УДК 539.3

© 1996 г. М.В. Долотов, И.Д. Килль

СВЯЗАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Получено точное решение в замкнутой форме связанной динамической задачи термоупругости для полупространства с граничным условием первого рода. Исследовано нормальное напряжение, перпендикулярное свободной поверхности, в окрестности фронта упругой волны.

Достаточно полный перечень работ, посвященных связанным динамическим задачам термоупругости, приведен в [1]. Изложенные в [1] аналитические методы решения задач эффективны, в основном, для малых значений безразмерного времени теплового воздействия. Между тем, даже физически малым размерным временам соответствуют большие значения безразмерного времени. Для таких значений широко используемый метод малого параметра приводит к достаточно громоздким формам решения.

Рассматривалась [2] плоская связанная задача термоупругости для полупространства с конечной скоростью распространения тепла при сосредоточенном тепловом воздействии. Принимаемые допущения в процессе обращения преобразования Лапласа представляются недостаточно обоснованными.

1. Упругое полупространство $z \geqslant 0$ находится в покое при абсолютной температуре $T = T_0$ до момента времени $t = 0$. При $t = 0$ температура границы $z = 0$ полупространства повышается до значения T_C и далее остается постоянной. Требуется определить абсолютную температуру T и напряжения в полупространстве с учетом динамических составляющих и связанности.

Введем безразмерные величины

$$T' = \frac{T-T_0}{T_C-T_0}, \quad \sigma' = \frac{(1-2\nu)\sigma_{zz}}{\alpha E(T_C-T_0)}, \quad z' = \frac{cz}{a}, \quad t' = \frac{c^2 t}{a} \tag{1.1}$$

где c – скорость продольных упругих волн, α – коэффициент линейного расширения, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, a – температуропроводность материала. Штрихи при обозначении безразмерных величин далее опускаем.

Для определения $T(z, t)$ и $\sigma(z, t)$ требуется решить краевую задачу [1]

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = (1+\mu^2)\frac{\partial T}{\partial t} + \mu^2\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

$$T(0,t)=1, \quad \sigma(0,t)=0, \quad T(z,0)=\frac{\partial T}{\partial t}(z,0)=\sigma(z,0)=\frac{\partial\sigma}{\partial t}(z,0)=0, \quad |T|<\infty, \quad |\sigma|<\infty \tag{1.2}$$

$$\mu^2 = \frac{(1+\nu)E}{(1-\nu)(1-2\nu)}\frac{\alpha^2 T_0 a}{k}$$

где μ^2 – параметр связанности, k – коэффициент теплопроводности.

Решение краевой задачи (1.2) находится с помощью преобразования Лапласа по t. Изображения $T^*(z, s)$, $\sigma^*(z, s)$ искомых функций имеют вид [1]

$$T^*(z,s) = \frac{(\lambda_1^2-s^2)e^{-\lambda_1 z} - (\lambda_2^2-s^2)e^{-\lambda_2 z}}{s^2 r}, \quad \sigma^*(z,s) = \frac{e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}}{r} \tag{1.3}$$

$$r=\sqrt{(s-s_1)(s-s_2)},\quad s_{1,2}=1-\mu^2\pm 2i\mu,\quad \lambda_{1,2}=\sqrt{s(s+1+\mu^2\pm r)/2}$$

$$\arg r=\arg\lambda_1=\arg\lambda_2=0 \ \text{ при } \ s>1-\mu^2$$

Процедуру обращения изображений (1.3) продемонстрируем на примере $\sigma^*(z, s)$. Положим

$$\sigma^*(z,s)=\sigma_1^*(z,s)-\sigma_2^*(z,s),\quad \sigma_k^*=e^{-\lambda_k z}/r,\quad k=1,2 \tag{1.4}$$

На комплексной плоскости s с разрезами по отрицательной части действительной оси и отрезку $[s_1, s_2]$ функции $r, \lambda_1, \lambda_2, \sigma_1^*, \sigma_2^*$ допускают выделение однозначных ветвей, определяемых начальным выбором аргументов в (1.3).

Указанные ветви λ_1, λ_2 удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_1=s+O(1),\quad \lambda_2=\sqrt{s}+O(1/\sqrt{s}),\quad s\to\infty$$

$$\lambda_1=s+o(1),\quad \lambda_2=\sqrt{s}+o(\sqrt{s}),\quad s\to 0 \tag{1.5}$$

По теореме обращения

$$\sigma(z,t)=\sigma_1(z,t)-\sigma_2(z,t),\quad \sigma_k(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\sigma_k^*(z,s)e^{st}ds,\quad k=1,2;\ \ \omega>1-\mu^2 \tag{1.6}$$

На комплексной плоскости s рассмотрим замкнутый контур, образованный дугами окружностей $|s|=R$, $|s|=\rho$, $|s-s_k|=\rho$, $(k=1,2)$, берегами разрезов $\operatorname{Im} s=0$, $-\infty<\operatorname{Re} s<-\rho$; $\operatorname{Re} s=1-\mu^2$, $-2\mu+\rho<\operatorname{Im} s<2\mu-\rho$ и прямой $\operatorname{Re} s=\omega$. Функция $\sigma_2^*(z,s)e^{st}$ на дуге $|s|=R$, $\operatorname{Re} s<\omega$ удовлетворяет в силу второго соотношения (1.5) условиям леммы Жордана. Используя интегральную теорему Коши и переходя к пределу при $R\to\infty$, $\rho\to 0$, сводим интеграл $\sigma_2(z, t)$ из (1.6) к сумме интегралов по берегам разрезов (интегралы по окружностям радиуса ρ в пределе обращаются в нуль).

Вычисляя с учетом выбранных ветвей r и λ_2 значения радикалов на берегах разрезов по формулам из [3], получим после преобразований

$$\sigma_2(z,t)=-A(z,t,\mu^2)+e^{(1-\mu^2)t}B(z,t,\mu^2) \tag{1.7}$$

$$A(z,t,\mu^2)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{ye^{-y^2t}}{q}\sin pzdy,\quad B(z,t,\mu^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-zu_+}\cos(u_-z-2\mu t\cos y)dy$$

$$q=\sqrt{y^4+2(1-\mu^2)y^2+(1+\mu^2)^2},\quad p=y\sqrt{(1+\mu^2-y^2+q)/2}$$

$$u_\pm=\{\pm(1-\mu^2)(1-\mu\sin y)\mp 2\mu^2\cos^2 y+(1+\mu^2-2\mu\sin y)\sqrt{1+\mu^2+2\mu\sin y}\}^{1/2}/\sqrt{2}$$

При $t<z$ функция $\sigma_1^*(z,s)e^{st}$ удовлетворяет в силу первого соотношения (1.5) условиям леммы Жордана на дуге $|s|=R$, $\operatorname{Re} s>\omega$. Используя контур, образованный этой дугой и отрезком прямой $\operatorname{Re} s=\omega$, и переходя к пределу при $R\to\infty$, получаем $\sigma_1(z, t)=0$ $(t<z)$.

Если $t>z$, то $\sigma_1^*(z,s)e^{st}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана на дуге $|s|=R$, $\operatorname{Re} s<\omega$. Используя тот же контур, что и при обращении $\sigma_2^*(z,s)$ получим $\sigma_1(z, t)=e^{t(1-\mu^2)}B(z, t)$, $(t>z)$ (сумма интегралов по берегам горизонтального разреза равна нулю).

Обращение $T^*(z, s)$ производится аналогичным образом. Заметим, что в этом случае предел интеграла по окружности $|s|=\rho$ равен единице.

Окончательно получаем

$$T(z,t)=1-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{1+\mu^2+q+y^2}{yq}e^{-y^2t}\sin pzdy-$$

$$-\frac{\mu e^{(1-\mu^2)t}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-u_+z}\{[(1-\mu^2)(\mu-\sin y)-2\mu\cos^2 y]\cos(u_-z-2\mu t\cos y)- \tag{1.8}$$

$$-(1+\mu^2-2\mu\sin y)\cos y\sin(u_- z-2\mu t\cos y)\}\frac{dy}{(1-\mu^2)^2+4\mu^2\cos^2 y}[1-\eta(t-z)]$$

$$\sigma(z,t)=A(z,t,\mu^2)-e^{t(1-\mu^2)}B(z,t,\mu^2)[1-\eta(t-z)]$$

где $\eta(x)$ – единичная функция Хевисайда.

Непосредственная проверка показывает, что выражения (1.8) действительно являются решением краевой задачи (1.2). Заметим, что при $\mu = 0$ (1.8) обращается в известное решение несвязанной динамической задачи [1].

2. Вычисление интегралов в (1.8) при небольших значениях z и t может быть выполнено путем разложения их в ряды по μ^2. Соответствующее решение совпадает с решением, получаемым методом малого параметра [1].

Заметим, что в силу (1.1) даже весьма малым значениям размерного времени соответствуют большие значения безразмерного времени t. Для больших значений z и t метод малого параметра представляется малоэффективным из-за необходимости удерживать значительное число громоздких слагаемых.

Вычисление $A(z, t, \mu^2)$, $B(z, t, \mu^2)$ на ЭВМ для больших z и t затруднительно вследствие сильной осцилляции подынтегральных функций.

Ограничимся исследованием напряжения $\sigma(z, t)$ при больших значениях z и t в окрестности фронта упругой волны.

Для приближенного вычисления $B(z, t, \mu^2)$ применим метод, являющийся по существу обобщением метода "малых времен" [1].

Используя полученное в разд. 1 соотношение

$$L_s\{e^{t(1-\mu^2)}B(z,t,\mu^2)\eta(t-z)\}=e^{-\lambda_1 z}/r$$

(L_s – оператор преобразования Лапласа) и теорему смещения, получим

$$L_s\{B(z,t,\mu^2)\eta(t-z)\}=e^{-\lambda z}/\sqrt{s^2+4\mu^2},\quad \lambda(s,\mu^2)=\lambda_1(s+1-\mu^2,\mu^2) \tag{2.1}$$

Сохраняя в лорановском разложении функции $\lambda(s, \mu^2)$ в окрестности $s = \infty$

$$\lambda(s,\mu^2)=s+\left(1-\frac{\mu^2}{2}\right)+\frac{\mu^2(4-\mu^2)}{8s}-\frac{\mu^4(2+\mu^2)}{16s^2}+\ldots \tag{2.2}$$

три первых члена, подставим полученное таким образом приближенное значение $\lambda(s, \mu^2)$ в (2.1). Применяя затем биномиальное разложение и теорему запаздывания, будем иметь

$$B^{(0)}(z,t,\mu^2)\eta(t-z)=L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-z(s+\alpha_0+\alpha_1/s)}}{\sqrt{s^2+4\mu^2}}\right\}=e^{-\alpha_0 z}L_{t-z}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!\mu^{2n}}{(n!)^2}\frac{e^{-\alpha_1 z/s}}{s^{2\eta+1}}\right\} \tag{2.3}$$

где L_t^{-1} – оператор, обратный L_s. Ряд сходится абсолютно при $|s| > 2\mu$. На основании теоремы 29.3 [4] в (2.3) возможен почленный переход к оригиналам. Выполняя его с помощью формулы 5.5 (40) [5], находим

$$B^{(0)}(z,t,\mu^2)=e^{-\alpha_0 z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{\mu^{2n}(t-z)^n}{\alpha_1^n z^n}J_{2n}(2\sqrt{\alpha_1 z(t-z)}),\quad t\geqslant z \tag{2.4}$$

где $J_k(x)$ – функции Бесселя первого рода. Ряд сходится при $t \geqslant z$. Используя неравенство $|J_k(\zeta)|\leqslant|\zeta/2|^k\exp|\mathrm{Im}\zeta|/k!$ [6], можно убедиться, что ряд в (2.4) сходится и определяет регулярную по t функцию $B^{(0)}(z, t, \mu^2)$ при всех значениях t.

Заметим, что при $t < z$ более удобным для вычислений оказывается ряд

$$B^{(0)}(z,t,\mu^2)=e^{-\alpha_0 z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{\mu^{2n}(z-t)^n}{\alpha_1^n z^n}I_{2n}(2\sqrt{\alpha_1 z(z-t)}) \tag{2.5}$$

($I_k(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода), получаемый из (2.4) с помощью известных соотношений, связывающих $J_k(x)$ и $I_k(x)$.

Оценим функцию $F(z, t) = B(z, t, \mu^2) - B(0)(z, t, \mu^2)$. Применяя к оригиналу $F(z, t)\eta(t - z)$ теорему упреждения ([4], с. 40), теоремы о дифференцировании и начальном значении оригинала, приходим к соотношениям, из которых, используя (2.2), последовательно находим

$$F(z,z)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial t}(z,z)=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(z,z)=\frac{\mu^4(2+\mu^2)}{16}ze^{-z(1-\mu^2/2)}$$

$$F(z,t)=\frac{\mu^4(2+\mu^2)}{32}ze^{-z(1-\mu^2/2)}(t-z)^2+\ldots \tag{2.6}$$

Следовательно,

$$F(z,t)=O(\mu^4),\quad \mu^2\to 0;\quad F(z,t)=O((z-t)^2),\quad z\to t$$

Заметим, что порядки погрешности по μ^2 и $z - t$ не изменятся, если в качестве приближенного значения $B(z, t, \mu^2)$ взять сумму первых двух членов ряда (2.5).

Из (1.8), (2.5) и (2.6) следует, в частности, что значения скачка напряжения $\sigma(z, t)$ на фронте упругой волны равно $-\exp(\mu^2 z/2)$, что совпадает с результатом, приведенным в [1].

Оценим интеграл $A(z, t, \mu^2)$. Рассмотрим функцию $\Phi(w)$, отличающуюся от $A(z, t, \mu^2)$ заменой q на $\sqrt{y^4+2(1-w)y^2+(1+\mu^2)^2}$. Тогда

$$A(z, t, \mu^2) = \Phi(\mu^2) \tag{2.7}$$

Значения $\Phi(-\mu^2)$ и $\Phi'(-\mu^2)$ выражаются через элементарные функции и функции ошибок с помощью соотношений 1.4 (15), 2.5 (26) [5] и формул, получаемых из них дифференцированием по параметру. Используя асимптотическое разложение функции ошибок для больших значений аргумента [7], можно убедиться при $\sqrt{t}-z/(2\sqrt{t}) \gg 1$ в справедливости неравенства $\Phi'(-\mu^2) < 0$. Из этого соотношения и (2.7) получаем для достаточно малых μ^2:

$$A(z,t,\mu^2)\leqslant\Phi(-\mu^2)=\frac{1}{2}e^{t\mu_1^2}\left[e^{-z\mu_1}\operatorname{erfc}\left(\mu_1\sqrt{t}-\frac{\mu_1 z}{2\sqrt{t}}\right)-e^{z\mu_1}\operatorname{erfc}\left(\mu_1\sqrt{t}+\frac{\mu_1 z}{2\sqrt{t}}\right)\right],\quad \mu_1^2=1+\mu^2 \tag{2.8}$$

Таким образом, $\Phi(-\mu^2)$ является при достаточно малых μ^2 и больших t можорантой $A(z, t, \mu^2)$.

Вклад $A(z, t, \mu^2)$ в $\sigma(z, t)$ в правой полуокрестности фронта упругой волны $z = t$ при рассматриваемых значениях μ^2 и t незначителен. Расчет для $\mu^2 = 1{,}14 \cdot 10^{-2}$ (сталь) при $z_0 = t_0 = 10$ (что соответствует расстоянию фронта упругой волны от свободной поверхности $2 \cdot 10^{-8}$ м) дает $A(z, t, \mu^2) \leqslant 9{,}4 \cdot 10^{-3}$, в то время как $e^{(1-\mu^2)t}B(z,t,\mu^2)=0{,}9446$. Следовательно, слагаемое $A(z, t, \mu^2)$ составляет при $z = t_0 + 0$ не более 1,1% решения (1.8). При бóльших значениях t_0 вклад в решение $A(z, t, \mu^2)$ уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г.* Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984. 184 с.
2. *Nayfeh A., Nemat-Nasser S.* Transient thermo-elastic waves in a half-space with thermal relaxation // ZAMP. 1972. V. 23. № 1. P. 50–68.
3. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Гостехиздат, 1955. 380 с.
4. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343 с.
6. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
7. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.VII.1995