

УДК 539.374

© 1996 г. С.Е. Александров, Р.В. Гольдштейн

ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ ОТРЫВА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

Строится аналитическое решение плоской жесткопластической задачи о краевой трещине отрыва, параллельной основаниям прямоугольной пластины. Геометрия области и условия нагружения (сосредоточенные нагрузки, действующие по нормали к линии трещины) моделируют распространенную схему испытаний по определению трещиностойкости материалов. Решение задачи приводит к схеме течения материала впереди трещины, сопровождающегося образованием поперечной микротрещины. При решении задачи использован сформулированный и доказанный авторами [1] вариационный принцип для задач жесткопластического анализа с учетом образования трещин.

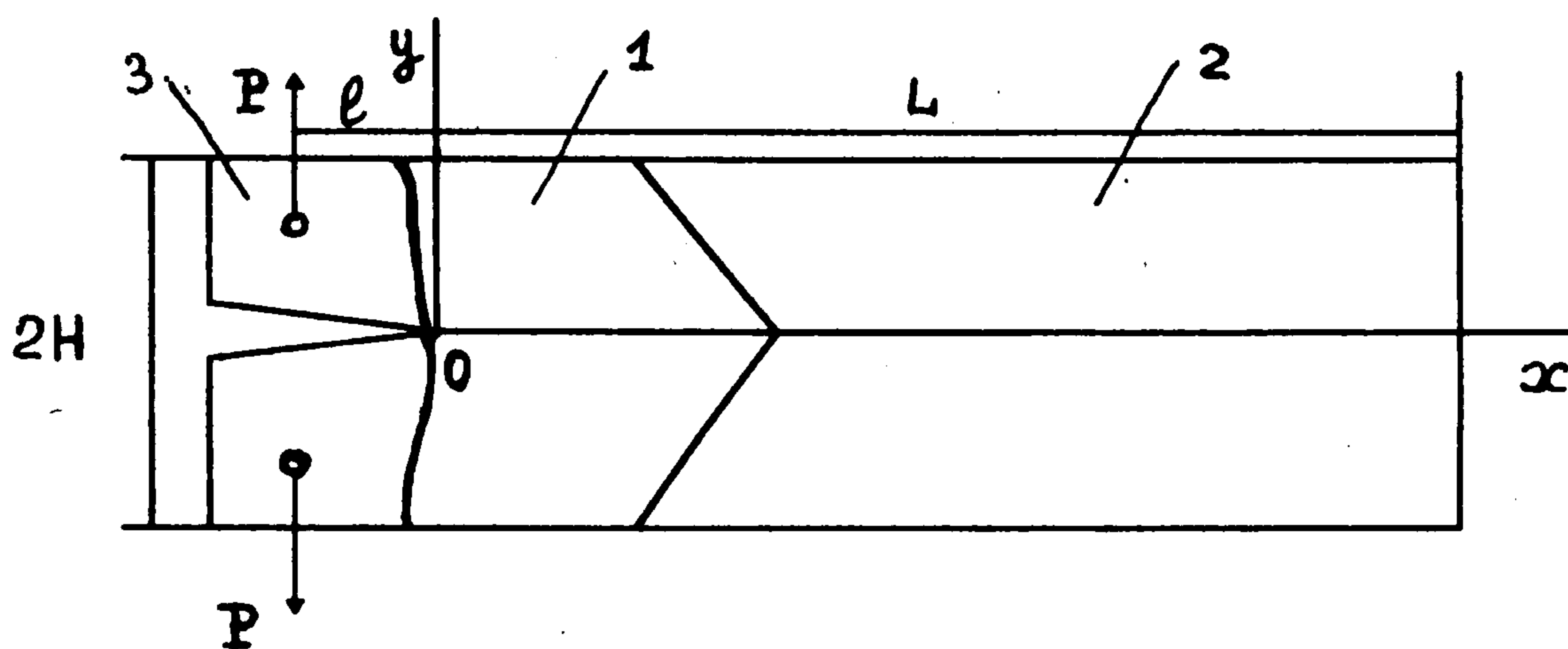
1. Постановка задачи. Рассмотрим предельное состояние образца с трещиной, нагруженного симметричной нагрузкой (фиг. 1). Предположим, что длина образца L велика по сравнению с его полушириной H , поэтому пластические зоны должны выйти на поверхности $y = \pm H$.

Пусть впереди кончика трещины образуется пластическая зона (зона 1 на фиг. 1), а зоны 2 и 3 – жесткие. Получим краевые условия на границе жесткой и пластической областей. В общем случае на границе пластической и жесткой зон может возникать разрыв касательной составляющей скорости, причем скачок скорости – постоянная величина вдоль линии разрыва.

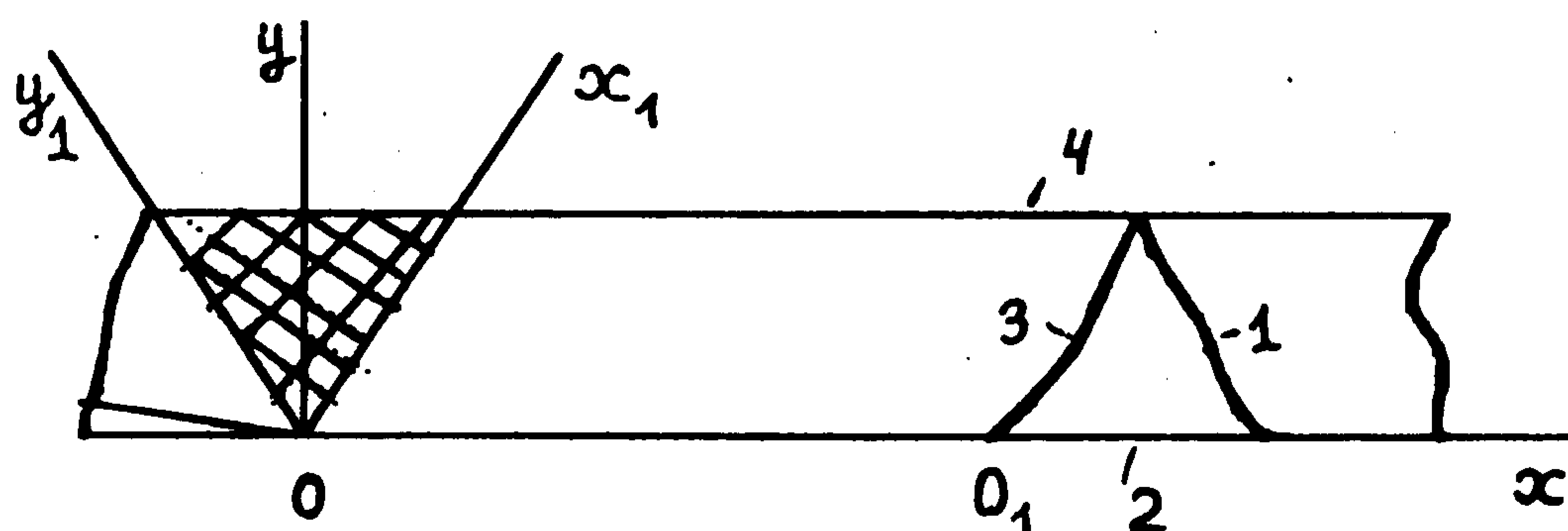
Граница зон 1 и 2 должна пересекать ось симметрии ($y = 0$) под углом $\alpha = \pi/4$. Следовательно, нормальная к границе зон 1 и 2 составляющая скорости не параллельна оси y и скачок этой составляющей равен нулю из условия несжимаемости материала. Кроме того, на пересечении границы зон 1 и 2 с осью симметрии равна нулю составляющая скорости v_y на обеих сторонах линии предполагаемого разрыва скорости. Вследствие этого можно заключить, что скачок скорости равен нулю в точке пересечения границы 1 и 2 с осью симметрии $y = 0$. Следовательно, скачок скорости отсутствует на границе зон 1 и 2, так как он, как это было отмечено выше, сохраняет свою величину вдоль всей линии разрыва.

Перейдем к построению решения от жесткопластической границы (линия 1 на фиг. 2). Выделим характерную область, примыкающую к жесткопластической границе (область, ограниченная линиями 1, 2, 3 на фиг. 2). В этой области имеем смешанную задачу с краевыми условиями $v_x = 0$, $v_y = 0$ на линии 1, которая является характеристикой, и $v_y = 0$ на линии 2, которая не является характеристикой. Эта краевая задача имеет очевидное решение $v_x = 0$, $v_y = 0$ во всей рассматриваемой области и в силу единственности решения область, ограниченная линиями 1, 2, 3, является жесткой. Аналогичные рассуждения можно продолжать до тех пор пока точка O_1 не совпадет с кончиком трещины, точкой O . Кроме того, так как поверхность $y = H$ плоская и свободная от напряжения, то поле характеристик, выходящее на эту поверхность, должно быть образовано семействами прямых, наклоненных под углами $\pm\pi/4$ к оси (фиг. 2, поле характеристик вблизи точки O). Если такое поле характеристик реализуется, то разрушение образца происходит путем поворота части образца 3 относительно части 1 (фиг. 1) без роста трещины.

Однако, как показывают экспериментальные данные, впереди вершины трещины в пластической зоне часто возникают поперечные трещины или трещиноподобные дефекты.



Фиг. 1



Фиг. 2

Именно этот факт и положен в основу модели Коттрелла [1], в рамках которой разрушение упругопластического материала и возникновение разрывов впереди магистральной трещины объясняется кинематическими причинами. Для рассматриваемой жестко-пластической модели невозможность возникновения пластических зон перед трещиной, как это было показано выше, также связана с кинематикой процесса. Поэтому в данном случае естественно предположить, что перед кончиком магистральной трещины возникают поперечные трещины, как в модели Коттрелла.

Таким образом, имеются два возможных варианта.

1°. Течение без поперечной трещины и без пластической зоны.

2°. Течение с возникновением поперечной трещины.

Выбор того или иного поля скоростей может быть осуществлен с помощью вариационного принципа [2].

2. Течение без возникновения поперечных трещин. Рассматриваемая область в этом случае локализуется вблизи кончика трещины (фиг. 2). Введем новую декартову систему координат x_1, y_1 , совпадающую с характеристиками, ограничивающими пластическую область (фиг. 2). Для прямолинейного поля характеристик проекции скорости v_{x_1} и v_{y_1} сохраняют постоянные значения вдоль соответствующих характеристических линий [3]. При $y_1 = 0$ проекция $v_{y_1} = 0$, так как материал в зоне 2 неподвижен, а нормальная составляющая скорости к линии $y_1 = 0$ должна быть непрерывна. Поэтому $v_{y_1} = 0$ во всей пластической области. Область 3 поворачивается относительно точки O как абсолютно твердое тело, поэтому скорость v_{x_1} на линии $x_1 = 0$ будет

$$v_{x_1} = \omega y_1 \quad (2.1)$$

(ω – угловая скорость зоны 2). Так как для прямолинейного поля характеристик v_{x_1} сохраняет свое значение вдоль каждой из характеристических линий, параллельных x_1 , выражение (2.1) имеет силу во всей пластической области.

Отметим, что $v_{x_1} = 0$ при $y_1 = 0$ и скорости точек жесткой зоны 2, примыкающих к пластической зоне, перпендикулярны линии $x_1 = 0$. Поэтому разрывы скоростей вдоль линий $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ отсутствуют. Скорости деформации из (2.1) и условия $v_{y_1} = 0$

определяются так:

$$\varepsilon_{x_1} = 0, \quad \varepsilon_{y_1} = 0, \quad \varepsilon_{x_1 y_1} = \omega/2 \quad (2.2)$$

Мощность пластической работы при применении условия текучести Мизеса определяется выражением

$$q = K(2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2} \quad (2.3)$$

Здесь K – предел текучести при чистом сдвиге. Для рассматриваемого случая из (2.2) и (2.3) находим

$$q_1 = K\omega \quad (2.4)$$

Отсюда классический метод верхней оценки дает

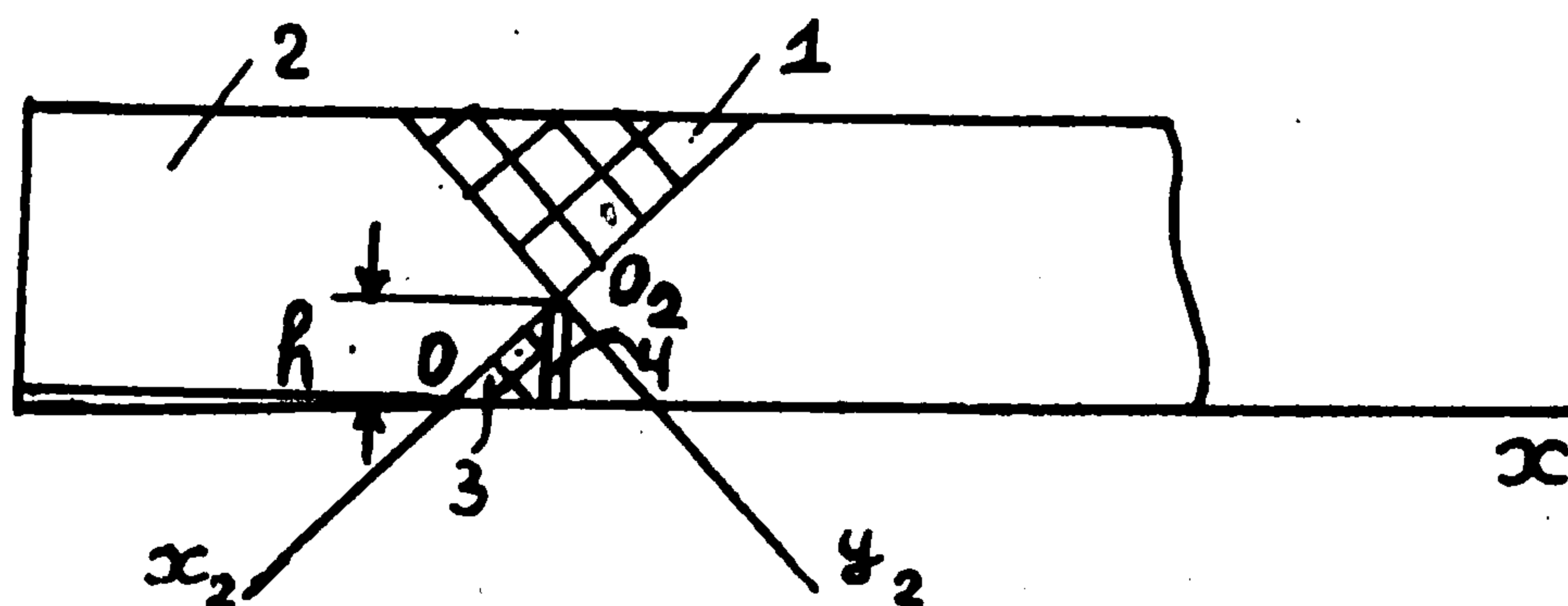
$$P_1 l \omega = \int_{\Omega} q_1 d\Omega \quad (2.5)$$

Здесь P_1 – оценка P при рассматриваемом поле скоростей, ω – площадь пластической области.

Из (2.4) и (2.5) находим

$$P_1 = KN^2/l \quad (2.6)$$

3. Течение при возникновении поперечной трещины. Теперь рассмотрим течение в предположении, что впереди магистральной трещины возникает поперечная трещина. В соответствии с определением, данным в [1], кинематически возможное поле скоростей может быть взято в виде, показанном на фиг. 3, где 2 – жесткая область, аналогичная области 2 на фиг. 1, 1 и 3 – пластические области, образованные прямолинейными семействами характеристик, 4 – поперечная трещина.



Фиг. 3

В этом случае жесткая зона 2 поворачивается относительно точки O_2 . В пластической области 1 сохраняет силу выражение (2.4) мощности пластической работы. В пластической зоне 3 введем декартову систему координат $x_2 y_2$, как показано на фиг. 3. При $y_2 = 0$ из условия непрерывности нормальной составляющей скорости получим

$$v_{y_2} = -\omega x_2 \quad (3.1)$$

Ось симметрии $y = 0$ в системе координат $x_2 y_2$ определяется уравнением

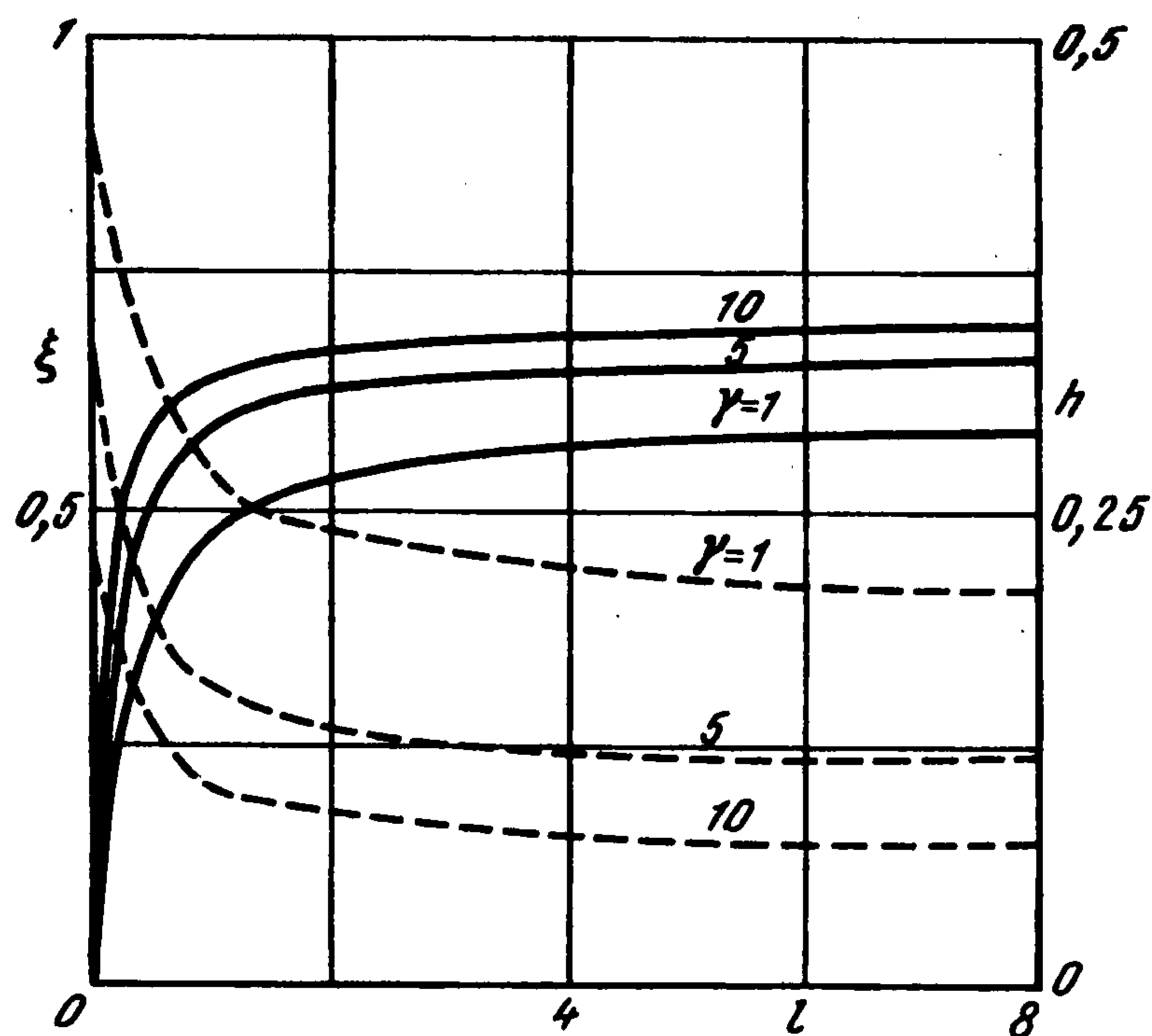
$$x_2 + y_2 = \sqrt{2}h \quad (3.2)$$

На ней должно выполняться условие

$$v_y = v_{x_2} \cos(\pi/4) + v_{y_2} \cos(\pi/4) = 0$$

Отсюда на линии (3.2) имеем

$$v_{x_2} = -v_{y_2} \quad (3.3)$$



Фиг. 4

Подставляя (3.1) и (3.2) в (3.3), найдем

$$v_{x_2} = -\omega(y_2 - \sqrt{2}h) \quad (3.4)$$

Так как $v_{x_2} = \sqrt{2}\omega h$ при $y_2 = 0$, то разрыв касательной составляющей скорости вдоль оси x_2 будет

$$[v_{x_2}] = \sqrt{2}\omega h \quad (3.5)$$

Из (3.1) и (3.4) находим

$$\epsilon_{x_2} = 0, \quad \epsilon_{y_2} = 0, \quad \epsilon_{x_2 y_2} = -\omega$$

Тогда из (2.3)

$$q_3 = 2K\omega \quad (3.6)$$

Мощность пластической работы во всей области будет

$$Q_2 = \int_{\Omega_1} q_1 d\Omega + \int_{\Omega_3} q_3 d\Omega + K[v_{x_2}]\sqrt{2}h \quad (3.7)$$

Здесь Ω_1 – площадь зоны 1, Ω_3 – площадь зоны 3.

Подставляя (2.4), (3.5) и (3.6) в (3.7), найдем

$$Q_2 = K\omega[(H-h)^2 + 3h^2] \quad (3.8)$$

Разрыв нормальной составляющей скорости на линии 4 определяется равенством $[v_n] = \omega h$. Тогда мощность, требуемая для образования конечной трещины, будет равна

$$Q_c = \sigma_0 \omega h^2 \quad (3.9)$$

(σ_0 – константа материала). Из (3.8) и (3.9) получим баланс мощностей внешних и внутренних сил

$$P(l+h)\omega = K\omega[(H-h)^2 + 3h^2] + \sigma_0 \omega h^2 \quad (3.10)$$

Из вариационного принципа следует, что оценка нагрузки P_2 для данного поля скоростей может быть получена из условия минимума P как функции h .

Введем безразмерные величины $l' = l/H$, $h' = h/H$, $\gamma = \sigma_0/K$ и далее штрихи опустим. Тогда

из уравнения $dP/dh = 0$ согласно (3.10) при условии $h \geq 0$ найдем

$$h = -l + \lambda, \quad \lambda = [l^2 + (1 + 2l)/(4 + \gamma)]^{1/2} \quad (3.11)$$

Оценка нагрузки определяется из (3.10) и (3.11). В безразмерном виде имеем

$$\bar{P}_2 = P_2 / (KH) = 2\{[1 + 2l + l^2(4 + \gamma)]/\lambda - [1 + l(4 + \gamma)]\} \quad (3.12)$$

4.4. Анализ решений и выводы. Из (2.6) и (3.12) определим отношение предельных нагрузок $\xi = P_2 / P_1 = l\bar{P}_2$.

На фиг. 4 показана зависимость отношения предельных нагрузок ξ (сплошные линии) и безразмерной длины трещины h (штриховые линии) от l для разных значений γ . Видно, что поле скоростей с поперечной трещиной дает меньшее значение предельной нагрузки для всех рассчитанных положений точки приложения нагрузки. Следовательно, решение с трещиной более правильно отражает реальную картину течения материала при разрушении образца.

Вероятно, можно найти более хорошую оценку предельной нагрузки, если подобрать другое поле скоростей с трещиной. Однако представляется, что нельзя найти кинематически возможное поле скоростей без трещины, улучшающее оценку (2.6). Отсюда следует, что при испытаниях рассматриваемого типа будут возникать поперечные трещины впереди магистральной, если деформирование материала может быть описано моделью жесткопластичности.

Следует отметить, что такое поведение материала характерно для рассматриваемого типа испытаний. Если, например, рассмотреть изгиб или растяжение образца с трещинами, то предыдущие выводы о невозможности пластических зон впереди трещины будут неверными, так как в этих случаях контакт жестких и деформируемых зон на оси симметрии возможен только в одной точке. Поэтому условие равенства нулю нормальной к оси симметрии скорости жесткой зоны может не выполняться, как это имеет место, например, в задаче Прандтля о сжатии слоя между шероховатыми плитами [3]. Аналогичный вывод можно сделать о рассматриваемом образце, если величина L достаточно мала.

Очевидно, что предыдущие выводы имеют силу, если рассматривается не трещина, а симметричный вырез любой формы. Кроме того, можно искать решение с несколькими поперечными трещинами, возникающими вдоль оси симметрии.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (M7Y 000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cottrell A.H. Mechanics of fracture in large structures // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1965. V. 285. № 1400. P. 10–21.
2. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. Вариационный принцип в теории жесткопластического течения с учетом образования трещин отрыва // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 4. С. 484–486.
3. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1983. 355 p.

Москва

Поступила в редакцию
28.II.1995