

УДК 539.3

© 1996 г. А.А. Евтушенко, В.И. Паук

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ ПРИ УЧЕТЕ ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ ОТ ТРЕНИЯ

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости для шероховатой полуплоскости при наличии тепловыделения за счет трения. Предполагается, что к параболическому в плане штампу приложена с некоторым эксцентриситетом постоянная вдавливающая сила и в начальный момент времени он начинает совершать антиплоское движение с постоянной скоростью. Задача сведена к системе интегральных уравнений относительно контактного давления и тепловых потоков, индуцируемых в полупространство и штамп, для решения которой разработан численный алгоритм.

1. Постановка задачи. В упругое однородное полупространство вдавливается силой P , приложенной с эксцентриситетом e , упругий параболический штамп, движущийся равномерно со скоростью V в направлении оси z (фиг. 1). Вызванная движением штампа антиплоская деформация тел считается независимой от плоской деформации. Предполагается, что в области контакта поверхности шероховатые силы трения $\tau_{zy}(x, t)$ связаны с нормальными напряжениями $\sigma_y(x, t)$ законом Амонтона $\tau_{zy}(x, t) = f\sigma_y(x, t)$ (f – коэффициент трения), касательные усилия $\tau_{xy}(x, t)$ отсутствуют.

Поверхности тел вне зоны контакта теплоизолированы, а в области контакта имеет место неидеальный тепловой контакт.

Радиус кривизны основания штампа r достаточно большой, чтобы при решении задачи термоупругости для штампа его можно было заменить полупространством.

При сделанных предположениях необходимо определить размеры области контакта $A(t)$, распределение контактного давления $p(x, t) = -\sigma_y(x, t)$, температур $T_i(x, y, t)$ и тепловых потоков $q_i(x, t)$, ($i = 1, 2$) в телах и на их поверхностях.

2. Сведение задачи к системе интегральных уравнений. Нестационарные температуры поверхностей тел определяем по формуле [1]

$$T_i(x, t) = \frac{1}{2\pi\lambda_i} \int_0^t \int_{A(\tau)} q_i(\xi, \tau) \frac{\exp(-\bar{R}_i^2)}{t-\tau} d\xi d\tau, \quad \bar{R}_i = \frac{x-\xi}{2\sqrt{k_i(t-\tau)}} \quad (2.1)$$

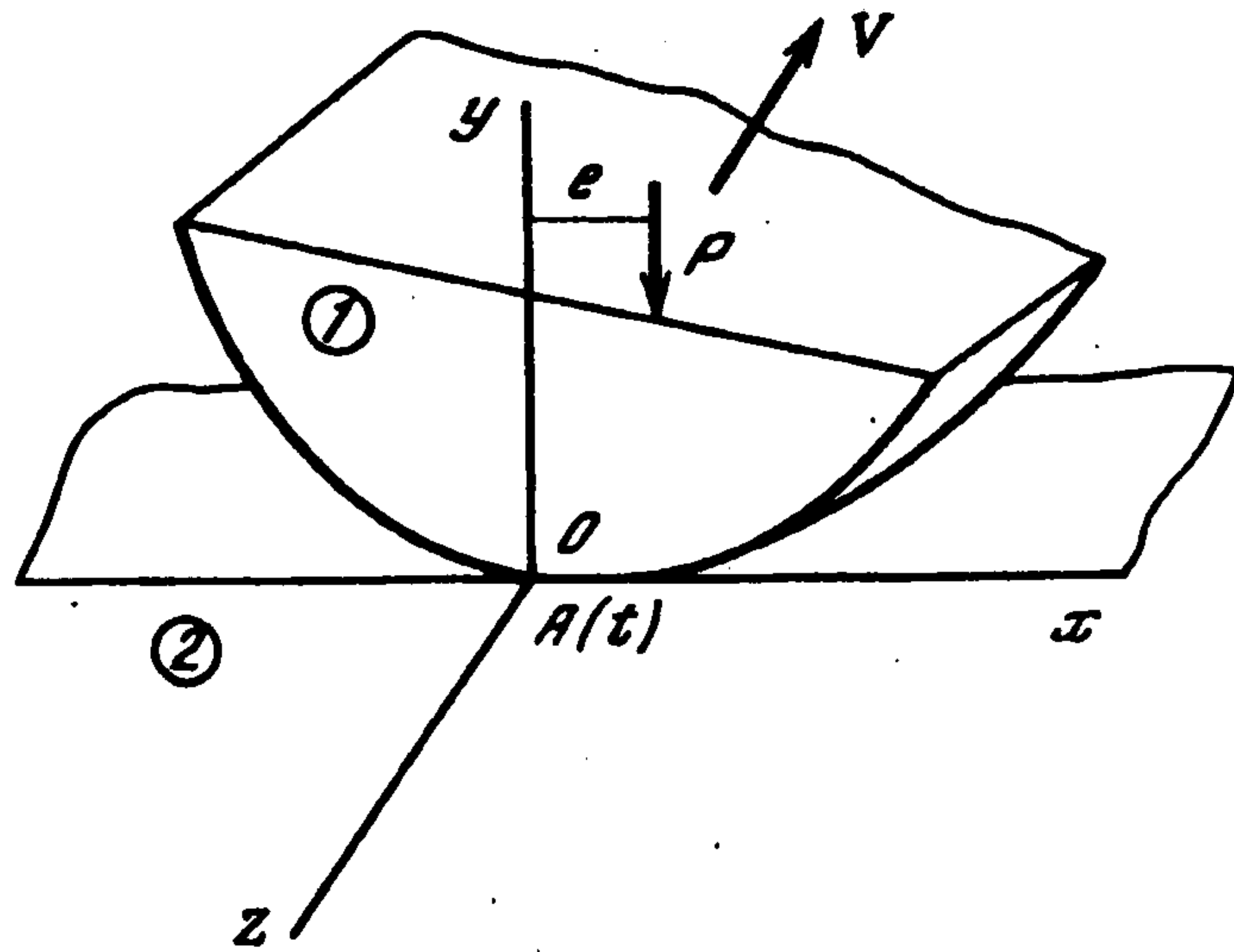
$$|x| < \infty, \quad t > 0$$

где k_i, λ_i , ($i = 1, 2$) – соответственно коэффициенты температуропроводности и теплопроводности штампа и полупространства.

Вертикальные перемещения границы штампа ($i = 1$) и полупространства ($i = 2$) представим в виде

$$v_i(x, t) = v_i^e(x, t) + v_i^f(x, t) + v_i^a(x, t), \quad x \in A(t), \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

Здесь $v_i^e(x, t)$ – упругие перемещения, вызванные действием нормальных напряжений $\sigma_y(x, t)$; $v_i^f(x, t)$ – температурные перемещения вследствие фрикционного теплообразования; $v_i^a(x, t)$ – перемещения в результате смятия микронеровностей в области контакта.



Фиг. 1

Упругие перемещения определяем из решения задачи теории упругости в квазистационарной постановке [2]

$$v_i^e(x, t) = (-1)^{i+1} \frac{1-\nu_i}{\pi\mu_i} \int_{A(t)} p(\xi, t) \ln|\xi-x| d\xi \quad x \in A(t), \quad t > 0 \quad (2.3)$$

где ν_i, μ_i ($i = 1, 2$) – соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига материалов соприкасаемых тел.

Нормальные термические искажения поверхности упругого полупространства вследствие действия на участке его поверхности $x \in A(t), t > 0, y = 0$ источников тепла мощности $q_i(x, t)$ ($i = 1, 2$) таковы [3]:

$$v_i^t(x, t) = (-1)^i \frac{\delta_i k_i}{\pi} \int_0^t \int_{A(t)} q_i(\xi, \tau) \frac{F_1(\bar{R}_i)}{\sqrt{k_i(t-\tau)}} d\xi d\tau, \quad x \in A(t), \quad t > 0 \quad (2.4)$$

$$\delta_i = \frac{\alpha_i(1+\nu_i)}{\lambda_i}, \quad F_1(\bar{R}_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\bar{R}_i^2)}{\bar{R}_i} \int_0^{\bar{R}_i} \exp(-s^2) ds$$

(α_i ($i = 1, 2$) – коэффициенты температурного линейного расширения материалов тел).

Примем [4] линейную зависимость между $v_i^a(x, t)$ и контактным давлением

$$v_i^a(x, t) = (-1)^{i+1} \beta_i p(x, t), \quad x \in A(t), \quad t > 0 \quad (2.5)$$

где β_i – постоянные, зависящие от степени шероховатости тел [5]. Отметим, что закон (2.5) описывает также деформирование линейного покрытия типа Винклера.

Удовлетворим при помощи соотношений (2.1) условиям неидеального теплового контакта тел при учете теплообразования [6]

$$q_1(x, t) + q_2(x, t) = fVp(x, t), \quad x \in A(t), \quad y = 0, \quad t > 0$$

$$h_0[q_1(x, t) - q_2(x, t)] = T_1(x, t) - T_2(x, t)$$

(h_0 – контактное термосопротивление), а при помощи соотношений (2.2)–(2.5) – условию механического контакта

$$v_1(x, t) - v_2(x, t) = \Delta_1(t) + x\Delta_2(t) - g(x), \quad x \in A(t), \quad y = 0, \quad t > 0$$

где $\Delta_1(t), \Delta_2(t)$ – соответственно относительное нормальное перемещение и наклон контактирующих тел как жестких целых, $g(x) = x^2/(2r)$ – функция, описывающая основание штампа.

Обозначим

$$x = A_0 x^*, \quad \xi = A_0 \xi^*, \quad t = \frac{A_0^2}{k_1} t^*, \quad \tau = \frac{A_0^2}{k_1} \tau^*, \quad A(t) = A_0 A^*(t^*)$$

$$T_i(x,t) = \frac{fVP}{\lambda_1} T_i^*(x^*,t^*), \quad q_i(x,t) = \frac{fVP}{A_0} q_i^*(x^*,t^*) \quad (i=1,2) \quad (2.6)$$

$$p(x,t) = \frac{P}{A_0} p^*(x^*,t^*), \quad A_0 = \frac{3}{4} \frac{\pi(1-\nu_1)\lambda_1}{\alpha_1 f V \mu}, \quad \mu = \frac{2(1-\nu_1^2)\mu_1\mu_2}{(1-\nu_1)\mu_2 + (1-\nu_2)\mu_1}$$

A_0 – полудлина области контакта в случае, когда граничная поверхность полупространства теплоизолирована, температурное поле штампа – установившееся [7].

При учете обозначений (2.6) запишем систему интегральных уравнений и условия равновесия тел в виде (звездочки опускаем):

$$A_6[q_1(x,t) + q_2(x,t)] + \int_{A(t)} [q_1(\xi,t) + q_2(\xi,t)] \ln|\xi-x| d\xi - \frac{3}{8} \pi \int_0^t \int_{A(\tau)} q_1(\xi,\tau) \frac{F_1(\hat{R}_1)}{\sqrt{t-\tau}} d\xi d\tau - \\ - \frac{3}{8} \frac{A_2}{A_3} \pi \int_0^t \int_{A(\tau)} q_2(\xi,\tau) \frac{F_1(\hat{R}_2)}{\sqrt{A_2(t-\tau)}} d\xi d\tau = \Delta_1(t) + x\Delta_2(t) \frac{x^2}{A_4^2}$$

$$A_5[q_1(x,t) - q_2(x,t)] - \int_0^t \int_{A(\tau)} q_1(\xi,\tau) \frac{\exp(-\hat{R}_1^2)}{t-\tau} d\xi d\tau + A_1 \int_0^t \int_{A(\tau)} q_2(\xi,\tau) \frac{\exp(-\hat{R}_2^2)}{t-\tau} d\xi d\tau = 0,$$

$$x \in A(t), \quad t > 0 \quad (2.7)$$

$$\int_{A(t)} [q_1(\xi,t) + q_2(\xi,t)] d\xi = 1, \quad \int_{A(t)} \xi [q_1(\xi,t) + q_2(\xi,t)] d\xi = A_7 \quad (2.8)$$

Здесь

$$\hat{\Delta}_1(t) = \frac{2r\Delta_1(t)}{A^2(0)}, \quad \hat{\Delta}_2(t) = \frac{2rA_0\Delta_2(t)}{A^2(0)}, \quad \hat{R}_1 = \frac{x-\xi}{2\sqrt{t-\tau}}$$

$$\hat{R}_2 = \frac{x-\xi}{2\sqrt{A_2(t-\tau)}}, \quad A_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad A_2 = \frac{k_1}{k_2}, \quad A_3 = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad A_4 = \frac{A(0)}{A_0}$$

$$A_5 = \frac{2\pi\lambda_1 h_0}{A_0}, \quad A_6 = \frac{\pi\mu(\beta_1 + \beta_2)}{2A_0(1-\nu_1^2)}, \quad A_7 = \frac{e}{A_0}, \quad A^2(0) = \frac{4P(1-\nu_1^2)r}{\pi\mu}$$

$A(0)$ – полудлина области контакта соответствующей изотермической задачи Герца [2]).

Для определения области контакта служат физические неравенства

$$p(x,t) \geq 0, \quad x \in A(t), \quad t > 0$$

$$\nu_1(x,t) - \nu_2(x,t) \geq \Delta_1(t) + x\Delta_2(t) - g(x), \quad x \in \bar{A}(t), \quad t > 0 \quad (2.9)$$

3. Численное решение системы интегральных уравнений. Разделим временной интервал $[0, t]$ на l частей длины $\delta t = t/l$: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l-1} < \tau_l = t$. Введем в области контакта $A(t) = [a(t), b(t)]$ равномерную сетку

$$a(\tau) = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = b(\tau), \quad \xi_i = a(\tau) + i\delta\xi, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\delta\xi = [b(\tau) - a(\tau)]/n$$

При помощи набора кусочно-линейных финитных функций $\{\varphi_i(\xi)\}_{i=0}^n$ [8] построим аппроксимацию функций $p(\xi, t)$, $q_r(\xi, t)$, ($r = 1, 2$) в виде

$$p(\xi, t) \cong p^n(\xi, t) = \sum_{i=0}^n p(\xi_i, t) \varphi_i(\xi) \quad (3.1)$$

$$q_r(\xi, t) \cong q_r^n(\xi, t) = \sum_{i=0}^n q_r(\xi_i, t) \varphi_i(\xi), \quad r = 1, 2 \quad (3.2)$$

Равномерная ошибка такой аппроксимации для функций из класса $C^2([a(t), b(t)]; \mathbb{R}^1)$ имеет порядок $\delta\xi^2$ [8].

На основании разложения (3.1) для функции

$$J^e(x_k, t_l) = \int_{A(t_l)} p(\xi, t_l) \ln |\xi - x_k| d\xi, \quad x_k = \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

находим ее приближенное значение в виде

$$J_n^e(x_k, t_l) = \sum_{i=0}^n M_{ik}^e p_{il}, \quad p_{il} \equiv p(\xi_i, t_l)$$

Здесь:

$$M_{0k}^e = \alpha_{1k}^e, \quad M_{ik}^e = \beta_{ik}^e + \alpha_{i+1,k}^e, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad M_{nk}^e = \beta_{nk}^e$$

$$\alpha_{ik}^e = \frac{1}{2} \delta\xi \ln |\delta\xi| + \delta\xi [\kappa_0(\kappa - i + 1) - \kappa_1(\kappa - i + 1)]$$

$$\beta_{ik}^e = \frac{1}{2} \delta\xi \ln |\delta\xi| + \delta\xi \kappa_1(k - i + 1), \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

$$\kappa_0(k) = k \ln |k| - (k-1) \ln |k-1| - 1$$

$$\kappa_1(k) = \frac{1}{2} \left[(1-k^2) \ln |k-1| + k^2 \ln |k| - k - \frac{1}{2} \right]$$

На основании разложения (3.2) функцию

$$J_r^t(x_k, t_l) = \int_0^l \int_{A(\tau)} \frac{q_r(\xi, \tau)}{\sqrt{\bar{k}_r(t_l - \tau)}} F_1 \left(\frac{x_k - \xi}{2\sqrt{\bar{k}_r(t_l - \tau)}} \right) d\xi d\tau, \quad r = 1, 2$$

$$\bar{k}_1 = 1, \quad \bar{k}_2 = A_2,$$

аппроксимируем суммой

$$J_{r,n}^t = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^l M_{ijkl}^{tr} q_{ij}^r, \quad q_{ij}^r \equiv q_{ij}^r(\xi_i, \tau_j)$$

$$M_{0jkl}^{tr} = \alpha_{1jkl}^{tr}, \quad M_{ijkl}^{tr} = \beta_{ijkl}^{tr} + \alpha_{i+1,jkl}^{tr}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$M_{njkl}^{tr} = \beta_{njkl}^{tr}, \quad \alpha_{ijkl}^{tr} = \frac{1}{\delta\xi} (\xi_i c_{ijkl}^{0r} - c_{ijkl}^{1r})$$

$$\beta_{ijkl}^{tr} = \frac{1}{\delta\xi} (c_{ijkl}^{1r} - \xi_{i-1} c_{ijkl}^{0r}), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad r = 1, 2$$

$$c_{ijkl}^{0r} = \begin{cases} -\kappa_1[F_4]_1 + \kappa_2[F_4]_2, & j \neq l \\ \kappa_2[F_4]_2, & j = l \end{cases}$$

$$X_{qp}^r = \frac{\hat{x}_p}{2\sqrt{\bar{k}_r \hat{t}_q}}, \quad \kappa_q = \frac{\bar{k}_r \hat{t}_q}{\bar{k}_2}, \quad [F_4]_q = F_4(X_{q2}^r) - F_4(X_{q1}^r), \quad p, r, q = 1, 2$$

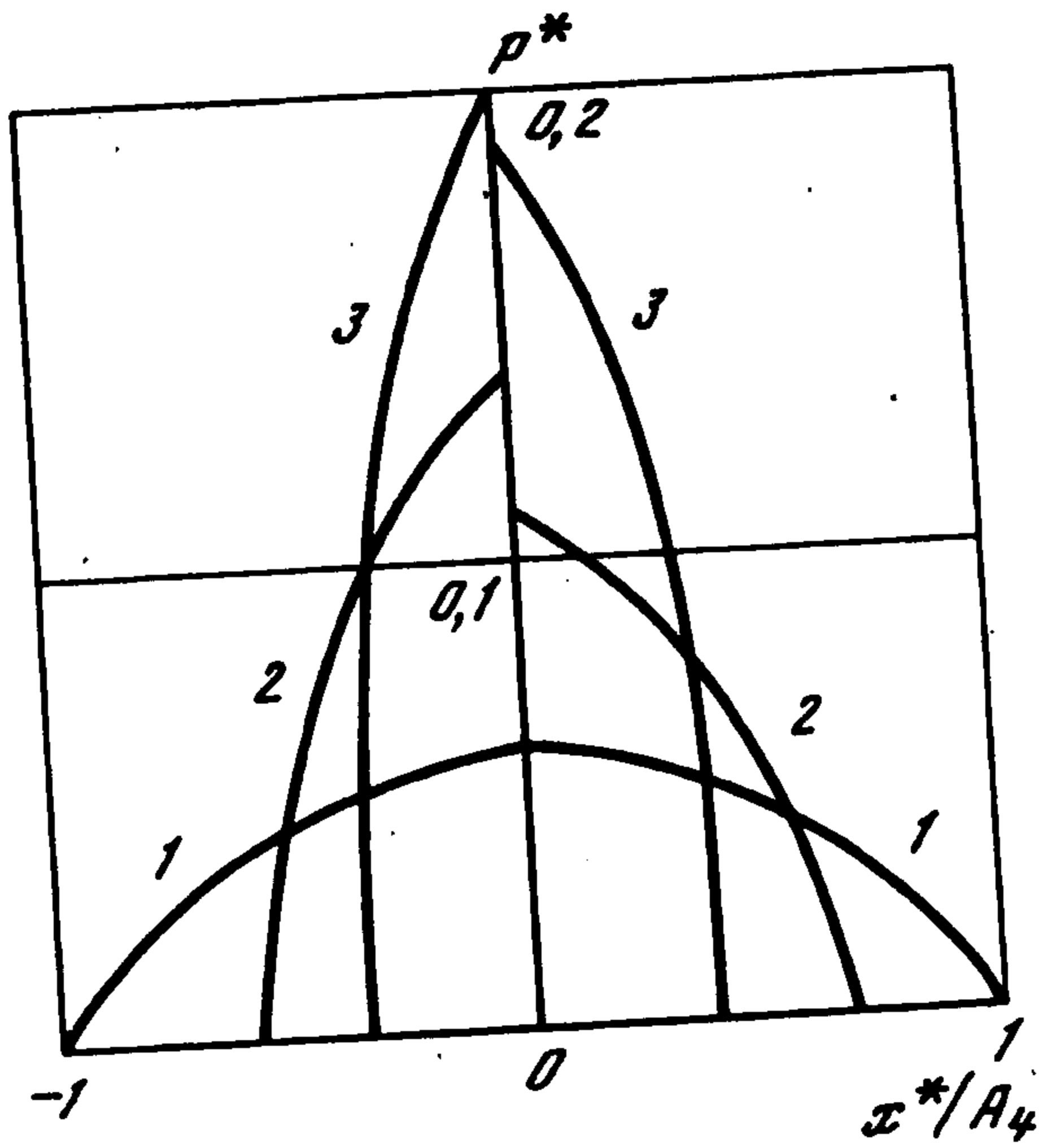
$$\hat{x}_1 = (k-i) \delta x, \quad \hat{x}_2 = (k-i+1) \delta x, \quad \hat{t}_1 = (i-j-\frac{1}{2}) \delta t, \quad \hat{t}_2 = (l-j+\frac{1}{2}) \delta t$$

Функции влияния c_{ijkl}^{1r} ($r = 1, 2$) отличаются от c_{ijkl}^{0r} множителем $(\bar{k}_r \hat{t}_q)^{1/2}$ при замене $[F_4]_q$ на $[\Psi_4]_q$. Вид функций $F_4(\cdot)$, $\Psi_4(\cdot)$ приведен в [3, 9].

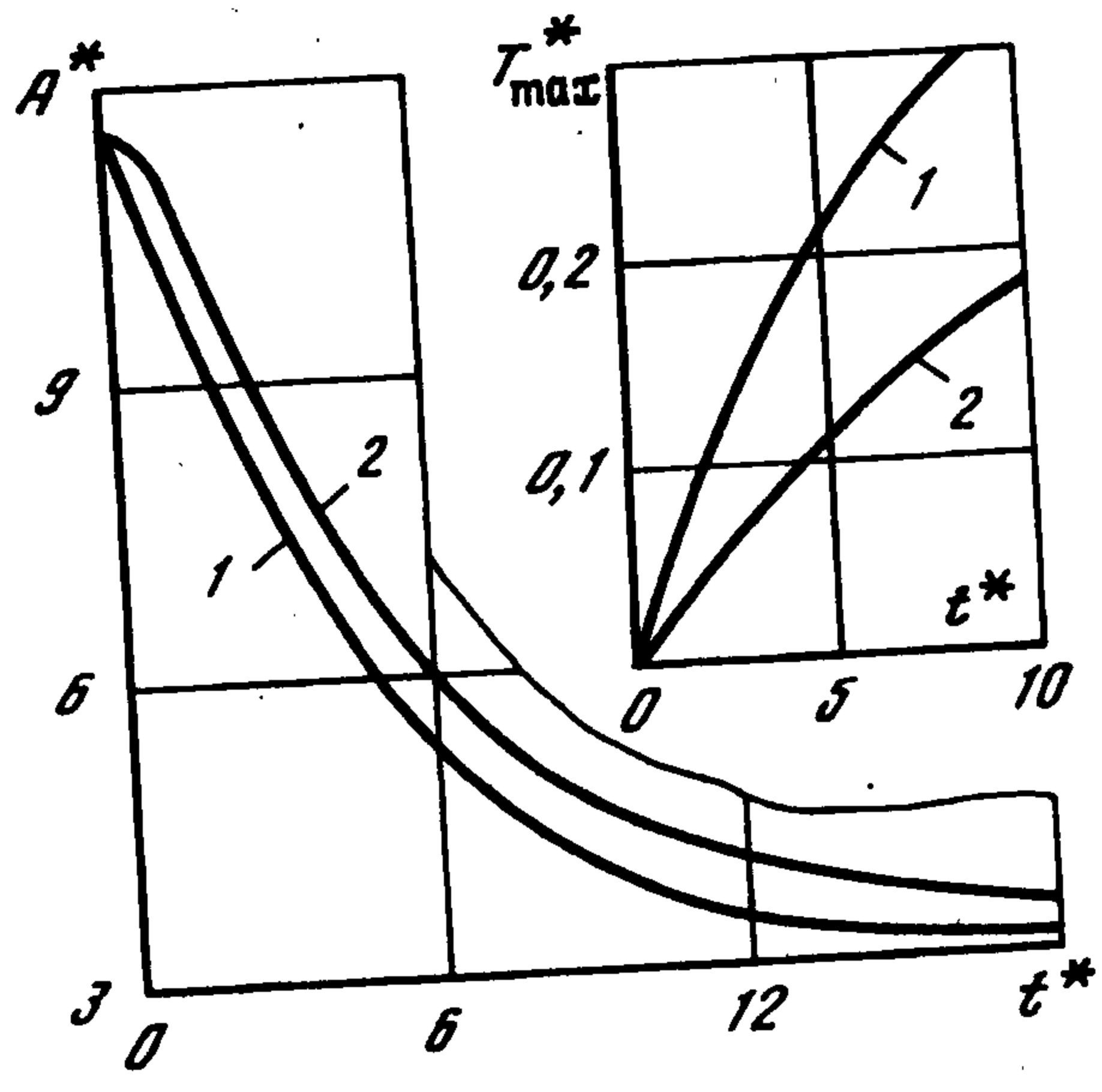
Аналогично при помощи (3.2) строится аппроксимация функции

$$I^r(x_k, t_l) = \int_0^l \int_{A(\tau)} \frac{q_r(\xi, \tau)}{t_l - \tau} \exp \left(-\frac{x_k - \xi}{2\sqrt{\bar{k}_r(t_l - \tau)}} \right) d\xi d\tau, \quad r = 1, 2$$

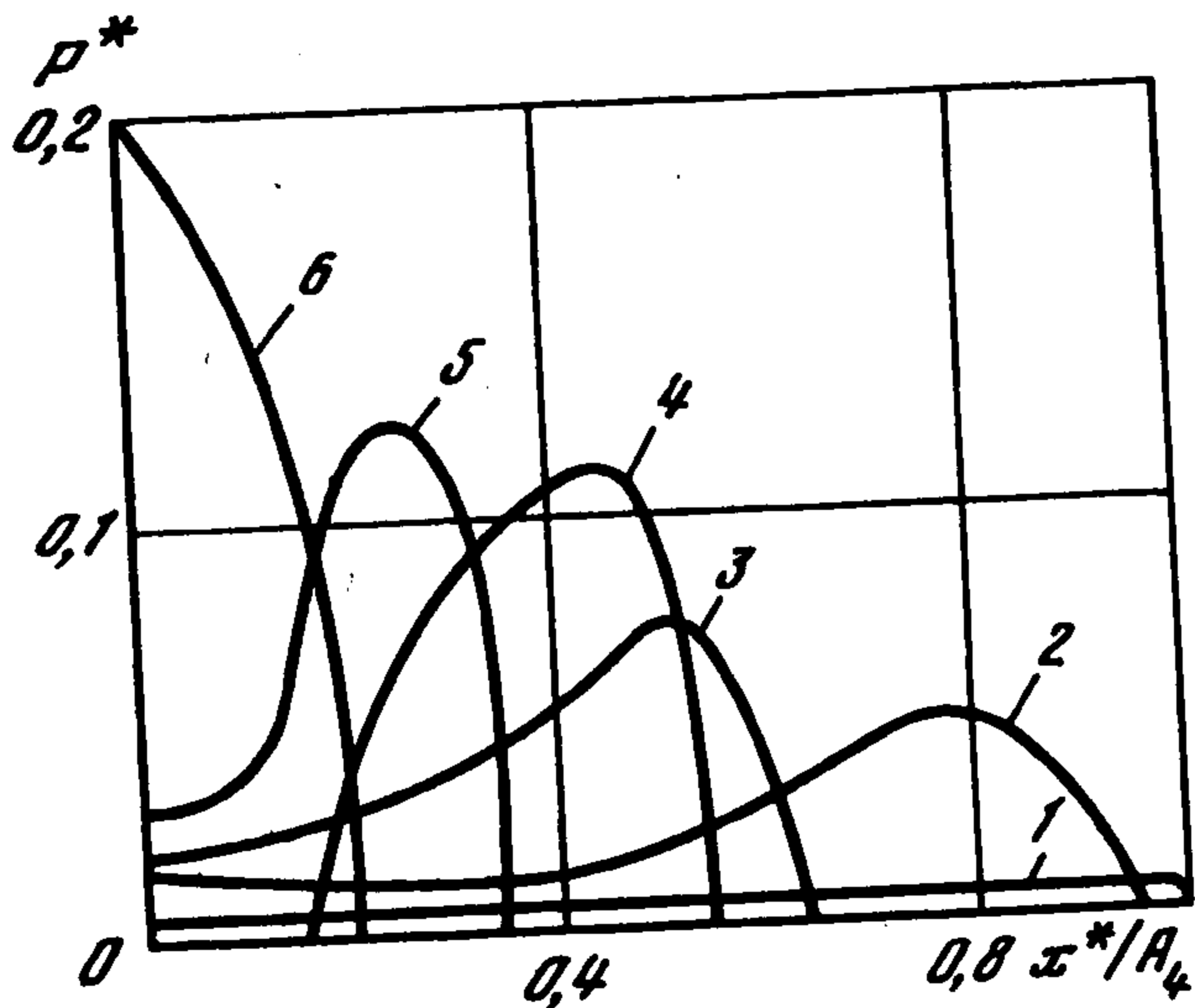
При учете этих аппроксимаций сведем интегральные уравнения (2.7), (2.8) к системе



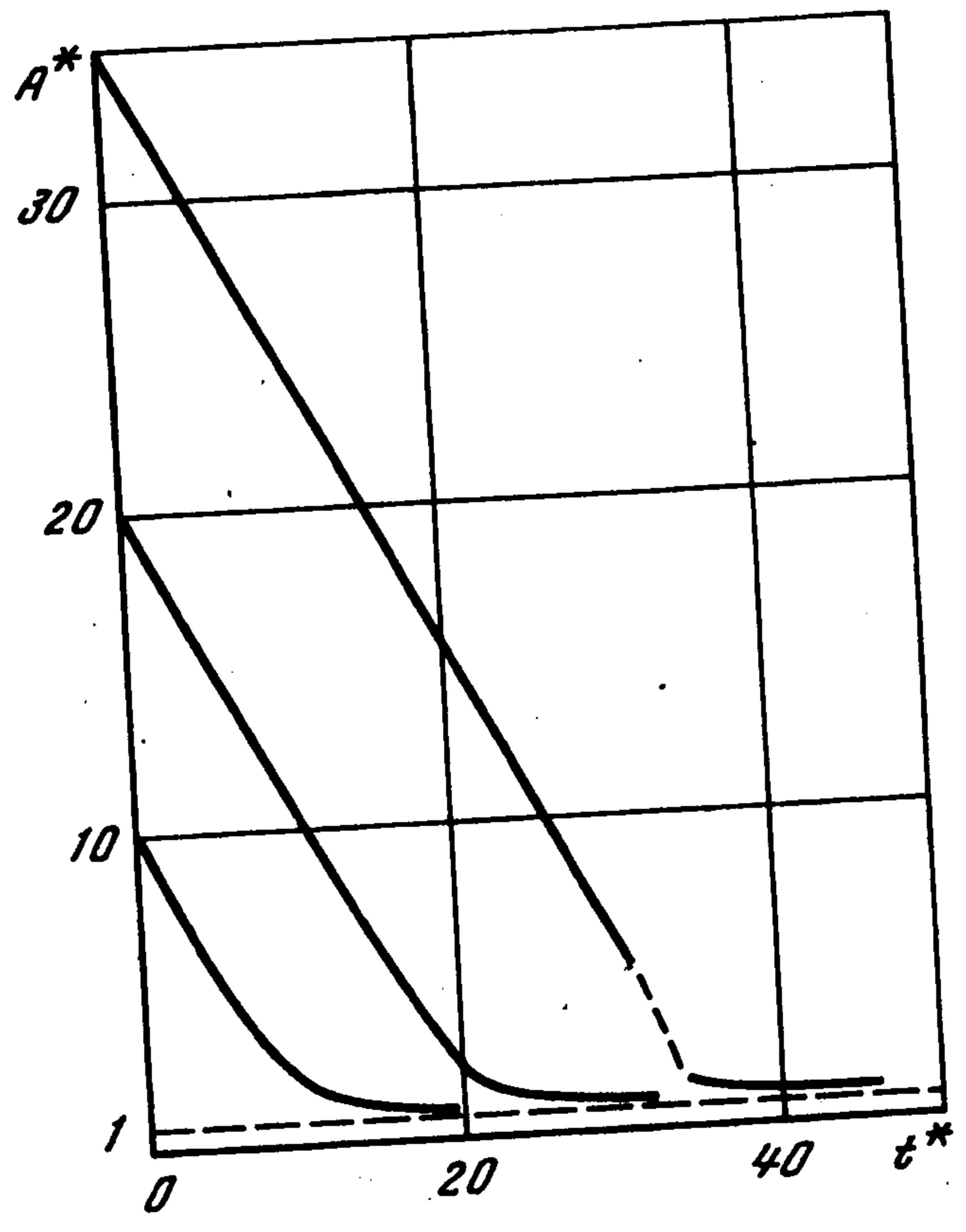
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

алгебраических уравнений порядка $2n + 2$ относительно такого же количества неизвестных $q_{ik}^{(r)}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n, r = 1, 2$), $\Delta_1(t_1)$ и $\Delta_2(t_1)$. Эта система решалась численно для ряда значений входных параметров A_1, \dots, A_7 . Границы области контакта $a(t)$ и $b(t)$ находились итерационным путем посредством проверки неравенств (2.9).

Зная тепловые потоки $q_{ij}^{(r)}$ ($r = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, l$), контактное давление температуру определяем по формулам

$$p_{il} = q_{il}^{(1)} + q_{il}^{(2)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$T_{kl}^{(r)} = N_r \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n q_{ij}^{(r)} d_{ijkl}^{(r)}, \quad N_1 = \frac{1}{2\pi}, \quad N_2 = \frac{A_1}{2\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

С целью уменьшения количества параметров A_1, \dots, A_7 при расчетах полагали, что контактное термосопротивление незначительно ($A_5 = 10^{-3}$), а эксцентриситет отсутствует ($A_7 = 0$). Кроме того, исследовалось теплообразование для двух случаев пары трения:

- 1) одно из тел теплоизолированное, т.е. $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ (вариант 1);
- 2) тела идентичны, т.е. $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ (вариант 2).

Таким образом, число входных параметров сократилось до двух: A_4 , характеризующего согласованность поверхностей, и A_6 , задающего микрогеометрию контакта.

На фиг. 2 показано изменение эпюры безразмерного контактного давления $p^*(x^*, t^*)$ (24) для $A_4 = 10$, $A_6 = 5$ при трех значениях безразмерного времени $t^* = 0; 5; 10$ (кривые 1–3 соответственно). В левой части на фиг. 2 представлены результаты расчета для варианта 1, в правой – для варианта 2. Форма кривых указывает на распределение давления, близкого по характеру к герцевскому.

На фиг. 3 представлено изменение во времени полудлины участка контакта A^* и максимального значения температуры в области контакта T_{\max}^* . Кривые 1, 2 соответствуют вычислениям по вариантам 1, 2 при $A_4 = 10$, $A_6 = 5$. Видно, что при $0 < t^* < 8$ полудлина области взаимодействия уменьшается линейно, достигая при $t^* \cong 20$ стационарного значения. Отметим также, что вследствие предположения о теплоизолированности поверхностей тел вне области контакта, выхода температурного поля в установившееся состояние не наблюдается.

Иная картина в поведении эпюры контактного давления наблюдается при увеличении параметра A_4 . На фиг. 4 представлена зависимость $p^*(x^*, t^*)$ от t^* при $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $A_4 = 35$, $A_6 = 0$. Кривые 1–6 относятся к моментам безразмерного времени $t^* = 0; 2,5; 30; 33; 38; 40$ соответственно. Видно, что с течением времени максимальное значение давления по степенно переходит с центра на край области контакта. При $t^* \cong 31$ в центральной части площадки контакта происходит разделение взаимодействующих поверхностей. Такая кольцевая форма области контакта существует до $t^* \cong 37$, после чего она опять становится односвязной. Давление выравнивается, достигая стационарного значения.

Изменение полудлины области взаимодействия A^* со временем показано на фиг. 5. Кривые 1–3 соответствуют значениям $A_4 = 10, 20, 35$. Штриховая линия соответствует временному интервалу, при котором происходит разделение контактной области.

Отметим, что при дальнейшем росте параметра A_4 областей отрыва может быть несколько. Так, при $A_4 \cong 55$ (вариант 1) будет две области контакта, а при $A_4 \cong 80$ – три.

Таким образом, установлено, что в переходном процессе нестационарного тепловыделения за счет трения существует минимальное значение параметра A_4 (для рассматриваемой задачи $A_4 \cong 30$ для варианта 1 и $A_4 \cong 37$ для варианта 2), при котором область контакта становится многосвязной. Это обусловлено достижением, при фиксированной нагрузке, скоростью скольжения V критического значения, соответствующего началу процесса термической неустойчивости. Определение указанного значения является самостоятельной задачей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
3. Barber J.R., Martin-Moran C.J. Green's functions for transient thermoelastic contact problems for the half-plane // Wear. V. 79. № 1. 1982. P. 11–19.
4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
5. Демкин Н.Б. Контактное трение шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
6. Грилицкий Д.В., Баран В.П. О постановке контактных задач термоупругости при неидеальном тепловом контакте тел // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. 1987. Вып. 27. С. 10–13.
7. Azarkhin A., Barber J.R. Transient contact of two sliding half-planes with wear // Trans. ASME. J. Tribology. 1987. V. 109. № 4. P. 598–603.
8. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
9. Евтушенко О.О., Паук В.И. Функции Грина нестационарных плоских контактных задач термоупругости для полупространства // Докл. АН Украины. 1992. № 11. С. 61–65.

Львов

Поступила в редакцию
11.V. 1994