УДК 539.375

© 1996 г. А.С. Строганов

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГЕНКИ

Обобщение теоремы Генки достигается использованием в качестве ее физической основы условия пластичности Кулона, которое дает соотношения между средними нормальными напряжениями и главными направлениями в узлах сетки характеристик, переходящие для идеально-пластических сред в теорему Генки.

Пластические свойства грунтов могут быть описаны законом Кулона

$$|\tau_n| = \bar{\sigma}_n \operatorname{tg}\rho \tag{1}$$

где τ_n – касательное напряжение на площадках скольжения, $\bar{\sigma}_n = H + \sigma_n$ – приведенное нормальное напряжение, $H = c/\operatorname{tg}\rho$ – гидростатическое давление (связность), эквивалентное сцеплению c, ρ – угол внутреннего трения грунта в условиях плоской деформации, σ_n – нормальное напряжение на площадках скольжения.

В условиях плоской деформации компоненты напряжения, удовлетворяющие (1), выражаются зависимостями

$$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}(1 \pm \sin\rho\cos 2\chi), \quad \tau_{xy} = \bar{\sigma}\sin\rho\sin 2\chi \tag{2}$$

где $\bar{\sigma} = H + \sigma$ – приведенное среднее нормальное напряжение σ, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ – компоненты приведенного нормального напряжения, τ_{xy} – компонента касательного напряжения, χ – угол наклона к оси x главного направления.

Внесение в уравнения равновесия весомой среды (γ – объемный (удельный) вес среды) выражений (2) дает основную систему уравнений Кёттера, относящихся к гиперболическому типу, с системой уравнений характеристик [1]

$$dy = dx \operatorname{tg}(\chi \mp \varepsilon) \tag{3}$$

где $\varepsilon = \pi/4 - \rho/2$, и системой соотношений вдоль характеристик

$$d\sigma \mp 2\bar{\sigma}\operatorname{tg}\rho\, d\chi = \gamma(dy \mp dx \operatorname{tg}\rho) \tag{4}$$

в которых верхние знаки относятся к первому семейству характеристик (α), а нижние – ко второму (β).

Для численного решения краевых задач методом Массо обычно используются уравнения (3) и (4) в разностной форме. Предлагаемое решение поставленной задачи обобщения теоремы Генки требует использования разностной формы уравнений (4) для невесомой среды ($\gamma = 0$), которые принимают вид

$$\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_a = 2\bar{\sigma}_a(\chi - \chi_a)\operatorname{tg}\rho \tag{5}$$

$$\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b = -2\bar{\sigma}_b(\chi - \chi_b)\operatorname{tg}\rho \tag{6}$$

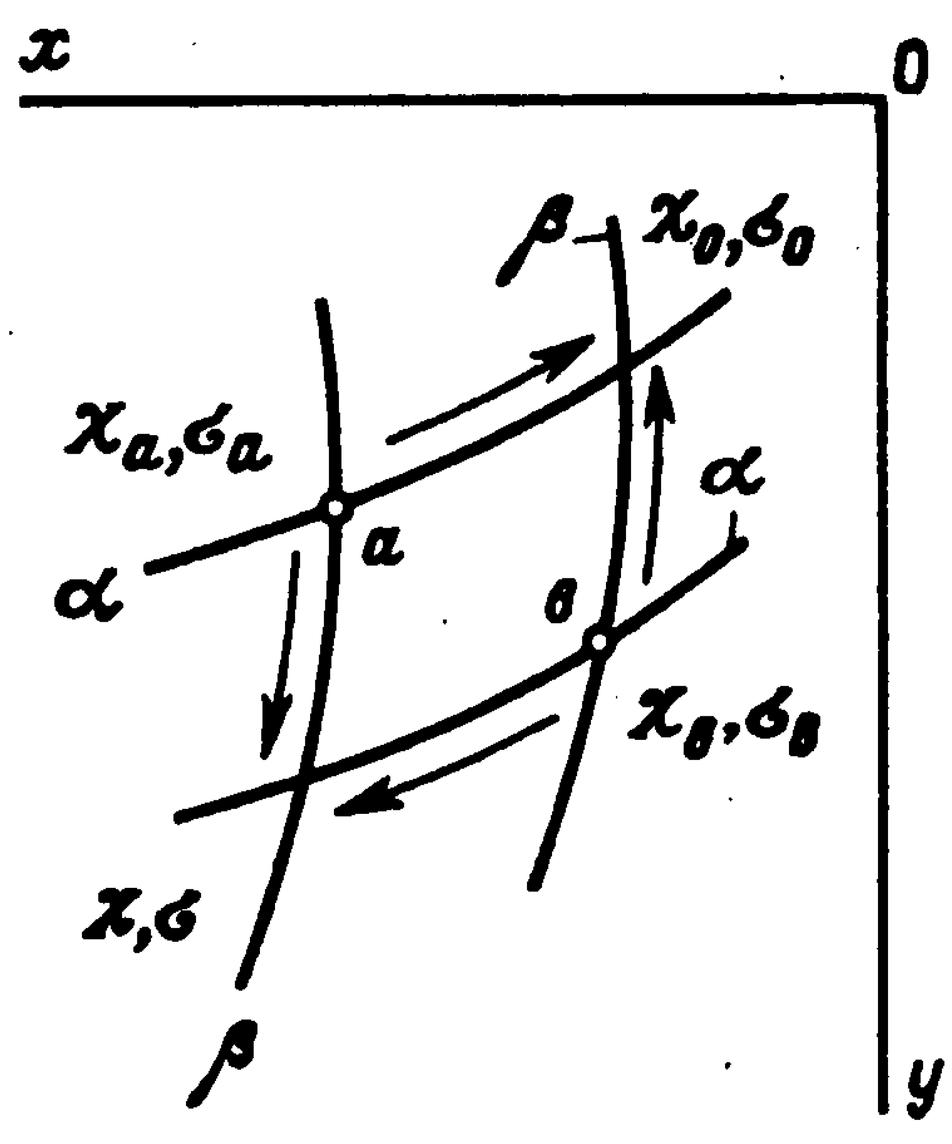
где индексы a и b указывают на принадлежность соответствующих величин узлам сетки характеристик (фигура); уравнение (5) относится к первому семейству, а уравнение (6) – ко второму.

В соответствии со схемой элемента среды, ограниченного двумя парами характеристик α и β (фигура), определим путем решения начальной характеристической задачи значения χ и

$\bar{\sigma}$ в нижней точке "ромба", исключив их из уравнений (5) и (6). В итоге получим

$$\chi=\frac{\bar{\sigma}_b-\bar{\sigma}_a+2(\bar{\sigma}_a\chi_a+\bar{\sigma}_b\chi_b)\,\mathrm{tg}\rho}{2(\bar{\sigma}_a+\bar{\sigma}_b)\,\mathrm{tg}\rho} \tag{7}$$

$$\bar{\sigma}=2\,\frac{\bar{\sigma}_a\bar{\sigma}_b[1+(\chi_b-\chi_a)\,\mathrm{tg}\rho]}{\bar{\sigma}_a+\bar{\sigma}_b}$$



Для определения χ_0 и $\bar{\sigma}_0$ в верхней точке "ромба" в этих выражениях достаточно поменять местами $\bar{\sigma}_a$, χ_a и $\bar{\sigma}_b$, χ_b.

Складывая соответствующие выражения, получим

$$\chi+\chi_0=2\,\frac{\bar{\sigma}_a\chi_a+\bar{\sigma}_b\chi_b}{\bar{\sigma}_a+\bar{\sigma}_b},\quad \bar{\sigma}+\bar{\sigma}_0=4\,\frac{\bar{\sigma}_a\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_a+\bar{\sigma}_b} \tag{8}$$

которые и являются обобщенной теоремой Генки для грунтовой среды в пластическом равновесии.

Подстановка значения $\bar{\sigma}=H+\sigma$ и $H=c/\mathrm{tg}\rho$ в соотношения (8) при $\mathrm{tg}\rho=0$, т.е. для идеальнопластической среды, приводит к известным соотношениям Генки

$$\chi+\chi_0=\chi_a+\chi_b,\quad \sigma+\sigma_0=\sigma_a+\sigma_b \tag{9}$$

(равенство "диагональных" сумм углов главных направлений и сумм средних нормальных напряжений в узлах "квадрата", образованного характеристиками).

Полученные соотношения (8) удобны для численного решения задач для невесомой среды, а также для весомой грунтовой среды, когда первое соотношение (8) может быть использовано как первое приближение при определении координат узлов сетки характеристик по формулам:

$$x=\frac{x_a\,\mathrm{tg}(\bar{\chi}_a-\varepsilon)-x_b\,\mathrm{tg}(\bar{\chi}_b+\varepsilon)-y_a+y_b}{\mathrm{tg}(\bar{\chi}_a-\varepsilon)-\mathrm{tg}(\bar{\chi}_b+\varepsilon)} \tag{10}$$

$$y=(x-x_a)\,\mathrm{tg}(\bar{\chi}_a-\varepsilon)+y_a \quad \text{или} \quad y=(x-x_b)\,\mathrm{tg}(\bar{\chi}_b-\varepsilon)+y_b$$

полученным решением уравнений (3) в разностном виде, где $\bar{\chi}_a$ и $\bar{\chi}_b$ принимаются равными $\bar{\chi}_a=(\chi_a+\chi)/2$ и $\bar{\chi}_b=(\chi_b+\chi)/2$, в которых χ – первое приближение, найденное по указанному соотношению. Величины же $\bar{\sigma}$ и второе приближение χ могут находиться по рекуррентным формулам

$$\chi=\Sigma_b-\Sigma_a,\quad \bar{\sigma}=2(\bar{\sigma}_b\Sigma_a+\bar{\sigma}_a\Sigma_b)\,\mathrm{tg}\rho \tag{11}$$

в которых

$$\Sigma_a=\frac{\gamma[(y-y_a)-(x-x_a)\,\mathrm{tg}\rho]+\bar{\sigma}_a(1-2\chi_a\,\mathrm{tg}\rho)}{2(\bar{\sigma}_a+\bar{\sigma}_b)\,\mathrm{tg}\rho} \tag{12}$$

а Σ_b отличается от Σ_a заменой в числителе индексов, a на b и знаков $\mathrm{tg}\rho$ на обратное. Эти формулы необходимы при решении начальной характеристической задачи. Затем координаты узлов (10) уточняются вторым приближением χ, а $\bar{\sigma}$ – соответствующим повторным вычислением, чем вычислительный процесс может быть закончен, причем величины χ_a и χ_b не корректируются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский В.В.* Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960, 243 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.II.1995