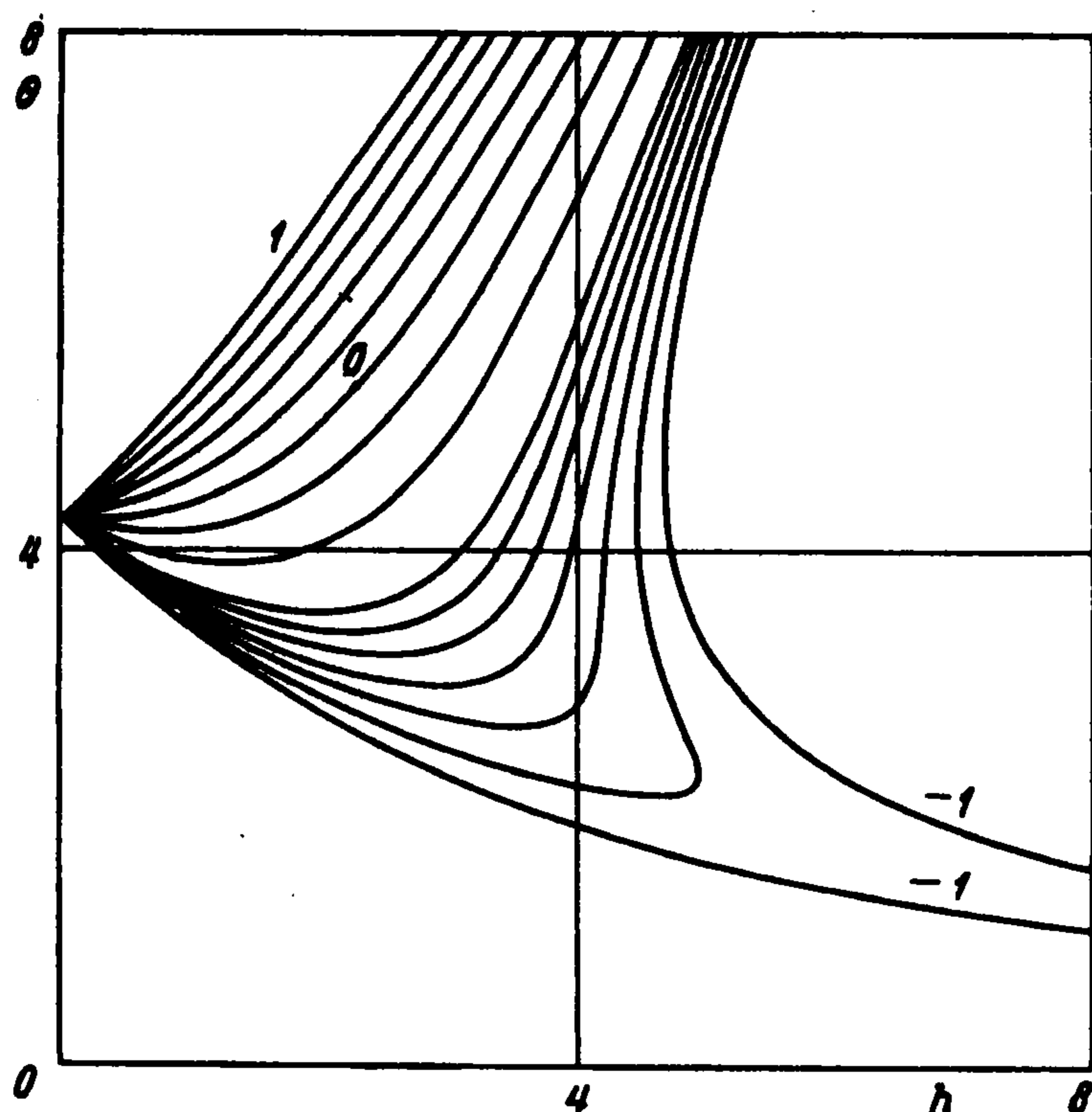
Фиг. 4

ство кривых начинает расширяться и заполнять полосу  $0 \leq \theta \leq \sqrt{2}$ , причем точка выхода семейства  $\theta \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow 1$ , см. фиг. 2. Проведенный в разд. 3.6 анализ полностью отвечает ситуации  $l = 1 - \epsilon$ , см. также разд. 3.8 ( $c = -1 + \epsilon$ ) и разд. 3.9 ( $c = 1 - \epsilon$ ),  $0 < \epsilon \ll 1$ . Таким образом, внутри шара  $x \in B$  семейства кривых и функция Беллмана изменяются довольно монотонно и гладко, кроме вырожденного случая  $c = -1$ , который приводит к угловым точкам. Интенсивное изменение функции Беллмана происходит также вблизи  $h = 0$  и  $l \rightarrow 1$  (нерегулярность  $\theta$  усугубляется вплоть до разрыва).

Рассмотрим теперь результаты моделирования для  $x \in \bar{B}$  ( $l > 1$ ), см. фиг. 3–5. Обсудим сперва случай, когда точка находится вблизи сферы, т.е.  $l = 1,1$  (фиг. 3); это семейство кривых соответствует анализу разд. 3.6. Оно имеет неоднозначный характер, поскольку по техническим причинам приведены все корни, не только минимальные (четыре кривые справа вверху должны быть изъяты). Отметим, что в окрестности значения  $c = -0,4$  происходит резкое изменение времени быстрогодействия по  $c$  и  $h$  вследствие возможности "промаха". Следует обратить внимание на характер поведения семейства кривых вверху: они "уходят" вверх и направо и стремятся к прямой  $\theta \sim 2h$ ,  $h \rightarrow \infty$ ; см. разд. 3.4 и формулу (3.10).

На фиг. 4 представлена "общая" ситуация  $l > 1$ ,  $l \sim 1$ , точнее,  $l = 2$ . Приведенное семейство кривых подтверждает анализ при  $h \ll 1$ ,  $h \gg 1$ ,  $c = 1 + \epsilon$ ,  $c = \epsilon$ , где  $0 < |\epsilon| \ll 1$ . Следует обратить внимание на скачок времени быстрогодействия при "промахе" для  $c = -0,8$ . Как отмечалось, семейство вверху уходит направо согласно (3.10).

Рассмотрим случай  $l \gg 1$ , см. разд. 3.2, 3.5, в частности  $l = 10$  (фиг. 5). Семейство кривых сходно с построенным в случае сферы асимптотически малого радиуса (попадание в начало координат [5]). При значениях  $c$ , близких к  $c = -1$ , см. разд. 3.9, дано более плотное семейство:  $c = -1 + 0,05i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 6$ , далее  $\Delta c = 0,3$ , а затем  $\Delta c = 0,2$  от  $c = -0,4$  до  $c = 1$ . Обратим внимание на весьма тонкое отличие, имеющее всегда место для сферы ненулевого радиуса, от предельного случая точки. Вблизи значений  $c = -1$  существует узкое семейство кривых, монотонно убывающих при  $h \rightarrow \infty$ , т.е. без скачка времени быстрогодействия. Вне этого тонкого слоя существует интервал значений  $c < 0$ , допускающих "промах" и немонотонное поведение  $\theta$  как функции  $h$  (для фиксированного  $c$ ) – разрыв функции Беллмана. Затем появляется



Фиг. 5

интервал значений  $c$  (от некоторых отрицательных до  $c = 1$ ), приводящих к монотонной гладкой зависимости  $\theta$  от  $h$  ("пролет с возвращением").

Таким образом, функцию Беллмана задачи об оптимальном по быстродействию попадании материальной точки на сферу (пересечение сферы) конечного радиуса под действием ограниченной по модулю силы можно считать построенной и изученной довольно подробно. Установлено, что в зависимости от значений фазовых переменных она обладает свойствами негладкости и разрывности; выяснена природа этих нерегулярностей. Фактически построена картина синтеза, см. разд. 2. Отметим, что тем самым решена задача о попадании на цилиндрическое подпространство, в частности на гиперплоскость.

Автор благодарит Г.В. Костина за помощь в расчетах и обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00221) и совместного гранта Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства науки РФ (J17100).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 702 с.
5. Акуленко Л.Д. Возмущенная оптимальная по быстродействию задача управления конечным положением материальной точки посредством ограниченной силы // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 12–21.
6. Гурса Э. Курс математического анализа. В 3-х т. Т. 2. Ч. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1933. 271 с.
7. Еругин Н.П. Неявные функции. Л.: Изд-во ЛГУ, 1956. 59 с.

Москва

Поступила в редакцию  
4.VII.1995