УДК 531.011

© 1996 г. Е.С. Пятницкий

КРИТЕРИИ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ КЛАССОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Рассматривается совокупность (класс) управляемых динамических систем, каждая из которых описывается уравнениями Лагранжа второго рода. Класс определяется заданием ограниченных областей, в которых могут принимать значения управления и обобщенные силы соответственно. Системы различаются как выражением кинетической энергии, которая может произвольно выбираться из множества положительно определенных квадратичных форм скоростей (с коэффициентами, зависящими от координат), так и обобщенными силами, которые могут изменяться в пределах одной и той же области. Для таких классов установлены необходимые и достаточные условия полной управляемости класса (т.е. полной управляемости любой системы, принадлежащей классу). Эти условия имеют наглядный физический смысл. Для манипуляционных роботов, например, в соответствии с этими условиями, для полной управляемости требуется, чтобы максимальные значения управляющих моментов превосходили по абсолютной величине соответствующие моменты остальных сил (веса, сопротивления, и т.д.).

Необходимость рассмотрения совокупности систем (а не одной системы) возникает в задачах управления с неполной информацией, в частности техническими системами, параметры которых могут произвольно изменяться в широких пределах (масса переносимого груза в манипуляционных системах, коэффициенты сопротивления, параметры окружающей среды и т.п.). При построении моделей биомеханических систем оказывается затруднительным указать точные выражения кинетической энергии и обобщенных сил. В этом случае можно говорить лишь об областях изменения сил или считать известными значения некоторых функционалов (типа максимального и минимального значений). Поэтому естественно ввести в рассмотрение совокупность (класс) управляемых динамических систем, каждая из которых описывается уравнениями Лагранжа второго рода. Класс определяется заданием ограниченных областей, в которых могут принимать значения управления и обобщенные силы соответственно. Системы этого класса могут различаться как выражением кинетической энергии, которая может произвольно выбираться из множества положительно определенных квадратичных форм скоростей (с коэффициентами, зависящими от координат), так и обобщенными силами, которые могут изменяться в пределах одной и той же области. Выделение класса полностью управляемых лагранжевых систем существенно упрощает решение проблемы управляемости конкретной системы в условиях неполной информации о действующих силах и параметрах. Условия управляемости классов гарантируют сохранение этого свойства при вариациях параметров и сил, т.е. имеют робастный характер. Это обстоятельство позволяет выявить общие закономерности, свободные от индивидуальных особенностей конкретной системы. Результаты распространены на случай ненатуральных систем, в которых кинетическая энергия может быть произвольной строго выпуклой функцией обобщенных скоростей.

1. Постановка задачи. Рассматривается класс всех управляемых динамических систем, движение которых в независимых обобщенных координатах $q = \| q_i \|_{i=1}^{n}$ может быть описано уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q,\dot q,t)+\sum_k b_{ik}(q,\dot q,t)u_k(t) \tag{1.1}$$

$i = 1, ..., n$

Здесь и всюду далее суммирование по i, k, s ведется от 1 до n.

Кинетическая энергия T каждой системы из этого класса выбирается из множества положительно определенных квадратичных форм

$$T=\tfrac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot q_i\dot q_k,\quad \lambda_0\sum_i \dot q_i^2\leqslant T\leqslant \lambda_1\sum_i \dot q_i^2$$
$$\lambda_j=\text{const},\qquad \lambda_j>0 \tag{1.2}$$

с непрерывно-дифференцируемыми коэффициентами $a_{ik}(q)$.

В качестве допустимых управлений $u(t)$ рассматриваются суммируемые на любом конечном интервале функции $u_i(t)$, принимающие значения в ограниченной замкнутой выпуклой области U, т.е.

$$u(t)\in U,\quad u(t)=\| u_i(t)\|_{i=1}^{n},\quad \operatorname{conv}U=U \tag{1.3}$$

Предполагается, что задана ограниченная замкнутая область $D_0\subset R^n$, в пределах которой может изменяться вектор обобщенных сил

$$Q(q,\dot q,t)\in D_0\subset R^n,\quad q\in R^n,\quad \dot q\in R^n,\quad t\geqslant t_0 \tag{1.4}$$

Это значит, что функции $Q_i(q, \dot q, t)$ не заданы, а известна лишь область D_0, в которой они могут принимать свои значения.

Элементы матрицы $B(q, \dot q, t) = \| b_{ik}(q, \dot q, t)\|_{i,k=1}^{n}$ предполагаются равномерно ограниченными функциями.

$$| b_{ik}(q,\dot q,t)|\leqslant b_0,\quad q\in R^n,\quad \dot q\in R^n,\quad t\geqslant t_0 \tag{1.5}$$

Поскольку управления $u_i(t)$ могут быть суммируемыми функциями, то решениями уравнений (1.1) будут непрерывно дифференцируемые функции $q(t)$ с абсолютно непрерывной производной $\dot q(t)$. Поэтому относительно $Q_i(q, \dot q, t)$ и $b_{ik}(q, \dot q, t)$ предполагается, что на указанном множестве $q(t)$ они являются суммируемыми функциями t на любом конечном интервале.

Изучаемый класс управляемых лагранжевых систем (1.1) задается множествами U, D_0, числами b_0, λ_0, λ_1. Конкретная система из этого класса выделяется заданием T, вектор-функции $Q(q, \dot q, t)$ и матрицы $B(q, \dot q, t)$ в пределах указанных функциональных и геометрических ограничений. Любая такая система считается принадлежащей рассматриваемому классу.

Задача состоит в определении условий полной управляемости указанного класса лагранжевых систем (1.1).

Определение 1.1. Следуя Р. Калману, систему (1.1) будем называть полностью управляемой в $2n$-мерном фазовом пространстве $\{q, \dot q\}$ на множестве ограниченных управлений $u(t)\in U$, если для любых двух точек $s^0\{q^0, \dot q^0\}$ и $s^1\{q^1, \dot q^1\}$ пространства состояний найдутся такие допустимое управление и конечный момент времени t_1 (свои для каждой пары s^0, s^1), что система (1.1) за это время будет переходить из s^0 в s^1.

Определение 1.2. Класс управляемых лагранжевых систем (1.1) будем называть полностью управляемым на множестве ограниченных управлений $u(t)\in U$, если полностью управляема каждая система из этого класса.

Полная управляемость класса систем (1.1) означает, что краевая задача

$$q(t_0)=q^0,\quad \dot q(t_0)=\dot q^0,\quad q(t_1)=q^1,\quad \dot q(t_1)=\dot q^1 \tag{1.6}$$

будет иметь решение для любой системы из этого класса при надлежащем выборе управления $u(t) \in U$ и момента времени t_1, своих для каждой системы и каждой пары $s^0\{q^0, \dot q^0\}$ и $s^1\{q^1, \dot q^1\}$.

Для указанной постановки задачи существенно условие ограниченности управлений (1.3). В большинстве работ по управляемости функции $u(t)$ не предполагаются ограниченными.

Целесообразность рассмотрения совокупности систем, а не конкретной системы, возникает в ряде задач, в частности, при анализе биомеханических систем [1, 2], когда не представляется возможным точно указать функции T, Q и B. Аналогичная ситуация возникает в задачах управления роботами, поскольку некоторые параметры (масса переносимого груза, коэффициенты трения, параметры окружающей среды, и т.п.) неизвестны и могут изменяться в широких пределах. Неопределенность описания вообще характерна для технических систем, параметры которых могут произвольно изменяться в пределах допусков. Рассмотрение класса систем позволяет также выявить общие закономерности, поскольку при этом не используются индивидуальные особенности конкретной системы.

Основная часть работы посвящена исследованию полной управляемости систем вида (1.1), в правую часть которых управление входит линейно. Эти системы ковариантны относительно преобразований обобщенных координат. В заключение рассмотрены классы систем, в которых обобщенные силы могут нелинейно зависеть от управления $u(t)$ и ненатуральные системы [3].

2. Управляемость простейшего класса. Сначала рассмотрим подкласс систем (1.1)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=u_i(t) \tag{2.1}$$

в который переходят системы вида (1.1) при $Q \equiv 0$, $B = E$, где E – единичная матрица порядка n. Относительно управлений $u(t)$ (для простоты) будем предполагать, что

$$u(t) \in U_1\{u(t): |u_i(t)| \leqslant h_i, \quad i = 1, \dots, n\} \tag{2.2}$$

Критерий полной управляемости систем класса (2.1) будет существенно использоваться далее при рассмотрении класса (1.1) и его обобщений.

Теорема 1. Для того чтобы класс лагранжевых систем (2.1) был полностью управляемым на множестве ограниченных управлений $u(t) \in U_1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$h_0 = \min_{1\leqslant i\leqslant n} h_i > 0 \tag{2.3}$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим систему класса (2.1), у которой $T = 0{,}5\lambda_0\sum_i \dot q_i^2$, $\lambda_0 > 0$. В этом случае $\lambda_0 \ddot q_i = u_i(t)$. Если для некоторого k величина $h_k = 0$, то из состояния s^0, в котором $q_k^0 = \dot q_k^0 = 0$, по траекториям этой системы нельзя достичь состояния s^1, в котором $q_k^1 = -1$, $\dot q_k^1 = 0$, так как $q_k(t) \equiv 0$. Поэтому при $h_0 = 0$ класс систем (2.1) будет содержать неуправляемую систему, что и доказывает необходимость (2.3).

Достаточность. Доказательство проведем конструктивно, путем явного построения допустимого управления $u(t) \in U_1$, которое переводит произвольную систему вида (2.1) из какого-либо начального состояния $s^0\{q^0, \dot q^0\}$ в произвольно заданное конечное состояние $s^1\{q^1, \dot{q}^1\}$ за конечное время. Будем отмечать ключевые этапы доказательства.

1°. Рассмотрим допустимое управление (типа сил сухого трения) [4]

$$u_i := -h_i \operatorname{sign} \dot{q}_i \tag{2.4}$$

Соответствующая система (2.1)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -h_i \operatorname{sign} \dot{q}_i \tag{2.5}$$

будет иметь разрывную правую часть. Решения системы (2.5) понимаются [5, 6] как непрерывно дифференцируемые функции $q(t)$ с абсолютно непрерывной производной $\dot{q}(t)$, почти всюду удовлетворяющие дифференциальному включению

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} \in F(\dot{q}), \quad F(\dot{q}) = \| -h_i \operatorname{sgn} \dot{q}_i \|_{i=1}^n \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn} \dot{q}_i = 1, \quad \text{при} \quad \dot{q}_i > 0; \quad \operatorname{sgn} \dot{q}_i = -1 \quad \text{при} \quad \dot{q}_i < 0 \\ &\operatorname{sgn} \dot{q}_i = \mu_i, \quad \mu_i \in [-1, +1] \quad \text{при} \quad \dot{q}_i = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

При этом функции $q(t)$ в соответствии с определением решения уравнений с разрывной правой частью [5, 6] строятся как предел последовательности решений уравнений (2.5) с непрерывной правой частью, когда разрывные функции специальным образом аппроксимируются последовательностью непрерывных функций $\varphi_s(\dot{q}_i)$, $s = 1, 2, \ldots$. В случае (2.5) вместо функций sign $\dot{q}_i$ рассматривается последовательность непрерывных функций $\varphi_s(\dot{q}_i)$, которая сходится к полунепрерывной сверху по включению [6] функции sgn $\dot{q}_i$, определенной в (2.7).

Объединение всех частичных пределов последовательности решений (2.1) $\{q^s(t)\}$ при $u_i = \varphi_s(\dot{q}_i)$, в том числе по всевозможным аппроксимирующим последовательностям $\varphi_s(\dot{q}_i)$, определяет множество всех решений (2.5). Оказывается, что это множество непусто и совпадает в случае системы (2.5), с множеством всех решений дифференциального включения (2.6) с полунепрерывной правой частью. При этом может возникать неединственность решения системы (2.5).

В соответствии со сказанным, рассматривая далее систему (2.5) (и аналогичного рода системы с разрывной правой частью), вместо этой системы всегда будем иметь в виду соответствующее дифференциальное включение (2.6). По теореме Филиппова [7, 8] для любого решения $\bar{q}(t)$ включения (2.6) существует такая суммируемая функция $\bar{u}(t) = \| \bar{u}_i(t) \|_{i=1}^n$

$$\bar{u}_i(t) = -h_i \operatorname{sgn} \dot{\bar{q}}_i(t), \quad \bar{u}_i(t) = \bar{\mu}_i(t) \in [-1, 1] \quad \text{при} \quad \dot{\bar{q}}_i(t) = 0 \tag{2.8}$$

что почти всюду на рассматриваемом интервале

$$\bar{u}_i(t) = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right)_{q=\bar{q}(t)} \tag{2.9}$$

Соотношение (2.9) позволяет определить суммируемую функцию $\bar{\mu}_i(t)$ на множестве, где $\dot{\bar{q}}_i(t) = 0$.

Теорема об изменении кинетической энергии T для всякого решения включения

(2.6) будет иметь вид

$$\dot{T} = -\sum_i h_i |\dot{q}_i| \qquad (2.10)$$

Так как T удовлетворяет неравенствам, указанным в (1.2), то $\sum_i |\dot{q}_i| \geqslant (Tn^{-1}\lambda_1^{-1})^{1/2}$, и, следовательно, из (2.10) следует, что $\dot{T} \leqslant -h_0 \sum_i |\dot{q}_i| \leqslant -2\rho\sqrt{T}$, где $2\rho = h_0(n^{-1}\lambda_1^{-1})^{1/2} > 0$.

Дифференциальное неравенство $\dot{T} \leqslant -2\rho\sqrt{T}$ будет справедливо для любого решения включения (2.6) или, что то же, решения (2.5). Поэтому $d\sqrt{T}/dt \leqslant -\rho < 0$, что приводит к неравенству $\sqrt{T} \leqslant \sqrt{T_0} - \rho(t - t_0)$, где T_0 начальное значение кинетической энергии. Следовательно, $T \equiv 0$ при $t \geqslant t_0 + \rho^{-1}\sqrt{T_0} = t_1$ и поэтому $\dot{q}(t) \equiv 0$, $q(t) = \gamma = \text{const}$.

Таким образом, любое движение системы (2.5), с учетом возможной неединственности, за конечное время приходит в состояние равновесия, которое зависит, вообще говоря, от начального состояния и выбора решения из множества всех решений включения (2.6).

Если выбрать состояние $s^0\{q^0, \dot{q}^0\}$, то по траектории $q^0(t)$, которая по произволу выбирается из множества всех движений, рассматриваемая система (2.5) за конечное время t_1 придет в некоторое состояние равновесия $M^0\{\gamma^0, 0\}$. Соответствующую этому движению $q^0(t)$ функцию (2.9) обозначим $u^0(t)$. Следовательно, при $u = u^0(t)$ в силу (2.9) система (2.1) будет переходить из $s^0\{q^0, \dot{q}^0\}$ в $M^0\{\gamma^0, 0\}$ за конечное время по траектории $q^0(t)$.

Аналогичными рассуждениями получим, что при допустимом управлении $u = u^1(t)$ система (2.1) перейдет из $s^1\{q^1, \dot{q}^1\}$ в некоторое состояние равновесия $M^1\{\gamma^1, 0\}$ за конечное время t_2 по траектории $q^1(t)$. При замене $t \to t_2 - t$ система (2.1) перейдет в систему этого же вида с управлением $u = u^1(t_2 - t)$, так как левая часть уравнений Лагранжа (2.1) (в стационарном случае) не изменяется при обращении времени. Поэтому при $u(t) = u^1(t_2 - t)$ система (2.1) за конечное время t_2 будет переходить из $M^1\{\gamma^1, 0\}$ в $s^1\{q^1, \dot{q}^1\}$.

2°. Для завершения доказательства осталось показать, что существует допустимое управление $u = u^2(t)$, которое переводит систему (2.1) из $M^0\{\gamma^0, 0\}$ в $M^1\{\gamma^1, 0\}$ за конечное время. С этой целью введем в рассмотрение вектор-функцию

$$q^2(t) = \gamma^0 + \tfrac{1}{2}(\gamma^1 - \gamma^0)(1 - \cos\omega t) \qquad (2.11)$$

соединяющую состояния M^0 и M^1 за время $t_3 = \pi\omega^{-1}$. Покажем, что функция $q^2(t)$ при достаточно малом $\omega > 0$ будет решением (2.1) при некотором допустимом управлении $u(t) \in U_1$. Подставляя (2.11) в левую часть (2.1), получим

$$u_i^2(t) = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]_{q=q^2(t)} = \omega^2 \psi_i(\cos\omega t,\ \sin\omega t) \qquad (2.12)$$

где $\psi_i(x, y)$ – непрерывно дифференцируемые функции. В этом случае $|\psi_i(\cos\omega t, \sin\omega t)| \leqslant r < \infty$, $t \geqslant 0$. Выбирая параметр ω из условия $\omega^2 r < h_0$, получим, что функция $u^2(t)$ в (2.12) будет удовлетворять (2.2), т.е. будет допустимым управлением. Следовательно, допустимое управление $u^2(t)$ будет переводить (2.1) из $M^0\{\gamma^0, 0\}$ в $M^1\{\gamma^1, 0\}$ за время $t_3 = \pi\omega^{-1} < \infty$.

3°. Окончательно имеем, что $u^0(t) \in U_1$ переводит (2.1) из $s^0\{q^0, \dot{q}^0\}$ за время $t_1 < \infty$ в $M^0\{\gamma^0, 0\}$, управление $u^2(t) \in U_1$ переводит (2.1) из $M^0\{\gamma^0, 0\}$ в $M^1\{\gamma^1, 0\}$ за время $t_3 = \pi\omega^{-1} < \infty$ и, наконец, управление $u^1(t_2 - t) \in U_1$ переводит (2.1) из $M^1\{\gamma^1, 0\}$ в $s^1\{q^1, \dot{q}^1\}$ за конечное время t_2.

В процессе доказательства на выбор системы (2.1) (т.е. на выбор кинетической энергии T) никаких условий, кроме (1.2), не накладывалось. Поэтому предыдущие рассуждения справедливы для любой системы вида (2.1), т.е. для всего класса таких систем. Теорема 1 доказана.

Замечание. В процессе доказательства теоремы 1 конструктивно построено управление $u(t) \in U_1$, которое переводит систему вида (2.1) из состояния s^0 в состояние s^1 за конечное время. Соответствующее движение состоит из участка торможения, движения с малыми по модулю обобщенными скоростями и участка разгона.

3. Общий случай. Рассмотрим теперь класс лагранжевых систем (2.1), которые могут содержать обобщенные силы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(q,\dot{q},t) + u \tag{3.1}$$

где $u(t)$ удовлетворяет (1.3). Системы (1.1) переходят в (3.1) при $B(q, \dot{q}, t) \equiv E$. Через Φ обозначим ограниченное замкнутое множество (определяющее класс (3.1)), в котором могут принимать значения функции $(-1)\,Q(q, \dot{q}, t)$, т.е.

$$(-1)\ Q(q,\dot{q},t) \in \Phi, \quad \Phi \subset R^n, \quad q \in R^n, \quad \dot{q} \in R^n, \quad t \geqslant t_0 \tag{3.2}$$

Теорема 2. Для того чтобы класс лагранжевых систем (3.1) был полностью управляемым на множестве ограниченных управлений $u(t) \in U$, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\varepsilon > 0$, при котором выполнено включение

$$\Phi_\varepsilon \subset U, \qquad \operatorname{conv} U = U \tag{3.3}$$

где Φ_ε – замкнутая ε – окрестность множества Φ в (3.2).

Доказательство. Необходимость. Если условие (3.3) не выполняется, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется вектор $a_\varepsilon \in \Phi_\varepsilon$, не принадлежащий U. Поскольку точка a_ε и выпуклое множество U не пересекаются, то существует гиперплоскость $(c_\varepsilon, x) + d_\varepsilon = 0$, разделяющая a_ε и U. Без ограничения общности будем считать, что c_ε – единичный вектор ($\| c_\varepsilon \| = 1$). При этом $(c_\varepsilon, a_\varepsilon) + d_\varepsilon \leqslant 0$, $(c_\varepsilon, u) + d_\varepsilon > 0$ для всех $u \in U$. Для последовательности $\varepsilon_s \to 0$ аналогично получим последовательности a^s, c^s ($\| c^s \| = 1$) и d^s. Выбирая, если нужно, подпоследовательности, получим, что $c^s \to c$, $d^s \to d$ и $a^s \to a \subset \Phi$. Рассмотрим систему из класса (3.1), у которой $T = \frac{1}{2}\lambda_0 \sum\limits_i \dot{q}_i^2$, $Q = -a = \text{const}$. Так как $\lambda_0 \ddot{q} = -a + u$, а по построению $(c, a) + d \leqslant 0$, $(c, u) + d \geqslant 0$, то $\lambda_0(c, \ddot{q}) = (c, u) - (c, a) = (c, u) + d - (c, a) - d \geqslant 0$ при любых $u \in U$. Поэтому по траекториям этой системы из состояния $s^0\{q^0, \dot{q}^0\}$, в котором $(c, q^0) \geqslant 0$, $(c, \dot{q}^0) \geqslant 0$, нельзя достичь состояний $s^1\{q^1, \dot{q}^1\}$, где $(c, q^1) < 0$, так как в этом случае $(c, q(t)) \geqslant (c, q^0) + t(c, \dot{q}^0) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$. Следовательно, если условие (3.3) не выполнено, то в классе систем (3.1) будет существовать неуправляемая система, что и доказывает необходимость включения (3.3).

Достаточность. Рассмотрим какую-либо систему вида (3.1). При $| w_i(t) | \leqslant 2^{-1}\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, управление $u = -Q(q, \dot{q}, t) + w(t)$ будет допустимым в силу условия (3.3), так как это $u \in \Phi_{\varepsilon/2} \subset U$. При указанном выборе допустимого управления система (3.1) переходит в систему вида (2.1), где $u(t) = w(t)$, $|w_i(t)| \leq h_i$, $h_i = 2^{-1}\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. По теореме 1 последняя система будет полностью управляемой, а следовательно, полностью управляемой будет и любая система класса (3.1).

Условие (3.3) теоремы 2 позволяет выбрать допустимое управление, которое не только компенсирует обобщенные силы $Q(q, \dot{q}, t)$, но и гарантирует наличие ресурса, обеспечивающего полную управляемость класса лагранжевых систем (3.1). При выборе допустимого управления и в форме $u = -Q + w$ класс систем (3.1) переходит в класс (2.1). В случае, когда множество Φ в (3.2) представляет собой параллелепипед, а множество U имеет вид (2.2), условие (3.3) можно представить в виде

$$\sup |Q_i(q, \dot{q}, t)| < h_i$$

Эти неравенства имеют очевидный физический смысл. Например, манипуляционный робот с n степенями свободы будет принадлежать классу полностью управляемых лагранжевых систем, если максимально возможные значения h_i управляющих моментов приводов будут превосходить (по абсолютной величине) верхнюю грань соответствующих моментов сил тяжести, сил сопротивления и т.д.

Следует отметить, что условие полной управляемости (3.3) устанавливает отношение только между обобщенными силами и управляющими воздействиями. Параметры существенно нелинейной левой части уравнений динамики, определяемой оператором Эйлера–Лагранжа, никак не влияют на условия полной управляемости, если T удовлетворяет (1.2). Это значит, что свойство полной управляемости класса механических зависит не от структуры системы, а полностью определяется действующими и управляющими силами.

Из теоремы 2 также следует важный вывод о минимально возможном числе независимых управляющих воздействий. Именно для полной управляемости класса механических систем (3.1) с n степенями свободы необходимо, чтобы число независимых управлений $u_i(t)$ было не менее n.

Перейдем к анализу класса систем (1.1). Введем в рассмотрение подкласс этих систем, который определяется неравенством

$$|\det B(q,\dot{q},t)| \geq \Delta > 0, \quad q \in R^n, \quad \dot{q} \in R^n, \quad t \geq t_0 \tag{3.4}$$

где $\Delta > 0$ – фиксированное положительное число. Число Δ наряду с D_0, U, b_0, λ_0 и λ_1 определяет указанный подкласс систем (1.1).

Для того чтобы разъяснить смысл условия (3.4), рассмотрим систему из класса (1.1), у которой $T = {}^1/_2\, \lambda_0 \Sigma_i \dot{q}_i^2$, $Q = P = \text{const}$, $P \in D_0$, $b_{1k}(q, \dot{q}, t) \equiv 0$ при всех $1 \leq k \leq n$. В этом случае $\det B = 0$ и $\ddot{q}_1 = p_1$. Полагая для определенности $p_1 \geq 0$, будем иметь, что по т раекториям описанной системы из состояния s^0, в котором $q_1^0 = \dot{q}_1^0 = 0$, нельзя достичь состояния s^1, в котором $q_1^1 < 0$, так как $\ddot{q}_1 \geq 0$.

Таким образом, условие (3.4), как показывает рассмотренный пример, позволяет выделить подкласс систем (1.1), не содержащий неуправляемых систем. Вопрос о необходимости условия (3.4) в общем случае остается открытым.

Теорема 3. Для полной управляемости подкласса лагранжевых управляемых систем (1.1), определяемого условием (3.4), необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\varepsilon > 0$, при котором выполнено включение

$$\Phi_{1\varepsilon} \subset U \tag{3.5}$$

где $\Phi_{1\varepsilon}$ – замкнутая ε-окрестность ограниченного множества Φ_1, в пределах которого может изменяться вектор-функция $(-1)B^{-1}(q, \dot{q}, t)Q$ при $Q \subset D_0$, $q \in R^n$, $\dot{q} \in R^n$, $t \geq t_0$.

Доказательство. Необходимость. Если условие (3.5) не выполнено, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вектор $a_\varepsilon \in \Phi_{1\varepsilon}$, не принадлежащий U. По теореме об отделимости выпуклых множеств будем иметь, что существует гиперплоскость $(c_\varepsilon, u) + d_\varepsilon = 0$, разделяющая a_ε и U, где $\|c_\varepsilon\| = 1$. Последовательность $\varepsilon_s \to 0$ индуцирует последовательности a^s, $c^s(\|c^s\| = 1)$ и d^s. Выбирая, если нужно, подпоследовательности, будем иметь, что $c^s \to c$, $a^s \to a \in \Phi_1$, $d^s \to d$, причем $(c, a) + d \le 0$ и $(c, u) + d \ge 0$ при всех $u \in U$.

Рассмотрим систему класса (1.1), у которой $T = \frac{1}{2}\lambda_0 \Sigma_i \dot{q}_1^2$, $B = \text{const}$, $B^{-1}Q = -a$, $a \subset \Phi_1$. Из уравнений движения описанной системы следует, что $\lambda_0 \ddot{q} = Bu - Ba$ и, следовательно,

$$\lambda_0 (c, B^{-1}\ddot{q}) = (c, u) + d - (c, a) - d \ge 0.$$

Это значит, что

$$(c, B^{-1}q(t)) \ge (c, B^{-1}q^0) + t(c, B^{-1}\dot{q}^0) \ge 0.$$

Поэтому по траекториям рассматриваемой системы из состояния $s^0\{q^0, \dot{q}^0\}$, где $(c, B^{-1}q^0) \ge 0$, $(c, B^{-1}\dot{q}^0) \ge 0$, нельзя достичь состояния $s^1\{q^1, \dot{q}^1\}$, где $(c, B^{-1}q^1) < 0$. Следовательно, если условие (3.5) не выполнено, то подкласс систем (1.1), определяемый неравенством (3.4), будет содержать неуправляемую систему, что и завершает доказательство необходимости условия (3.5).

Достаточность. Введем управление

$$u = -B^{-1}(q, \dot{q}, t)Q(q, \dot{q}, t) + B^{-1}(q, \dot{q}, t)w$$

Если $|w_1(t)| \le 2^{-1}n^{-1}c_0^{-1}\varepsilon = \mu$, где $c_0 \ge |c_{ik}(q, \dot{q}, t)|$, а $C(q, \dot{q}, t) = B^{-1}(q, \dot{q}, t)$, то это управление будет допустимым, так как $u \subset \Phi_{1\varepsilon/2} \subset U$. Равномерная ограниченность элементов матрицы $C(q, \dot{q}, t)$ вытекает из (3.4) и (1.5). При указанном выборе управления системы вида (1.1) при учете (3.4) переходят в системы вида (2.1) при $u_i(t) = w_i(t)$, где $|w_1(t)| \le \mu$, $\mu > 0$. По теореме 1 все эти системы будут полностью управляемыми, а следовательно, полностью управляемым будет и класс (1.1).

4. Нелинейная зависимость сил от управлений. Везде выше рассматривались лагранжевы системы, в которых правые части уравнений движения линейно зависели от управляющих воздействий. Рассмотрим теперь общий класс управляемых лагранжевых систем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(q, \dot{q}, t, u), \; u \in U, \; \text{conv}U = U \tag{4.1}$$

Введем в рассмотрение класс систем (4.1), который назовем классом разрешимых систем.

Класс систем (4.1) будем называть разрешимым, если существует такое $\varepsilon > 0$, что уравнения

$$Q(q, \dot{q}, t, u) = w, \; q \in R^n, \; \dot{q} \in R^n, \; t \ge t_0 \tag{4.2}$$

имеют допустимое решение

$$u = u_0(q, \dot{q}, t, w) \subset U, \; q \in R^n, \; \dot{q} \in R^n, \; t \ge t_0 \tag{4.3}$$

при всех w из шара $\|w\| \le \varepsilon$.

Все классы систем, включая подкласс (1.1) и (3.4), которые были рассмотрены выше, принадлежали множеству разрешимых систем.

Теорема 4. Класс разрешимых лагранжевых систем (4.1) является полностью управляемым на множестве ограниченных управлений $u \in U$.

Справедливость теоремы 4 непосредственно вытекает из теоремы 1. Действительно, если в (4.1) в качестве допустимого управления взять $u_0(q, \dot q, t, w)$ из (4.3), то класс систем (4.1) перейдет в класс систем (2.1), который при $\|w\| \le \varepsilon$ будет полностью управляемым.

Заметим, что понятие разрешимости тесно связано с вопросом реализуемости какого-либо движения $q^*(t)$, т. е. с вопросом существования допустимого управления, удовлетворяющего условию

$$Q(t,\ \dot q^*,\ t,\ u) = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q}\right]_{q=q^*(t)}$$

Последнее уравнение по существу представляет собой уравнение вида (4.2) для определения $u(t)$.

Отметим, что аналитические условия разрешимости (4.3) можно получить с использованием теоремы о неявных функциях, если уравнение $Q(q, \dot q, t, u) = 0$ будет иметь решение $\bar u(q, \dot q, t)$, замкнутая область изменения которого $\bar U \subset \operatorname{int} U$.

5. Управляемость классов ненатуральных систем. В этом разделе полученные выше результаты распространяются на классы систем, которые не являются натуральными. Кинетическая энергия T таких систем может быть произвольной строго выпуклой функцией обобщенных скоростей $\dot q_i$, вообще говоря, не представимой в виде (1.2).

В предыдущем изложении центральную роль играла теорема 1, поскольку условия полной управляемости, сформулированные в теоремах 2–4, позволяли свести задачу к системам вида (2.1). Имея это в виду, установим здесь только аналог теоремы 1 для ненатуральных систем. При доказательстве теоремы 1 использовалась теорема об изменении кинетической энергии $\dot T = \Sigma_i Q_i \dot q_i$. Поскольку в случае ненатуральных систем аналогом этой теоремы является условие

$$\frac{d}{dt}\left(\Sigma_i \dot q_i \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - T\right) = \Sigma_i Q_i \dot q_i$$

то целесообразно перейти к каноническим переменным $\{q, p\}$, определяя обобщенные импульсы p с помощью преобразования Лежандра $p_i = \partial T/\partial \dot q_i$. Как известно, преобразование Лежандра будет определять диффеоморфизм пространств $\{q, \dot q\}$ и $(q, p\}$, если $T(q, \dot q)$ будет строго выпуклой функцией $\dot q$, удовлетворяющей условию

$$\Sigma_i(\partial T / \partial \dot q_i)^2 \to \infty \quad \text{при } \Sigma_i \dot q_i^2 \to \infty$$

В этом случае [9] функция Гамильтона

$$H(q, p) = \max_{\dot q \in R^n}[(p, \dot q) - T(q, \dot q)]$$

будет строго выпуклой функцией p, имеющей единственную точку минимума $p = 0$ ($H(q, 0) = 0$), а уравнения движения систем класса (2.1) будут иметь вид

$$\dot q_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot p_i = -\partial H / \partial q_i + u_i(t), \quad u \in U_1 \tag{5.1}$$

(множество U_1 определено в (2.2)). При наличии обобщенных сил правые части уравнений (5.1) для импульсов p будут содержать слагаемые $Q_i(q, p, t)$. Рассмотрим класс управляемых систем (5.1), где фукнция $H(q, p)$ может быть произвольной строго выпуклой функцией импульсов p класса C^2, удовлетворяющей неравенствам

$$\varphi_1(\|p\|) \le H(q,\ p) \le \varphi_2(\|p\|)$$

$$\varphi_3(\|p\|) \le \Sigma_i(\partial H / \partial p_i)^2,\ \ p \in R^n,\ \ q \in R^n \tag{5.2}$$

где $\varphi_s(\xi)$ ($\varphi_s(0) = 0$) – непрерывные, строго возрастающие функции, допускающие бесконечно большой низший предел [10].

Единственной стационарной точкой гамильтонианов $H(q, p)$, допускаемых к рассмотрению, является точка $p = 0$. Функции $\varphi_s(\xi)$ в (5.2) определяют класс рассматриваемых систем (5.1) и считаются заданными. В случае рассмотренных выше натуральных систем $\varphi_s(\zeta) = a_s\xi^2$, так как $H(q, p) = 0{,}5\Sigma_{ik}\alpha_{ik}(q)p_ip_k$.

В этих предположениях справедлива

Теорема 5. Для полной управляемости описанного класса систем (5.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.3).

Доказательство. Необходимость. Если при некотором k величина $h_k = 0$, то класс систем (5.1) будет содержать неуправляемые системы. Действительно, рассмотрим $H = \Sigma_iH_i(p_i)$. В этом случае $\dot p_k = 0$. Поэтому из состояния $s^0\{q^0, p^0\}$ нельзя достичь состояния $s^1\{q^1, p^1\}$, где $p_k^1 \ne p_k^0$.

Достаточность. Выберем произвольно две точки $s^0\{q^0, p^0\}$ и $s^1\{q^1, p^1\}$ фазового пространства $\{q, p\}$ и рассмотрим управление $u_i = -h_0 \operatorname{sign}(\partial H/\partial p_i)$. Система (5.1) будет иметь вид

$$\dot q_i = \partial H / \partial p_i,\ \ \dot p_i = -\partial H / \partial q_i - h_0 \operatorname{sign}(\partial H / \partial p_i) \tag{5.3}$$

Полная производная H в силу (5.3), т. е. в силу соответствующего (5.3) дифференциального включения

$$\dot q = \partial H / \partial p,\ \ \dot p + \partial H / \partial q \in -h_0\|\operatorname{sgn} \partial H / \partial p_i\|_{i=1}^n$$

(функция sgn η определена в (2.6)), будет иметь вид

$$\dot H = -h_0\Sigma_i|\partial H / \partial p_i|$$

причем в силу (5.2) будем иметь оценку $\dot H \le -h_0(n^{-1}\varphi_3(\|p\|))^{1/2} < 0$ при $p \ne 0$. Из (5.2) и свойства строгой монотонности функций $\varphi_s(\|p\|)$ вытекает оценка $\|p\| \ge \psi_2(H)$, что приводит к неравенству

$$\dot H \le -h_0(n^{-1}\varphi_3(\psi_2(H)))^{1/2}$$

Отсюда следует, что многообразие $H = 0$ будет асимптотически устойчиво. Из последнего неравенства и равномерных по $q \in R^n$ оценок (5.2) следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ найдется такое $t(\varepsilon, \Delta)$, что $\|p(t)\| \le \varepsilon$ при всех $t \ge t(\varepsilon, \Delta)$, если $\|p_0\| \le \Delta$. В шаре $\|p\| \le \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ строго выпуклая по p функция $H(q, p)$ допускает представление

$$H(q,\ p) = 0{,}5\Sigma_{ik}c_{ik}(q)p_ip_k + \psi(q,\ p),\ \ c_{ik} = (\partial^2H / \partial p_i\partial p_k)_{p=0} \tag{5.4}$$

где $|\psi(q, p)| \le \rho\|p\|^2$ с достаточно малым $\rho > 0$. В силу строгой выпуклости $H(q, p)$ по p квадратичная форма $\Sigma_{ik}c_{ik}(q)p_ip_k \ge \mu_1\Sigma_ip_i^2$, $\mu_1 = \mathrm{const}$, $\mu_1 > 0$. Поэтому в шаре $\|p\| \le \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет иметь место неравенство $H(q, p) \ge \mu\Sigma_ip_i^2$, $\mu = \mathrm{const}$, $\mu > 0$. Следовательно, в этом шаре $|p_i| \le (\mu^{-1}H)^{1/2}$ и для производной

$\dot H = -h_0\Sigma_i|\partial H/\partial p_i|$ будет справедлива оценка

$$\dot H \le -h_0(\mu^{-1}H)^{1/2} = -2\beta(H)^{1/2},\ \beta > 0 \tag{5.5}$$

Действительно, из свойства выпуклости $H(q, p)$ по p вытекает неравенство

$$H(q,\ p) \le \Sigma_i p_i \partial H/\partial p_i \le \Sigma_i|p_i|\ |\partial H/\partial p_i| \le (\mu^{-1}H)^{1/2}\Sigma_i|\partial H/\partial p_i|$$

откуда следует, что $(\mu H)^{1/2} \le \Sigma_i|\partial H/\partial p_i|$ и, следовательно, справедливость (5.5).

Поэтому $d/dt\,H^{1/2} \le -\beta < 0$, что влечет $H^{1/2} \le H_0^{1/2} - \beta(t - t_0)$. Учитывая (5.2), получим, что $\varphi_1^{1/2}(\|p\|) \le \varphi_2^{1/2}(\|p_0\|) - \beta(t - t_0)$, откуда непосредственно вытекает тождество $p(t) \equiv 0$ при $t \ge t_0 + \beta^{-1}\varphi_2^{1/2}(\|p_0\|)$. Так как $\partial H/\partial p = 0$ при $p = 0$, то $\dot q(t) \equiv 0$ при $t \ge t_0 + \beta^{-1}\varphi_2^{1/2}(\|p_0\|)$ и $q(t) = \gamma$. Этот факт может быть установлен также с использованием теоремы В.В. Румянцева [10] в сочетании с теоремой в [11].

Таким образом, система (5.3) за конечное время переходит по траектории $\{q^0(t), p^0(t)\}$, которая произвольно может быть выбрана из множества всех решений этой системы из $s^0\{q^0, p^0\}$, в состояние равновесия $M^0\{\gamma^0, 0\}$. Как и при доказательстве теоремы 1, на движении $\{q^0(t), p^0(t)\}$ можно определить суммируемую функцию $u^0(t) \in U_1$, которая будет переводить (5.1) из s^0 в M^0.

Точно так же устанавливается, что система

$$\dot q_i = -\partial H/\partial p_i,\ \ \dot p_i = \partial H/\partial p_i - h_0\,\mathrm{sign}(\partial H/\partial p_i)$$

полученная из (5.1) обращением времени, будет переходить за конечное время t_2 из $s^1\{q^1, p^1\}$ в $M^1\{\gamma^1, 0\}$ по траектории $\{q^1(t), p^1(t)\}$, определяющей допустимое управление $u^2(t)$. Обращая время в последней системе, получим, что система (5.1) будет переходить за это же время из M^1 в s^1 при $u = u(t_2 - t)$.

Покажем, что существует управление $u^3(t) \in U$, которое переводит (5.1) из $M^0\{\gamma^0, 0\}$ в $M^1\{\gamma^1, 0\}$ за конечное время. С этой целью рассмотрим функцию (2.11), соединяющую M^0 и M^1 в пространстве $\{q, \dot q\}$ за время $\pi\omega^{-1}$. Так как преобразование Лежандра задает диффеоморфизм пространств $\{q, \dot q\}$ и $\{q, p\}$, значению $\dot q = 0$ будет соответствовать единственная точка $p = 0$, поскольку $p = 0$ – единственная точка, где $\partial H/\partial p = 0$. Следовательно, (2.11) будет соединять M^0 с M^1 и в пространстве $\{q, p\}$.

Покажем, что эта траектория может быть реализована в (5.1) с помощью допустимого управления $u^3(t) \in U_1$, причем так, что $\|p(t)\| \le \varepsilon$. При достаточно малых $\|\dot q\|$, соответствующих $\|p\| \le \varepsilon$, аналогично (5.4) имеем

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma_{i,k}a_{ik}(q)\dot q_i \dot q_k + \psi_1(q,\ \dot q)$$

и, следовательно, $p_i = \partial T/\partial q_i = \Sigma_s q_{is}(q, \dot q)\dot q_s$, что на движении (2.11) приводит к зависимости $p_i(t) = \omega\ \psi_i(\sin\omega t,\ \cos\omega t)$ и $\dot p_i(t) = \omega^2\varphi_i(\sin\omega t,\ \cos\omega t)$ с непрерывными функциями $\varphi_i(x, y)$ и $\psi_i(x, y)$. При $\|p\| \le \varepsilon$ в силу (5.4) на движении (2.11) будем иметь, что $\partial H/\partial p_i = \omega^2\Phi_i\ (\sin\omega t,\ \cos\omega t)$. Поэтому, полагая $u_i^3(t) = \dot p_i(t) + \partial H/\partial q_i = \omega^2 R_i(\sin\omega t, \cos\omega t)$, заключаем, что $u^3(t) \in U_1$ при достаточно малом ω. Выбирая ω так, чтобы $u^3(t) \in U_1$ и $\|p(t)\| \le \varepsilon$, получим, что $u^3(t)$ будет переводить систему (5.1) из M^0 в M^1 за конечное время. Поскольку при доказательстве конкретный вид гамильтониана $H(q, p)$ не использовался, все рассуждения остаются справедливыми для всех систем класса (5.1), где гамильтониан удовлетворяет (5.2). Теорема 5 доказана.

Аналоги теорем 2, 3 и 4 для ненатуральных устанавливаются с помощью теоремы 5 дословным повторением соответствующих доказательств.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00157).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pyatnitskiy E.S.* Coordination of multiarm robot manipulators motion and some application to human movements // Proc. 2nd Intern. Symp. on three-dimensional Analysis of Human Movement. Keynote Address. Poitiers, France. 1993. P. 61–65.
2. *Бернштейн Н.А.* Очерки по физиологии движений и физиологии активности. М.: Медицина, 1966. 348 с.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
4. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
5. *Айзерман М.А., Пятницкий Е.С.* Основы теории разрывных систем I, II // Автоматика и телемеханика. 1974. № 7. С. 33–47. № 8. С. 39–61.
6. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
7. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астроном., физ., хим. 1959. № 2. С. 25–32.
8. *Гамкрелидзе Р.В.* О скользящих оптимальных режимах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1243–1245.
9. *Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.* Сборник задач по аналитической механике. М.: Наука, 1980. 320 с.
10. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
11. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.X.1995