

УДК 539.376

© 1996 г. В.М. Александров, А.А. Шматкова

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ЛЕДЯНОЙ ПЛИТЫ НА ГИДРАВЛИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ

В рамках гипотезы плоских сечений рассматривается задача о нелинейной неустановившейся ползучести изгибной деформации ледяной плиты, частично покрывающей гидравлическое основание. В плане плита представляет собой полосу конечной ширины и длины с одним защемленным концом. Это может быть припай у стены гидросооружения или специально выпиливаемая в ледяном покрове "клавиша" для натуральных экспериментальных исследований. Для описания реологии льда использована часто принимаемая зависимость [1, 2] между деформацией ползучести и напряжением, стоящим в некоторой степени под знаком временного оператора вольтерровского вида с неразностным ядром. Относительно изгибающего момента в плите на гидравлическом основании получено нелинейное интегродифференциальное уравнение, которое решается разложением в ряд по некоторому малому временному параметру, а затем численно по координате методом монотонной прогонки. Находится также прогиб плиты. Рассмотрены характерные случаи изменения изгибающего момента и прогиба по длине плиты с течением времени.

1. Пусть ледяная плита толщины h , ширины $l > h$ и длины $L > l$ лежит на гидравлическом основании, которое будем моделировать основанием Фусса–Винклера [3] с коэффициентом постели $k = \rho g$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести. Один из концов плиты по длине жестко защемлен, а другой нагружен перерезывающим усилием F и изгибающим моментом G (фиг. 1). Будем полагать, что под действием этих нагрузок плита не отрывается от основания.

Известно [4], что естественный лед представляет собой тело с весьма сложной многофазной структурой. Описать деформирование его, как сплошной среды, с помощью одного универсального закона по-видимому невозможно. Здесь предлагается, в связи с изучением нелинейной неустановившейся ползучести изгибной деформации ледяной плиты для случая одноосного напряженного состояния, использовать зависимость [1, 2]

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\tau_*}^t B(t, \tau) |\sigma|^{m-1} d\tau \quad (1.1)$$

где ε и σ – деформация и напряжение, E – модуль Юнга, t – время, τ_* – момент нагружения, $B(t, \tau)$ и m – определяемые экспериментально функция (ядро ползучести) и показатель нелинейности ($\min_{t, \tau} B(t, \tau) > 0$ и $m > 1$). Из (1.1) следует, что мгновенная деформация льда предполагается упругой. Можно для повышения точности модели (1.1) допустить зависимость E от t .

Относительное удлинение волокна плиты, расположенного в сечении на расстоянии z от нейтральной оси, $\varepsilon = z/R$ (R – радиус кривизны нейтральной плоскости). В случае малого прогиба плиты w можно с достаточной точностью положить $\varepsilon = zw''_x$. Учитывая

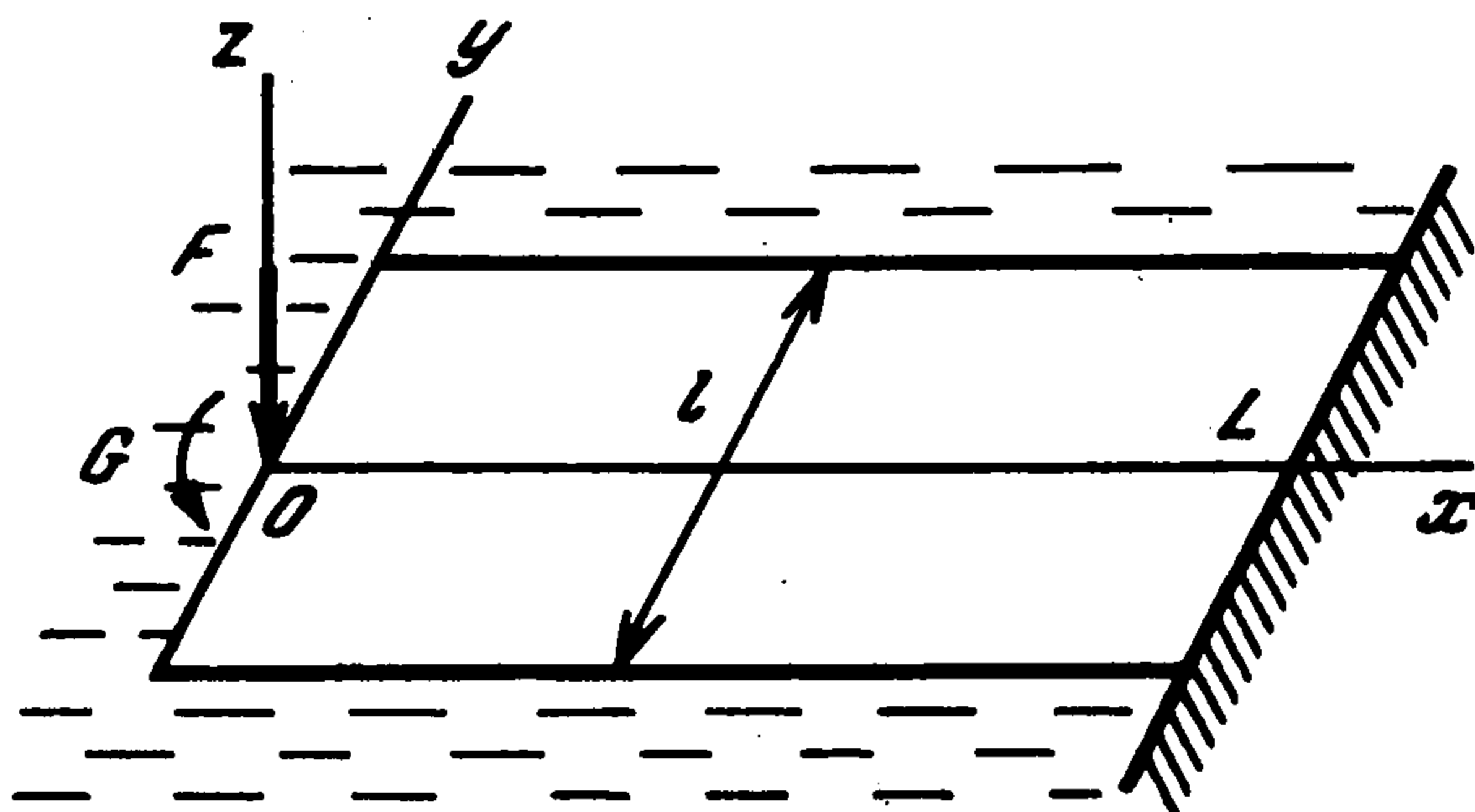
это, запишем соотношение (1.1) в форме

$$Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sigma + E \int_{\tau_*}^t B(t, \tau) \sigma |\sigma|^{m-1} d\tau \quad (1.2)$$

Относительно зависимости σ от z ($|z| \leq h/2$) можно утверждать, что

$$|\sigma| \sim |z|^{\alpha(|z|)} \quad (1.3)$$

причем функция $\alpha(|z|)$ монотонно возрастает с уменьшением $|z|$ от значения $\alpha(h/2) = m^{-1}$ до значения $\alpha(0) = 1$ (при $E = \infty$, как показано в [5], $\alpha = m^{-1}$).



Фиг. 1

Пусть Ω – площадь поперечного сечения плиты, это прямоугольник со сторонами h и l . Умножая (1.2) на $z d\Omega$ и выполняя интегрирование по площади поперечного сечения, найдем

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M + E \int_{\tau_*}^t B(t, \tau) d\tau \int_{\Omega} \sigma |\sigma|^{m-1} z d\Omega \quad (1.4)$$

$$\left(I = \int_{\Omega} z^2 d\Omega = \frac{lh^3}{12}, \quad M = \int_{\Omega} \sigma z d\Omega \right)$$

где I – момент инерции поперечного сечения, M – изгибающий момент в некотором сечении плиты.

Поскольку в том или ином сечении σ и z всегда одного знака или противоположных знаков, то внутренний интеграл в (1.4) равен либо J , либо $-J$, где

$$J = \int_{\Omega} |\sigma|^m |z| d\Omega \quad (1.5)$$

Пусть $m^{-1} + n^{-1} = 1$. Тогда в силу неравенства Гельдера [6]

$$|M| = \left| \int_{\Omega} \sigma |z| d\Omega \right| \leq C_1 \left(\int_{\Omega} |\sigma|^m |z| d\Omega \right)^{1/m} \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{C_1^m} |M|^m \leq J, \quad \frac{1}{C_1^m} = \left(\frac{4}{h^2 l} \right)^{m-1}$$

Таким образом, получена оценка для интеграла (1.6) снизу.

Чтобы получить оценку сверху, воспользуемся неравенством Фавара [6]

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^p dx \leq \frac{2^p}{p+1} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right]^p \quad (1.7)$$

где $p > 1$, а $f(x)$ – неотрицательная непрерывная выпуклая ($f''(x) < 0$) функция на $[a, b]$ (в работе [7] неравенство Фавара приведено с ошибкой, что сказалось далее на точности верхней оценки интеграла (1.5), здесь приводится исправленный результат). Заметим, что

$$\int_{\Omega} |\sigma|^m |z| d\Omega = l \int_0^{\omega} |\sigma|^m dz_1 \quad \left(\omega = \frac{h^2}{4} \right) \quad (1.8)$$

где $m > 1$ и $|\sigma|$, как функция z_1 , в силу (1.3) выпуклая. Тогда на основании (1.7)

$$J \leq \frac{1}{C_2^m} |M|^m, \quad \frac{1}{C_2^m} = \frac{2^m}{m+1} \left(\frac{4}{h^2 l} \right)^{m-1} \quad (1.9)$$

Итак, учитывая соотношения (1.6) и (1.9), приближенно можно положить

$$J \approx C^* |M|^m, \quad C^* = (C_1^{-m} + C_2^{-m}) / 2 \quad (1.10)$$

При изменении $1 \leq m \leq 3$ имеем $1 \leq C^*/C_1^{-m} \leq 1,5$; $1 \leq C^*/C_2^{-m} \leq 0,75$. Подставляя выражение (1.10) в (1.4), получим следующее приближенное уравнение для описания изгибной деформации ледяной плиты, находящейся в условиях нелинейной неустановившейся ползучести:

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M + C^* E \int_{\tau_0}^t B(t, \tau) M |M|^{m-1} d\tau \quad (1.11)$$

Отметим, что уравнение, похожее на (1.11), без обоснования получено в [5].

2. Со стороны гидравлического основания на плиту действует распределенная по длине нагрузка $q(x, t) = klw(x, t)$. В то же время, как известно [3], $\partial^2 M / \partial x^2 = -q(x, t)$, поэтому

$$klw(x, t) = -\partial^2 M / \partial x^2 \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.11), получим относительно изгибающего момента $M(x, t)$ интегриродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 M}{\partial x^4} + \frac{kl}{EI} M + \frac{klC^*}{I} \int_{\tau_0}^t B(t, \tau) M |M|^{m-1} d\tau = 0 \quad (2.2)$$

Граничные условия:

$$M = -G, \quad M' = -F \quad (x = 0) \quad (2.3)$$

$$w = w' = 0 \quad (x = L) \quad (2.4)$$

Последние условия в силу (2.1) могут быть также записаны следующим образом:

$$M'' = M''' = 0 \quad (x = L) \quad (2.5)$$

Итак, имеем уравнение (2.2) при граничных условиях (2.3) и (2.5). Решив его, можем затем найти w по формуле (2.1).

Для достаточно старого ледяного покрова ядро ползучести $B(t, \tau)$ можно считать разностным [1] и на основании экспериментальных данных [4] принять

$$B(t - \tau) = B_{\infty} + B_0 \exp[-\mu(t - \tau)] \quad (2.6)$$

С учетом (2.6) перейдем в (2.2) к приведенному времени

$$\zeta = 1 - e^{-\mu t} \quad (\zeta \in [0, 1)), \quad \theta = 1 - e^{-\mu \tau} \quad (\theta \in [0, 1)) \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{\partial^4 M}{\partial x^4} + \frac{kl}{EI} M + \frac{klC^*}{I\mu} \left[B_\infty \int_0^\zeta \frac{M|M|^{m-1}}{1-\theta} d\theta + B_0(1-\zeta) \int_0^\zeta \frac{M|M|^{m-1}}{(1-\theta)^2} d\theta \right] = 0 \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.8) будем искать в виде ряда

$$M(x, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} M_i(x) \zeta^i \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.8), совершая ряд преобразований и приравнявая выражения при одинаковых степенях ζ , приходим к следующей системе последовательно решаемых линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} M_0^{(4)} + J_1 M_0 &= 0 \\ M_i^{(4)} + J_1 M_i &= -(J_2 S_i + J_3 T_i) \quad (i \geq 1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{kl}{EI}, \quad J_2 = \frac{klC^* B_\infty}{I\mu}, \quad J_3 = \frac{klC^* B_0}{I\mu} \\ S_i &= \frac{1}{i} \sum_{m=0}^{i-1} f_m \quad (i \geq 1), \quad T_1 = f_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$T_i = \frac{1}{i(i-1)} \sum_{m=1}^{i-1} m f_m \quad (i \geq 2)$$

Выражения для f_m ($m = 0, 1, \dots, 4$) приведены в [7]. Характерно, что f_m зависит от всех M_0, M_1, \dots, M_{m-1} . Граничные условия для уравнений (2.10) имеют вид

$$\begin{aligned} M_0 &= -G, \quad M_0' = -F \quad (x=0), \quad M_0'' = M_0''' = 0 \quad (x=L) \\ M_i &= M_i' = 0 \quad (x=0, i \geq 1), \quad M_i'' = M_i''' = 0 \quad (x=L, i \geq 1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для M_0 и w_0 имеем классическое упруго-мгновенное решение

$$\begin{aligned} M_0 &= e^{\beta x} (A_0 \cos \beta x + B_0 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_0 \cos \beta x + D_0 \sin \beta x) \\ w_0 &= -\frac{2\beta^2}{k} [e^{\beta x} (B_0 \cos \beta x - A_0 \sin \beta x) - e^{-\beta x} (D_0 \cos \beta x - C_0 \sin \beta x)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

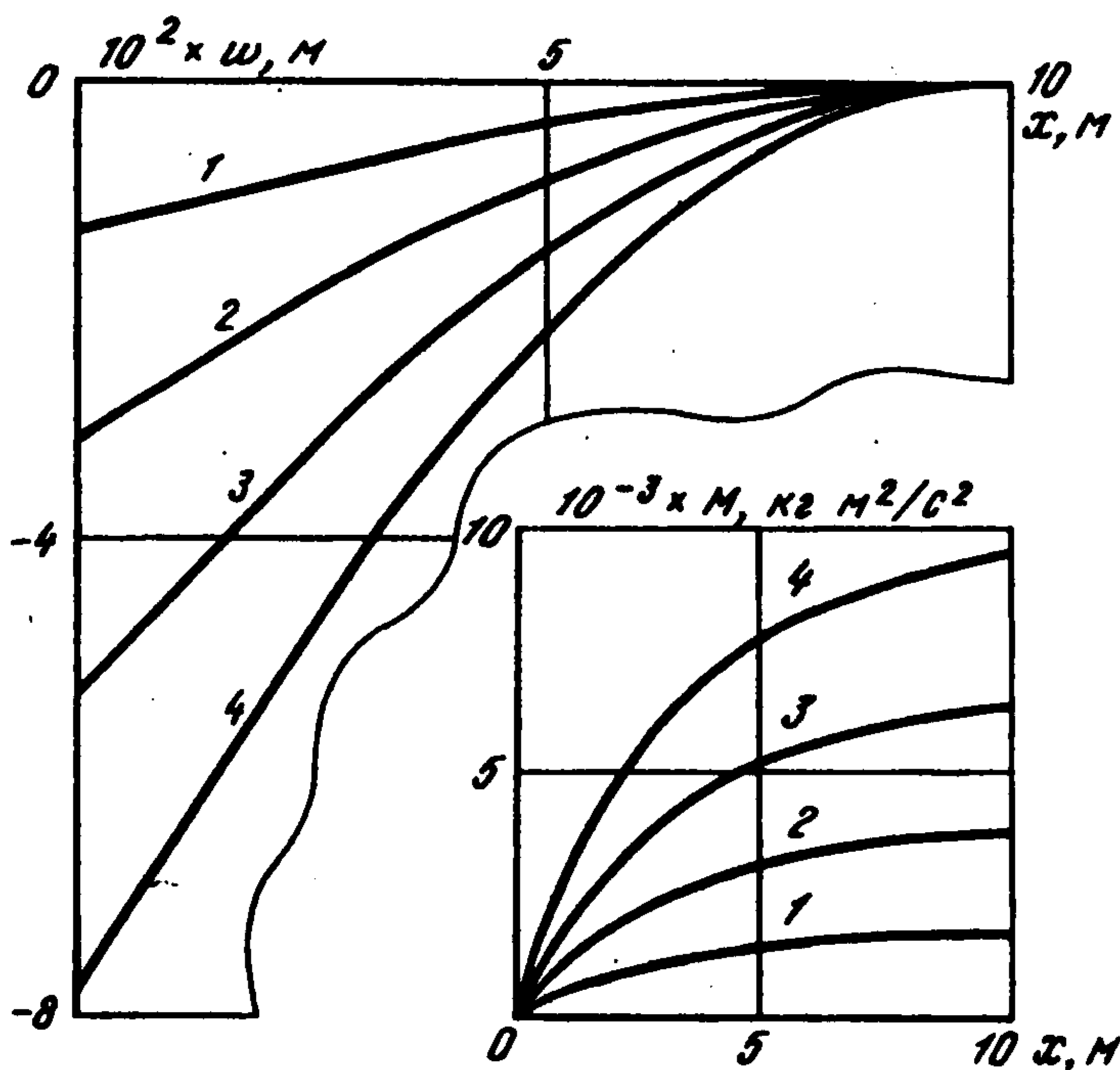
$$A_0 = -G - C_0, \quad C_0 = \frac{1}{2} \left[B_0 + D_0 + \frac{F}{\beta} - G \right]$$

$$B_0 = \left\{ \left[-\frac{F}{\beta} - G + e^{-2\beta L} \left(-\frac{F}{\beta} + G \right) \right] \sin \beta L + D_0 [2e^{-2\beta L} \cos \beta L - (1 + e^{-2\beta L}) \sin \beta L] \right\} \times$$

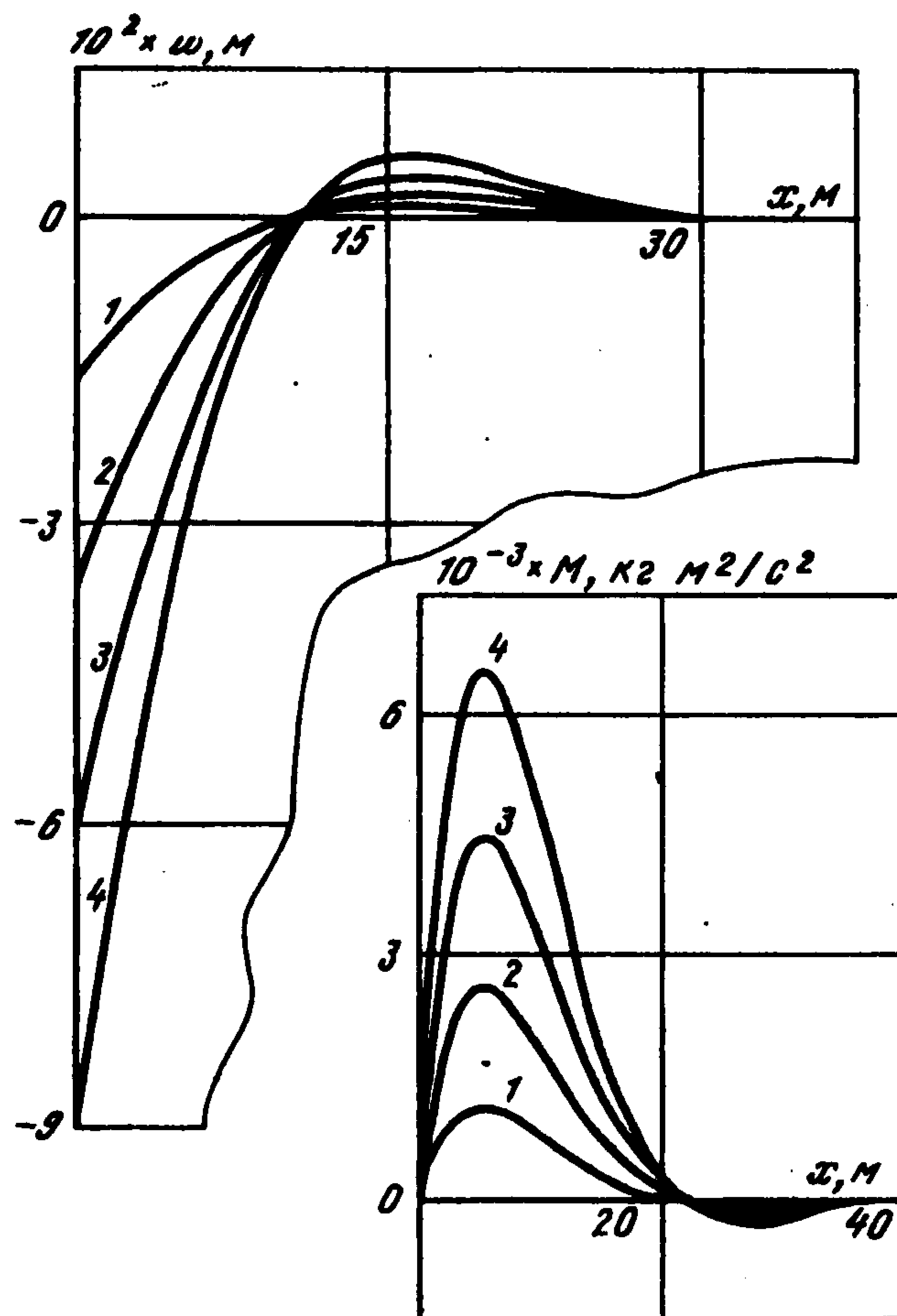
$$\times [2 \cos \beta L + (1 + e^{-2\beta L}) \sin \beta L]^{-1}$$

$$D_0 = \left[-\frac{F}{\beta} - G + e^{-2\beta L} (1 - 2 \cos \beta L \sin \beta L) \left(-\frac{F}{\beta} + G \right) - 2G e^{-2\beta L} \sin^2 \beta L \right] \times$$

$$\times [4e^{-2\beta L} \cos^2 \beta L + (1 + e^{-2\beta L})^2]^{-1}$$



Фиг 2



Фиг 3

Функции M_i и w_i при $i \geq 1$ находились численно по стандартной схеме, возникающей при аппроксимации краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Использовался метод исключения Гаусса и алгоритм монотонной прогонки [8]. Составлена программа на языке Си.

3. Для иллюстрации задачи приведем примеры. В программу вводятся следующие исходные данные, основанные на экспериментальном материале [4]: $E = 4 \cdot 10^9$ кг/мс²; $B_0 = 84 \cdot 10^{-8}$ (мс²/кг)^m1/с; $B_\infty = 5,6 \cdot 10^{-8}$ (мс²/кг)^m1/с; $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$ 1/с; $m = 1,72$. Кроме того, примем: $\rho = 10^3$ кг/м³; $g = 9,81$ м/с²; $h = 0,25$ м; $l = 1$ м; $G = 0$ кгм²/с²; $F = 500$ кгм/с². Все результаты далее приведены для случая, когда в (2.9) удерживалось шесть членов ряда. При этом численно установлено, что этого количества членов для $t \sim 200$ с достаточно.

1°. Пусть плита имеет конечную длину $L = 10$ м. На фиг. 2 приведены кривые для изгибающего момента M (кгм²/с²) и прогиба w (м) в зависимости от изменения координаты x при фиксированных значениях времени. Кривые 1–4 отвечают времени $t = 0, 30, 60, 200$ с. Кривые 1 иллюстрируют упруго-мгновенное решение задачи, кривые 4 соответствуют выходу решения на стационар. Все кривые монотонно возрастают. Наиболее вероятно, что плита сломается в заделке, т.е. при $x = 10$ м.

2°. Пусть плита полубесконечная. На фиг. 3 приведены, как и выше, кривые для M (кгм²/с²) и w (м) в зависимости от x при фиксированных моментах времени, тех же, что и на фиг. 2. Характер всех кривых меняется, они не монотонны. Максимальный изгибающий момент достигается при $x = 5,6$ м. Это место наиболее вероятного излома плиты.

3°. Пусть плита полубесконечная и весома. Тогда картина будет аналогична представленной на фиг. 3, только с той разницей, что $w \rightarrow hr_*/\rho$ при $x \rightarrow \infty$. Здесь ρ_* – плотность льда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00181-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
2. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
3. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 2. М.: Наука, 1965. 480 с.
4. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоздат, 1967. 215 с.
5. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
6. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.
7. Александров В.М., Шматкова А.А. Неустановившаяся ползучесть ледяного покрова, лежащего на гидравлическом основании, при сосредоточенном воздействии // ПМТФ. 1990. № 5. С. 132–138.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XI.1994