УДК 62–50

© 1996 г. Д.И. Бугров

ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Рассматриваются полные нелинейные уравнения движения летательного аппарата (ЛА) как абсолютно твердого тела. Управляющими параметрами являются тяга двигателя и углы отклонения аэродинамических рулей. Ставится задача о стабилизации программного режима движения ЛА. Этот режим задается изменением векторов скорости центра масс и угловой скорости во времени. В качестве функции Ляпунова выбирается так называемая "кинетическая энергия отклонений". В явном виде выписывается стабилизирующее управление. Доказывается, что управление обеспечивает асимптотическую устойчивость "практически" любого программного режима движения.

Динамические уравнения движения ЛА как абсолютно твердого тела, имеющего постоянные массу и тензор инерции, выпишем в системе координат xyz, связанной с его центром масс, ось x направлена вдоль корпуса к носу, ось y – вверх, ось z – вдоль правого крыла:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=\mathbf{F}+m\mathbf{g},\qquad J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times J\boldsymbol{\omega}=\mathbf{M} \tag{1}$$

Здесь m – масса ЛА, $\mathbf{v}$ – вектор абсолютной скорости центра масс ЛА в проекциях на оси системы координат xyz, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости ЛА в проекциях на те же оси, J – тензор инерции ЛА в осях xyz, t – время полета, $\mathbf{g}$ – гравитационное ускорение, $\mathbf{F}$ – суммарный вектор негравитационных сил, действующих на ЛА (аэродинамических и постоянной по направлению силы тяги двигателя $\mathbf{P}$), $\mathbf{M}$ – момент аэродинамических сил.

Предполагается, что гравитационное ускорение постоянно по величине и направлению, плотность атмосферы постоянна, действующие на ЛА аэродинамические силы и моменты зависят только от величины скорости $\mathbf{v}$, углов атаки и скольжения, определяющих положение вектора скорости $\mathbf{v}$ относительно системы координат xyz, вектора $\boldsymbol{\omega}$, а также тяги двигателя P и положений аэродинамических рулей (например, руля направления, руля высоты и элеронов), образующих вектор $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\delta_3)^T$ [1]. На величины управлений при этом накладываются ограничения

$$|\delta_i|\leqslant H_i\quad i=1,2,3;\quad 0\leqslant P\leqslant H_p \tag{2}$$

Пусть задан программный режим вида

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}^p(t),\qquad \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^p(t) \tag{3}$$

удовлетворяющий уравнениям (1) с программным управлением $\mathbf{P}^p$, $\boldsymbol{\delta}^p$, для которого должны быть выполнены ограничения (2). Ниже решается задача стабилизации заданного программного режима (3).

В качестве новых переменных рассматриваются отклонения от режима (3)

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^p(t), \qquad \Delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^p(t)$$

в области $\Gamma = \{\|\Delta \mathbf{v}\| \leqslant V, \|\Delta \boldsymbol{\omega}\| \leqslant \Omega\}$. Тогда уравнения движения ЛА (1) можно записать в виде[1]

$$\begin{gathered} m\left(\frac{d\Delta \mathbf{v}}{dt}\right) + \Delta\boldsymbol{\omega} \times \Delta\mathbf{v} + \Delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^p(t) + \boldsymbol{\omega}^p(t) \times \Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{F} \\ J\frac{d\Delta\boldsymbol{\omega}}{dt} + \Delta\boldsymbol{\omega} \times J\Delta\boldsymbol{\omega} + \Delta\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega}^p(t) + \boldsymbol{\omega}^p(t) \times J\Delta\boldsymbol{\omega} = \Delta\mathbf{M} \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} \Delta\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v}^p + \Delta\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}^p + \Delta\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}^p + \Delta\boldsymbol{\delta}, \mathbf{P}^p + \Delta\mathbf{P}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{v}^p, \boldsymbol{\omega}^p, \boldsymbol{\delta}^p, \mathbf{P}^p, t) \\ \Delta\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{v}^p + \Delta\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}^p + \Delta\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}^p + \Delta\boldsymbol{\delta}, \mathbf{P}^p + \Delta\mathbf{P}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{v}^p, \boldsymbol{\omega}^p, \boldsymbol{\delta}^p, \mathbf{P}^p, t) \end{gathered} \tag{5}$$

Для вычисления дополнительного управления $\Delta\boldsymbol{\delta}$, $\Delta\mathbf{P}$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнений (4), используется функция Ляпунова. В качестве такой функции рассматривается модифицированная "кинетическая энергия отклонений"

$$G = \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\omega} \cdot J\Delta\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}Rm\Delta\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{v} \tag{6}$$

где R – положительный весовой множитель, $G(\cdot)$ – положительно определенная квадратичная форма. Стабилизирующее управление строится таким образом, чтобы обеспечить выполнение условия отрицательности производной от функции Ляпунова в силу системы уравнений в отклонениях:

$$\dot{G}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) < 0 \tag{7}$$

Полная производная от функции Ляпунова (6) в силу уравнений (4) имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{G} = \Delta\boldsymbol{\omega} \cdot J\Delta\boldsymbol{\omega} + Rm\Delta\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{v} = Rm\mathbf{v}^p \cdot (\Delta\boldsymbol{\omega} \times \Delta\mathbf{v}) + \\ + \boldsymbol{\omega}^p \cdot (\Delta\boldsymbol{\omega} \times J\Delta\boldsymbol{\omega}) + Rm\Delta\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{F} + \Delta\boldsymbol{\omega} \cdot \Delta\mathbf{M} \end{gathered}$$

Условия (7) выполняются, если

$$\begin{gathered} \dot{G} = Rm\mathbf{v}^p \cdot (\Delta\boldsymbol{\omega} \times \Delta\mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega}^p \cdot (\Delta\boldsymbol{\omega} \times J\Delta\boldsymbol{\omega}) + \\ + Rm\Delta\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{F}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{P}, \ldots) + \Delta\boldsymbol{\omega} \cdot \Delta\mathbf{M}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{P}, \ldots) < 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, исходная задача синтеза стабилизирующего управления сведена к алгебраической задаче решения неравенства (8) относительно неизвестных управлений $\boldsymbol{\delta}, \mathbf{P}$. Аналитическое решение неравенства (8) в общем случае невозможно в силу нелинейной зависимости $\Delta\mathbf{F}$ и $\Delta\mathbf{M}$ от характеристик движения. Наиболее слабым предположением, позволяющим решить уравнение (8) и в то же время выполненным практически для всех ЛА [1], является допущение о линейной зависимости аэродинамических сил и моментов от положений аэродинамических рулей ЛА, а также о том, что сила тяги двигателя ЛА направлена строго по оси x. Тогда в выражении (8)

---

[1] *Бюшгенс Г.С., Гоман М.Г., Загайнов Г.И., Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Метод функции Ляпунова в задачах синтеза управления пространственным движением самолета: Препринт. М.: Институт проблем управления, 1992.

последние два слагаемых заменяются на

$$Rm\Delta\mathbf{v}\cdot\left(\Delta\tilde{J}+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\delta}\Delta\delta\right)+Rm\Delta\mathbf{v}_x\Delta P+\Delta\omega\cdot\left(\Delta\tilde{\mathbf{M}}+\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\delta}\Delta\delta\right)$$

причем величины $\Delta\tilde{\mathbf{F}}$ и $\Delta\tilde{\mathbf{M}}$ отличаются от выражений (5) тем, что управления не варьируются.

Решение задачи (8) можно представить в форме

$$\Delta\delta=-\left(\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\delta}\right)^{-1}[K\Delta\omega+L_0],\qquad \mathbf{L}_0=Rm\Delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}^p+(J\Delta\omega)\times\omega^p+\Delta\tilde{\mathbf{M}} \tag{9}$$

$$\Delta P=-k_4\Delta\mathbf{v}_x-d_0,\qquad d_0=\Delta\mathbf{v}\cdot\Delta\tilde{\mathbf{F}}+\Delta\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\delta}\Delta\delta \tag{10}$$

где K – диагональная матрица с положительными элементами k_1, k_2, k_3; $k_4>0$. Возможность обращения матрицы $\partial M/\partial\delta$, вычисляемой вдоль программного режима (2), соответствует управляемости ЛА относительно центра масс. Значение $\Delta\delta$, входящее в (10), предварительно вычисляется по формуле (9).

Следует заметить, что при подстановке в (8) решения (9), (10) выполняется лишь нестрогое неравенство $\dot{G}\leqslant 0$, т.е. выполняются лишь условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнений (4).

Для обоснования асимптотической устойчивости нулевого решения нестационарных уравнений (4), замкнутых управлением (9), (10), можно воспользоваться критерием для знакопостоянной производной функции Ляпунова ([2], теорема 1.1). Рассмотрим функцию $W=(\Delta\mathbf{v}\times J\Delta\omega)_x$, т.е. первую координату этого векторного произведения. Функция W ограничена на множестве $\mathbf{\Gamma}$, $\dot{G}=0$ на множестве $E=\{\Delta\omega=0,\ \Delta\mathbf{v}_x=0\}$. Найдем производную от функции W в силу уравнений (4), (9), (10) на множестве E. Получим

$$\dot{W}\Big|_{\substack{\Delta\omega=0\\ \Delta\mathbf{v}_x=0}}=\left[\Delta\mathbf{v}\times J\frac{d\Delta\omega}{dt}\Big|_{\substack{\Delta\omega=0\\ \Delta\mathbf{v}_x=0}}+\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt}\times d\Delta\omega\Big|_{\substack{\Delta\omega=0\\ \Delta\mathbf{v}_x=0}}\right]_x=$$

$$=\Big[\Delta\mathbf{v}\times\Big[\Delta\tilde{\mathbf{M}}+\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\delta}\left(-\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\delta}\right)^{-1}[K\Delta\omega+Rm\Delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}^p+(J\Delta\omega)\times\omega^p+\Delta\tilde{\mathbf{M}}]-$$

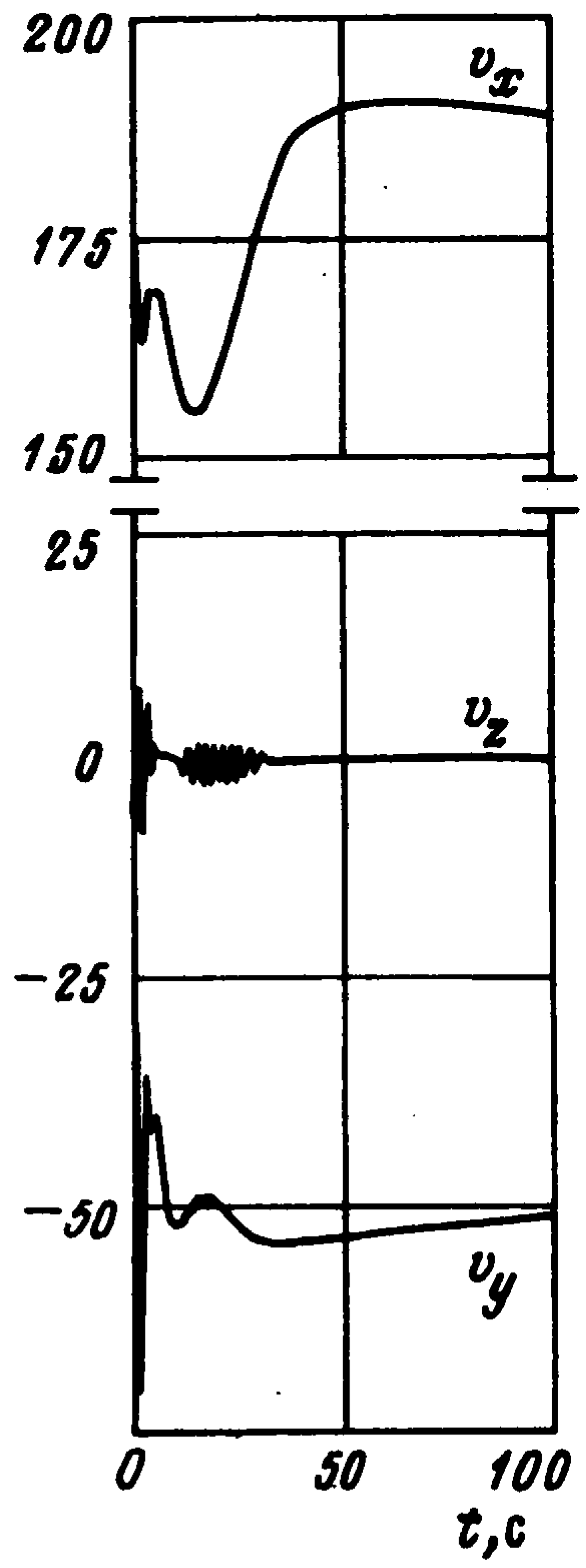
$$\left.-\Delta\omega\times J\Delta\omega-\Delta\omega\times J\omega^p-\omega^p\times J\Delta\omega\Big]+\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt}\times J\Delta\omega\Big|_{\substack{\Delta\omega=0\\ \Delta\mathbf{v}_x=0}}\right]_x=$$

$$=[\Delta\mathbf{v}\times(-K\Delta\omega-Rm\Delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}^p-\Delta\omega\times J\Delta\omega-\Delta\omega\times J\omega^p)-\Delta\omega\times J\omega^p)+$$

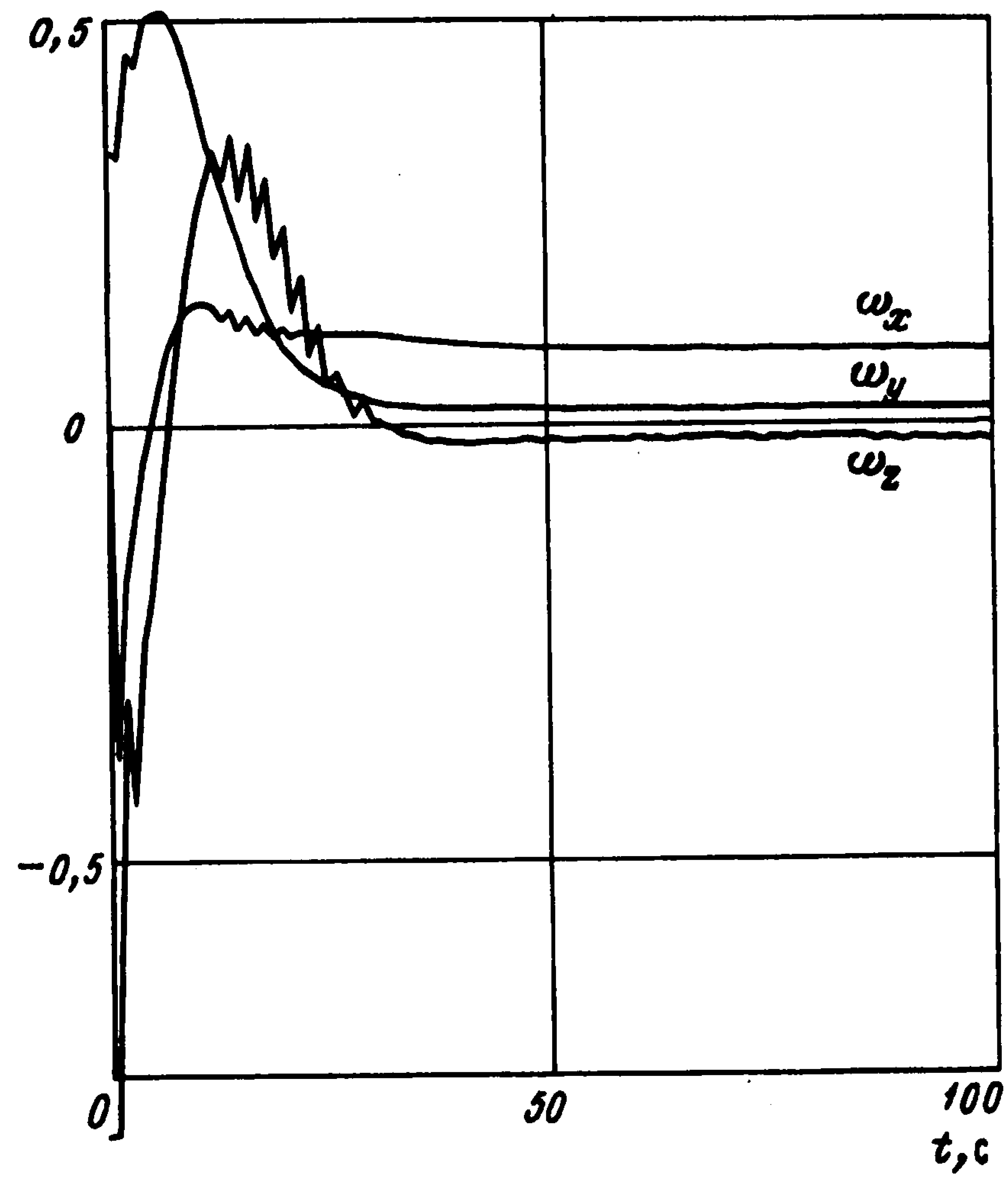
$$\left.+\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt}\times d\Delta\omega\Big|_{\substack{\Delta\omega=0\\ \Delta\mathbf{v}_x=0}}\right]_x=[-Rm\Delta\mathbf{v}\times[\Delta\mathbf{v}\times\mathbf{v}^p]]_x=Rm\mathbf{v}_x^p(\Delta\mathbf{v}_y^2+\Delta\mathbf{v}_z^2)$$

$$R>0,\ m>0$$

Таким образом, для всех программных траекторий, кроме $\mathbf{v}_x^p=0$ (а в этом случае не определены такие важные характеристики как углы атаки и скольжения), в соответствии с известным определением ([2], определение 1.1), определенно $\dot{W}\neq 0$ в множестве E. Остальные условия теоремы 1.1 из [2] выполняются, так как G и $\dot{G}$ не зависят явно от времени.



Фиг. 1



Фиг. 2

Найденное управление в форме (9), (10) получено при минимальном объеме предположений об аэродинамических характеристиках ЛА и обеспечивает асимптотическую устойчивость движения (3) (если, конечно, при этом удовлетворяются ограничения (2)).

Приведем результаты численного решения задачи стабилизации пространственной траектории ЛА управлением (9), (10). Используется модель высокоманевренного ЛА со следующими характеристиками: масса m = 18 тонн, характерная площадь S = 56,5 м^2, средняя аэродинамическая хорда b_a = 3,8 м, размах крыла l = 13,05 м, тензор инерции – диагональный с компонентами $J_x = 2{,}608 \cdot 10^4$ кг·м^2, $J_y = 1{,}6067 \cdot 10^5$ кг·м^2, $J_z = 1{,}378 \cdot 10^5$ кг·м^2. Зависимость аэродинамических сил и моментов от условий полета принимается в виде:

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F} - \mathbf{P} = (-X, Y, Z), \quad \mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$$

$$X = c_x \frac{\rho S v^2}{2}, \quad Y = c_y \frac{\rho S v^2}{2}, \quad Z = c_z \frac{\rho S v^2}{2}$$

$$M_x = m_x \frac{\rho S v^2}{2} l, \quad M_y = m_y \frac{\rho S v^2}{2} l, \quad M_z = m_z \frac{\rho S v^2}{2} b_a$$

$$c_x = c_{x1}(\alpha) + c_{x2}(\alpha)\delta_1, \quad c_y = c_{y1}(\alpha) + c_{y2}(\alpha)\delta_1, \quad c_z = c_{z1}(\alpha)\beta + c_{z2}(\alpha)\delta_2$$

$$m_x = m_{x1}(\alpha)\beta + m_{x2}(\alpha)\delta_3 + m_{x3}(\alpha)\delta_2 + m_{x4}(\alpha)\omega_x + m_{x5}(\alpha)\omega_y$$

$$m_y = m_{y1}(\alpha)\beta + m_{y2}(\alpha)\delta_3 + m_{y3}(\alpha)\delta_2 + m_{y4}(\alpha)\omega_y + m_{y5}(\alpha)\omega_x$$

$$m_z = m_{z1}(\alpha) + m_{z2}(\alpha)\delta_1 + m_{z3}(\alpha)\omega_z$$

где ρ – плотность набегающего потока, c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z – безразмерные коэффициенты соответствующих сил и моментов, α, β – углы атаки и скольжения.

При моделировании использовались приведенные в [3] табличные значения c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z и линейная интерполяция. Входящие в (9), (10) параметры определены следующим образом: $R = 10^{-3}$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 10^6$.

В качестве программной траектории рассматривалось снижение по винтовой линии без скольжения с постоянной скоростью (один виток за 60 с). Результаты моделирования – зависимости от времени t, c, проекций v_x, v_y, v_z скорости центра масс ЛА [м/с] и ω_x, ω_y, ω_z абсолютной угловой скорости ЛА [рад/с] представлены на фиг. 1, 2. По окончании переходного процесса все переменные стремятся к своим стационарным значениям, соответствующим выбранной программной траектории.

Данный метод стабилизации произвольных нестационарных траекторий ЛА применяется в Имитационной Модели Управляемого Полета[2], созданной на механико-математическом факультете МГУ под руководством В.В. Александрова, которого (а также С.С. Лемака) автор благодарит за замечания при обсуждении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-01-16241).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика пространственного движения самолета. М.: Машиностроение, 1967. 226 с.

2. *Матросов В.М.* Об устойчивости движения. // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 885–895.

3. *Буков В.Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 230 с.

Москва

Поступила в редакцию 14.XII.1994

[2] *В.А. Садовничий, В.В. Александров* и др. Математическое обеспечение автоматизированных комплексов обучения, тренировки и тестирования специалистов по управлению динамическими системами. Препринт № 3. Механико-математический факультет МГУ, 1994.