

УДК 539.3

© 1996 г. Ю.А. Антипов

ОТСЛОИВШЕЕСЯ ВКЛЮЧЕНИЕ В СЛУЧАЕ СЦЕПЛЕНИЯ И ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

Рассматривается плоская задача о концентрации напряжений возле тонкого абсолютно жесткого включения. Под воздействием силы и момента, приложенных к верхнему берегу включения, полностью сцепленному с упругой средой, нижний берег включения отслаивается: на некотором внутреннем участке происходит раскрытие трещины, а вне его возникают концевые зоны проскальзывания. Сформулированная задача эквивалентна системе четырех сингулярных интегральных уравнений на разных отрезках. В симметричном случае оказывается эффективным сведение этой системы к одному сингулярному интегральному уравнению типа свертки Меллина на отрезке $(\mu, 1)$, допускающему вследствие малости μ решение по предложенной ранее схеме [1]. В общем случае система приводится к двум последовательно решаемым векторным задачам Римана, для которых строится аналитическое и асимптотическое решение. Находятся зоны проскальзывания и отрыва, угол поворота включения, нормальные смещения нижнего берега включения и контактные напряжения в зоне проскальзывания.

Основная смешанная задача для щели – задача об отслоившемся включении – решалась ранее [2–5] без введения зон проскальзывания в окрестности концов включения. Указанная постановка даже в случае однородной среды приводит к нефизическому перехлесту берегов трещины в окрестности ее вершин. Аналогичная ситуация [6] возникает в задаче о межфазной трещине, устраненная [7] введением зон проскальзывания. В антиплоской задаче для отслоившегося включения осциллирующей особенности u напряжений и смещений в окрестности концов не возникает [8]. Было построено [9] точное решение плоской задачи о контакте включения с упругой матрицей при наличии участков отслоения и без учета касательных напряжений.

1. Отслоение под действием центрально приложенной вертикальной силы. В однородной упругой плоскости имеется абсолютно жесткое включение $(-a \leq x \leq a, y = \pm 0)$. К верхнему берегу включения, сцепленному со средой:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad -a \leq x \leq a, \quad y = +0 \tag{1.1}$$

в точке $x = 0$ приложена вертикальная сила P . Нижний берег включения отслоился. Под воздействием силы P срединный участок $(-b, b)$ трещины $(-a < x < a, y = -0)$ раскрылся:

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad -b < x < b, \quad y = -0 \tag{1.2}$$

а на концевых участках $(-a, -b), (b, a)$ выполняются условия бесфрикционного скольжения

$$\tau_{xy} = 0, \quad v = 0, \quad b < |x| < a, \quad y = -0 \tag{1.3}$$

Положение точки b определяется в ходе решения задачи из условия плавного

смыкания нижнего берега трещины

$$\partial v / \partial x(x, -0) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm b \mp 0$$

Физически корректным следует признать то решение, которое исключает растягивающие контактные напряжения в зоне скольжения и перехлест берегов трещины в зоне отрыва:

$$\sigma_y(x, -0) \leq 0, \quad b < |x| < a; \quad v(x, -0) \leq 0, \quad -b < x < b \quad (1.4)$$

Введем в рассмотрение скачки

$$\chi_1(x) = \langle \sigma_y \rangle, \quad \chi_2(x) = \langle \tau_{xy} \rangle, \quad \chi_3(x) = 2G \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle, \quad \chi_4(x) = 2G \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle$$

$$\langle \langle f \rangle \rangle = f|_{y=-0} - f|_{y=+0}$$

и выразим через них контактные напряжения и касательные производные смещений на линии $y = 0$:

$$\begin{aligned} 2\kappa^+ \sigma_y(x, -0) &= \kappa^+ \chi_1(x) - \kappa^- \Gamma_a \chi_2(x) - \Gamma_b \chi_4(x) \\ 2\kappa^+ \tau_{xy}(x, -0) &= \kappa^- \Gamma_a \chi_1(x) + \kappa^+ \chi_2(x) - \Gamma_a \chi_3(x) \\ 4G\kappa^+ \partial u / \partial x(x, +0) &= \kappa \Gamma_a \chi_2(x) - \kappa^+ \chi_3(x) - \kappa^- \Gamma_b \chi_4(x) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$4G\kappa^+ \partial v / \partial x(x, +0) = \kappa \Gamma_a \chi_1(x) + \kappa^- \Gamma_a \chi_3(x) - \kappa^+ \chi_4(x)$$

$$\kappa = 3 - 4\nu, \quad \kappa^\pm = \frac{\kappa \pm 1}{2}, \quad \Gamma_c \chi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\chi(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

Удовлетворяя условиям (1.1)–(1.3), приходим к системе четырех сингулярных интегральных уравнений

$$\kappa^+ \chi_1(x) - \kappa^- \Gamma_a \chi_2(x) - \Gamma_b \chi_4(x) = 0, \quad -b < x < b \quad (1.6)$$

$$\kappa^- \Gamma_a \chi_1(x) + \kappa^+ \chi_2(x) - \Gamma_a \chi_3(x) = 0, \quad -a < x < a \quad (1.7)$$

$$\kappa \Gamma_a \chi_2(x) - \kappa^+ \chi_3(x) - \kappa^- \Gamma_b \chi_4(x) = 0, \quad -a < x < a \quad (1.8)$$

$$\kappa \Gamma_a \chi_1(x) + \kappa^- \Gamma_a \chi_3(x) - \kappa^+ \chi_4(x) = 0, \quad -a < x < a \quad (1.9)$$

при дополнительных условиях замкнутости разреза и равновесия включения

$$\int_{-a}^a \chi_3(x) dx = 0, \quad \int_{-a}^a \chi_1(x) dx = P \quad (1.10)$$

(остальные условия вследствие четности $\chi_1(x)$ и нечетности $\chi_2(x)$, $\chi_4(x)$ выполняются автоматически). Выражая из уравнений (1.7) и (1.9) функции $\Gamma_a \chi_1(x)$ и $\Gamma_a \chi_3(x)$ и обращая оператор Γ_a в классе функций с интегрируемыми особенностями на концах $x = \pm a$, находим

$$\chi_1(x) = -\frac{1}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \left[C_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\xi - x} \left(-\frac{\kappa^-}{\kappa^+} \chi_2(\xi) + \frac{1}{\kappa^+} \chi_4(\xi) \right) d\xi \right] \quad (1.11)$$

$$\chi_3(x) = -\frac{1}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \left[C_1 + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\xi - x} \left(\frac{\kappa}{\kappa^+} \chi_2(\xi) + \frac{\kappa^-}{\kappa^+} \chi_4(\xi) \right) d\xi \right]$$

Удовлетворяя дополнительным условиям (1.10), имеем $C_1 = 0$, $C_0 = -P\pi^{-1}$. Подставив выражения (1.11) в уравнения (1.6) и (1.8) и учитывая нечетность функций χ_2 ,

χ_4 , после замены переменных $\xi = a\xi_1$, $x = ax_1$ получаем

$$\frac{\kappa^-}{\pi} \int_0^1 \left[-1 + \left(\frac{1-\xi^2}{1-x^2} \right)^{1/2} \right] \frac{2\xi\chi_2(a\xi)}{\xi^2-x^2} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda_0} \left[1 + \left(\frac{1-\xi^2}{1-x^2} \right)^{1/2} \right] \frac{2\xi\chi_4(a\xi)}{\xi^2-x^2} d\xi = -\frac{\kappa^+ P}{\pi a(1-x^2)^{1/2}}$$

$$0 < x < \lambda_0, \quad \lambda_0 = b/a \quad (1.12)$$

$$\frac{\kappa^+}{\pi} \int_0^1 \left[1 + \left(\frac{1-\xi^2}{1-x^2} \right)^{1/2} \right] \frac{2\xi\chi_2(a\xi)}{\xi^2-x^2} d\xi + \frac{\kappa^-}{\pi} \int_0^{\lambda_0} \left[-1 + \left(\frac{1-\xi^2}{1-x^2} \right)^{1/2} \right] \frac{2\xi\chi_4(a\xi)}{\xi^2-x^2} d\xi = 0$$

$$0 < x < 1$$

Анализ интегралов типа Коши в (1.6)–(1.9), а также условие гладкости профиля разреза в точках $x = \pm b$ приводит к следующему классу решений:

$$\chi_2(\xi) = O(\xi), \quad \xi \rightarrow +0; \quad \chi_2(\xi) = O\{(a-\xi)^{-3/4}\}, \quad \xi \rightarrow a-0$$

$$\chi_4(\xi) = O(\xi), \quad \xi \rightarrow +0; \quad \chi_4(\xi) = O\{(b-\xi)^{1/2}\}, \quad \xi \rightarrow b-0$$

Введем в рассмотрение новые функции

$$\varphi_1(\eta) = 2\eta\chi_2(a(1-\eta^2)^{1/2}), \quad \varphi_2(\eta) = 2\eta\chi_4(a(1-\eta^2)^{1/2}) \quad (1.13)$$

и систему (1.12) упростим к виду

$$-\frac{\kappa^-}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_1(\eta)}{\eta+y} d\eta + \frac{1}{\pi\lambda} \int_0^1 \frac{\varphi_2(\eta)}{\eta-y} d\eta = -\frac{P\kappa^+}{\pi a}, \quad \lambda < y < 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_1(\eta)}{\eta-y} d\eta + \frac{\kappa^-}{\pi\lambda} \int_0^1 \frac{\varphi_2(\eta)}{\eta+y} d\eta = 0, \quad 0 < y < 1 \quad (1.14)$$

где $\lambda = (1 - \lambda_0^2)^{1/2}$, а функции φ_1 , φ_2 обладают асимптотиками

$$\varphi_1(\eta) = O\{(1-\eta)^{1/2}\}, \quad \eta \rightarrow 1-0; \quad \varphi_1(\eta) = O(\eta^{-1/2}), \quad \eta \rightarrow +0 \quad (1.15)$$

$$\varphi_2(\eta) = O\{(1-\eta)^{1/2}\}, \quad \eta \rightarrow 1-0; \quad \varphi_2(\eta) = O\{(\eta-\lambda)^{1/2}\}, \quad \eta \rightarrow \lambda+0$$

Выразим функцию $\varphi_1(\eta)$ из второго уравнения системы (1.14) с учетом (1.15)

$$\varphi_1(\eta) = \frac{\kappa^-}{\pi\lambda} \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^{1/2} \int_{\lambda}^1 \left(\frac{\xi}{1+\xi} \right)^{1/2} \frac{\varphi_2(\xi)}{\xi+\eta} d\xi \quad (1.16)$$

Поставим последнее соотношение в первое уравнение (1.14) и воспользуемся равенством

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\xi^{-1/2}(1-\xi)^{1/2} d\xi}{(\xi+y)(\xi+\eta)} = \frac{2^{1/2}}{\eta-y} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right), \quad \tau = \left(\frac{2\eta}{1+\eta} \right)^{1/2}, \quad t = \left(\frac{2y}{1+y} \right)^{1/2}, \quad 0 < \eta, y < 1 \quad (1.17)$$

В результате приходим к интегральному уравнению, которое после введения переменных τ , t и функции

$$\varphi(\tau) = -\frac{\pi\kappa^+ a}{P\lambda(2-\tau^2)} \varphi_2 \left(\frac{\tau^2}{2-\tau^2} \right) \quad (1.18)$$

приводится к уравнению типа свертки Меллина

$$\frac{2}{\pi} \int_{\mu}^1 \frac{\varphi(\tau)\tau}{t^2 - \tau^2} \left(1 - \gamma^2 \frac{\tau}{t}\right) d\tau = \frac{1}{t^2 - 2}, \quad \mu < t < 1, \quad \mu = \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{\kappa^-}{\kappa^+} \quad (1.19)$$

Доопределим это уравнение на положительную полуось

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_*(\tau) \frac{1 - \gamma^2 \tau/t}{(t/\tau)^2 - 1} \frac{d\tau}{\tau} = f_*(t) + \varphi_-(t) + \varphi_+(t), \quad 0 < t < \infty \quad (1.20)$$

$$f_*(t) = \begin{cases} (t^2 - 2)^{-1}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1 \end{cases}, \quad \varphi_*(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \mu < t < 1 \\ 0, & t \in (\mu, 1) \end{cases}$$

$$\text{supp } \varphi_-(t) \subset [0, \mu], \quad \text{supp } \varphi_+(t) \subset [1, \infty)$$

и введем в рассмотрение трансформанты Меллина

$$\Phi_1^-(s) = \int_{\mu}^1 \varphi(\tau)\tau^s d\tau, \quad \Phi_1^+(s) = \int_1^{\mu} \varphi(\mu\tau)\tau^s d\tau$$

$$\Phi_2^-(s) = \int_0^1 \varphi_-(\mu\tau)\tau^s d\tau, \quad \Phi_2^+(s) = \int_1^{\infty} \varphi_+(\tau)\tau^s d\tau$$

$$F^-(s) = \int_0^1 \frac{\tau^s}{\tau^2 - 2} d\tau = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}(s+2j+1)}, \quad \text{Re}(s) > -1$$

Применение преобразования Меллина к уравнению (1.20) приводит к следующей векторной задаче Римана:

$$\Phi_1^+(s) = \mu^{-s-1} \Phi_1^-(s)$$

$$\Phi_2^+(s) = (\text{tg } \frac{1}{2} \pi s + \gamma^2 \text{ctg } \frac{1}{2} \pi s) \Phi_1^+(s) - \mu^{-s-1} \Phi_2^+(s) - F^-(s)$$

$$s \in \Gamma: \text{Re}(s) = \gamma_0 \in (0, 1)$$

Решение задачи строится по описанной ранее схеме [1]. Приведем лишь окончательные формулы

$$\Phi_1^-(s) = [K^-(s)]^{-1} \Sigma(s) + \mu^{s+1} [K^+(s)]^{-1} \Psi^-(s), \quad \Phi_2^-(s) = K^-(s) \Psi^-(s) \quad (1.21)$$

$$\Phi_2^+(s) = K^+(s) \Sigma(s) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-j-1}}{s+2j+1}, \quad \Sigma(s) = \Psi^+(s) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-j-1}}{K^+(-2j-1)(s+2j+1)}$$

$$K^+(s) = \frac{(1-\gamma^2)\Gamma(1-s/2)\Gamma(\frac{1}{2}-s/2)}{\Gamma(1-s/2-i\beta/2)\Gamma(1-s/2+i\beta/2)}, \quad K^-(s) = \frac{\Gamma(s/2)\Gamma(\frac{1}{2}+s/2)}{\Gamma(s/2+i\beta/2)\Gamma(s/2-i\beta/2)}$$

$$\Psi^+(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^+}{s-s_j}, \quad \Psi^-(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^-}{s+s_j-2}, \quad \beta = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{\ln \kappa}{2\pi} \quad (1.22)$$

$$s_{2j-1} = i\beta + 2j, \quad s_{2j} = -i\beta + 2j$$

Коэффициенты A_j^{\pm} – решение бесконечной алгебраической системы

$$A_m^+ = \mu^{s_m+1} \Delta_m^- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^-}{s_m + s_j - 2} \quad (1.23)$$

$$A_m^- = \mu^{s_m-3} \Delta_m^+ \left(f_m + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^+}{2-s_m-s_j} \right) \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$\Delta_{2m-1}^+ = -\frac{1-\gamma^2}{\pi} \left[\frac{\Gamma(m+i\beta/2)\Gamma(m-1/2+i\beta/2)}{\Gamma(m)\Gamma(m+i\beta)} \right]^2, \quad \Delta_{2m}^+ = \overline{\Delta_{2m-1}^+}$$

$$\Delta_{2m-1}^- = \frac{(m-1/2+i\beta/2)^2}{(1-\gamma^2)^2} \Delta_{2m-1}^+, \quad \Delta_{2m}^- = \overline{\Delta_{2m-1}^-}$$

$$f_m = \frac{1}{1-\gamma^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\Gamma(3/2+i\beta/2+j)|^2}{2^{j+1} \Gamma(3/2+j) j! (s_m-3-2j)}$$

Для того чтобы $\chi_4(\xi) = O\{(b-\xi)^{1/2}\}$, $\xi \rightarrow b-0$, или, что равносильно, $\varphi(\tau) = O\{(\tau-\mu)^{1/2}\}$, $\tau \rightarrow \mu+0$, необходимо и достаточно, чтобы величина μ была корнем следующего уравнения:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j^- = 0 \quad (1.24)$$

Тогда

$$b = 2a(2-\mu^2)^{-1}(1-\mu^2)^{1/2}$$

Численный анализ решения системы (1.23) показывает, что, как и в задаче о межфазной трещине [1], уравнение (1.24) может иметь корень только среди значений μ , близких к нулю. Для проведения анализа решения системы при малых μ обратим систему (1.23) в терминах рекуррентных соотношений

$$A_m^\pm = \mu^{s_m-3/2 \pm 3/2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^\pm \mu^{2k-2}, \quad a_{m1}^- = f_m \Delta_m^+ \quad (1.25)$$

$$a_{mn\pm}^\pm = \pm \Delta_m^\mp \sum_{j=1}^n \left(\frac{\mu^{i\beta} a_{2j-1, n+1-j}^\mp}{s_m + s_{2j-1} - 2} + \frac{\mu^{-i\beta} a_{2j, n+1-j}^\mp}{s_m + s_{2j} - 2} \right)$$

$$n_+ = n, \quad n_- = n+1; \quad n = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

Подставляя формулы (1.25) в уравнение (1.24), получаем

$$\mu^{2i\beta} a_{11}^- + a_{21}^- + O(\mu^2) = 0, \quad \mu \rightarrow 0$$

откуда находим следующую асимптотическую формулу:

$$\mu_k = 4 \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta} \operatorname{arctg} \frac{2q_1 q_2}{q_1^2 - q_2^2} - \frac{\pi}{\beta} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\} + O(\mu_k^2), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$q_1 + iq_2 = (1+i\beta)F(3/2+i\beta/2, 1/2-i\beta/2; 3/2; 1/2), \quad \operatorname{Im}(q_1, q_2) = 0$$

Ниже приведены значения первых нескольких корней для некоторых значений ν

ν	10^{-6}	0,1	0,3	0,45
μ_0	$0,212 \cdot 10^{-1}$	$0,107 \cdot 10^{-1}$	$0,417 \cdot 10^{-3}$	$0,321 \cdot 10^{-11}$
μ_1	$0,266 \cdot 10^{-5}$	$0,350 \cdot 10^{-6}$	$0,212 \cdot 10^{-10}$	$0,993 \cdot 10^{-35}$
μ_2	$0,333 \cdot 10^{-9}$	$0,114 \cdot 10^{-10}$	$0,108 \cdot 10^{-17}$	$0,307 \cdot 10^{-58}$

Осталось проверить корректность полученного решения, т.е. выполнимость условий (1.4). Определим скачок нормальных смещений $\langle \nu \rangle(x)$. Имеем вследствие (1.13)

и (1.18)

$$\begin{aligned} \chi_4(x) &= \frac{1}{2}(1-x^2/a^2)^{-1/2} \varphi_2((1-x^2/a^2)^{1/2}) = \\ &= \frac{-P\chi a}{\pi\chi^+(a^2-x^2)^{1/2}[a+(a^2-x^2)^{1/2}]} \varphi\left(\frac{2^{1/2}}{[1+(1-x^2/a^2)^{-1/2}]^{1/2}}\right) \end{aligned}$$

где функция $\varphi(\tau)$ – решение уравнения (1.19) – определяется при помощи обратного преобразования Меллина и теории вычетов из (1.21)

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi_1^-(s) \tau^{-s-1} ds = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{A_m^+ \tau^{-s_m-1}}{K^-(s_m)} - \frac{A_m^-(\tau/\mu)^{s_m-3}}{K^+(2-s_m)} \right)$$

$$\mu < \tau < 1 \quad (1.26)$$

Исследуем сходимость ряда (1.26) в точках $\tau = \mu$ и $\tau = 1$. Имеем вследствие (1.22) асимптотику при $s \rightarrow \infty$ $K^+(s) = O(s^{-1/2})$, $s \in D^+$, $K^-(s) = O(s^{1/2})$, $s \in D^-$, $D^{\pm}: \text{Re}(s) \leq \gamma_0$. Анализ соотношений (1.23) с учетом равенства (1.24) дает

$$A_m^- = O(m^{-2}\mu^{s_m}), \quad A_m^+ = O(m^{-1}\mu^{s_m}), \quad m \rightarrow \infty$$

так что элементы ряда (1.26) при $m \rightarrow \infty$ ведут себя, как $m^{-3/2}$, а значит,

$$\varphi(\tau) = O\{(\tau-\mu)^{1/2}\}, \quad \tau \rightarrow \mu+0; \quad \varphi(\tau) = O\{(1-\tau)^{1/2}\}, \quad \tau \rightarrow 1-0$$

Смещения нижнего отслоившегося берега имеют вид

$$v(x, -0) = -\frac{1}{2G} \int_x^b \chi_4(\xi) d\xi$$

Найдем теперь контактные нормальные напряжения $\sigma_y(x, -0)$ на отрезке контакта $b < x < a$. Принимая во внимание связь (1.5), соотношения (1.11), (1.13), (1.16), (1.18) и (1.20), получаем

$$\begin{aligned} \frac{2\pi a t^2}{P(2-t^2)^2} \sigma_y\left(\frac{2a(1-t^2)^{1/2}}{2-t^2}, -0\right) &= -\frac{1}{t^2-2} + \frac{2}{\pi} \int_{\mu}^1 \frac{\tau\varphi(\tau)}{t^2-\tau^2} \left(1-\gamma^2 \frac{\tau}{t}\right) d\tau = \\ &= \varphi_-(t) + \varphi_+(t), \quad 0 < t < \infty \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Меллина ко второй формуле (1.21), приходим к соотношениям

$$\sigma_y(x, -0) = \frac{Pa}{\pi A(x)[a+A(x)]} \varphi\left(\left[\frac{2A(x)}{a+A(x)}\right]^{1/2}\right), \quad b < x < a \quad (1.27)$$

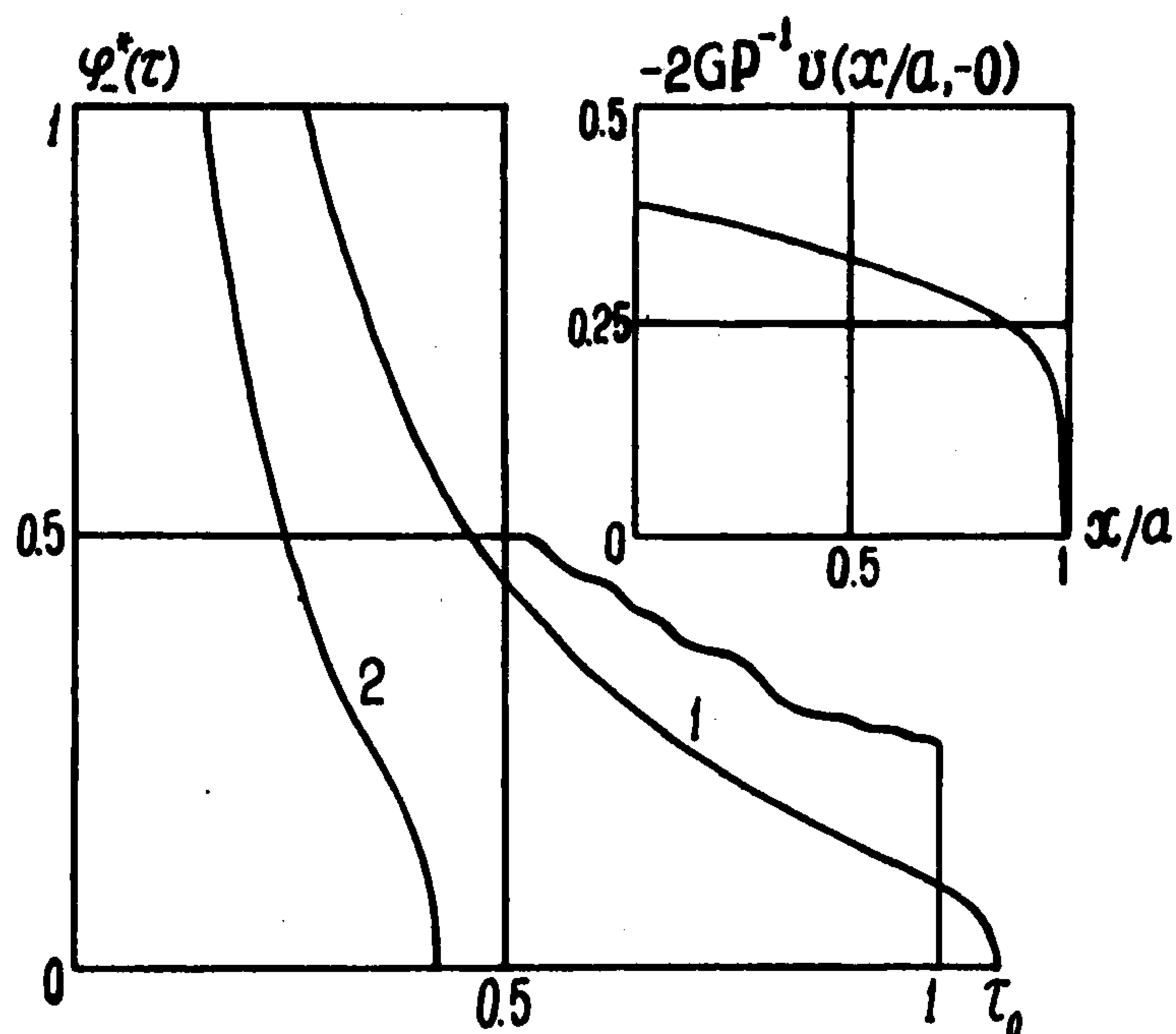
$$A(x) = (a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$\varphi_-(t) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m)} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{2m-2} \left[\frac{\Gamma(3/2-m)\Psi^-(2-2m)}{|\Gamma(1-m+i\beta/2)|^2} \frac{\mu}{t} + \frac{\Gamma(1/2-m)\Psi^-(1-2m)}{|\Gamma(1/2-m+i\beta/2)|^2} \right]$$

Анализ последних формул показывает, что контактные напряжения монотонно возрастают в окрестности точки $x = a$, причем

$$\sigma_y(x, -0) = O\{(a-x)^{-3/4}\}, \quad x \rightarrow a-0; \quad \sigma_y(x, -0) = O\{(x-b)^{1/2}\}, \quad x \rightarrow b+0$$

Расчеты приводят к выводу, что только для корня μ_0 (максимального среди корней



Фиг. 1

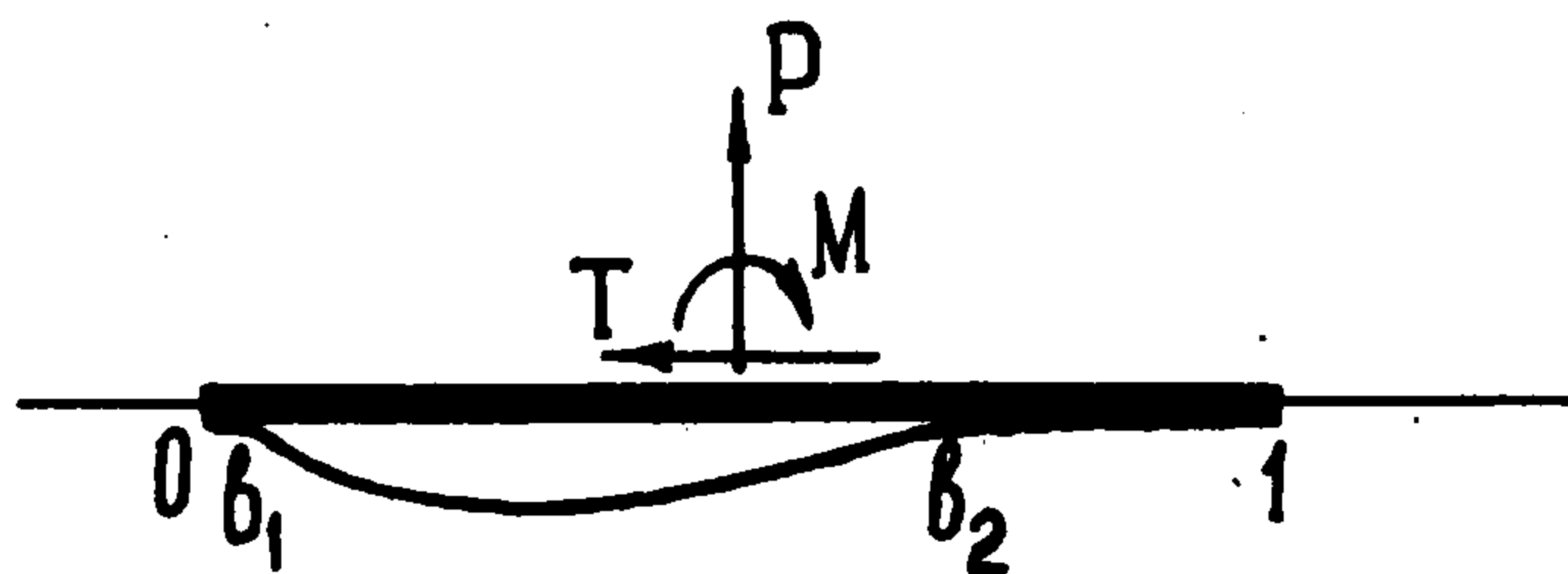
уравнения (1.24)) напряжения и смещения удовлетворяют условиям (1.4). Приведенные ниже результаты расчета

ν	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45
μ	$0,212 \cdot 10^{-1}$	$0,107 \cdot 10^{-1}$	$0,356 \cdot 10^{-2}$	$0,417 \cdot 10^{-3}$	$0,782 \cdot 10^{-6}$	$0,321 \cdot 10^{-11}$
λ	$0,225 \cdot 10^{-3}$	$0,575 \cdot 10^{-4}$	$0,633 \cdot 10^{-5}$	$0,867 \cdot 10^{-7}$	$0,306 \cdot 10^{-12}$	$0,515 \cdot 10^{-23}$
l/a	$0,252 \cdot 10^{-7}$	$0,165 \cdot 10^{-8}$	$0,201 \cdot 10^{-10}$	$0,376 \cdot 10^{-14}$	$0,468 \cdot 10^{-25}$	$0,133 \cdot 10^{-46}$

показывают, что длина контакта $l = a - b$ максимальна при $\nu = 0$ и убывает до нуля при возрастании коэффициента Пуассона до $\nu = 0,5$.

На фиг. 1 изображен график смещений $-2G\nu(x, -0)/P$ в зоне отрыва $0 < x < b$ для $\nu = 0,3$. Заметим, что производная функции $\nu(x, -0)$ по x в точке $x = b$ обращается в нуль. Представлены также графики зависимости функции $\varphi^*(\tau) = -10^{-2}\varphi_-(\tau)$ от $\tau = 10^{-2}\tau_0$ для случая $\nu = 0,1$ (кривая 1) и функции $\varphi^*(\tau) = -10^{-3}\varphi_-(\tau)$ от $\tau = 10^{-3}\tau_0$ при $\nu = 0,3$ (кривая 2). В обоих случаях $0 \leq \tau \leq \mu$. Нормальные напряжения связаны с функцией $\varphi_-(\tau)$ соотношением (1.27). Как видно из графиков на фиг. 1, построенное решение удовлетворяет условиям корректности (1.4). На малых участках проскальзывания (длиной меньшей, чем $2,5 \cdot 10^{-8}a$) возникают сжимающие контактные напряжения, равные нулю в точке $x = b$ и монотонно стремящиеся к бесконечности при $x \rightarrow a - 0$. При $x \rightarrow a + 0$ напряжения $\sigma_y(x, 0)$ ограничены. Этот факт следует из анализа поведения функции $\Phi_2^+(s)$ при $s \rightarrow \infty, s \in D^+$ и теорем абелева типа.

2. Включение в случае несимметричного нагружения. Пусть к абсолютно жесткому включению ($0 \leq x \leq 1, y = \pm 0$) приложена в точке $x = 1/2, y = +0$ вертикальная сила P , горизонтальная сила T и момент M (фиг. 2). Верхний берег полностью сцеплен, а нижний отслоился, причем участок отслоения разбивается на три отрезка: две зоны



Фиг. 2

$(0, b_1)$ и (b_2, a) проскальзывания и одну (b_1, b_2) – зону отрыва:

$$\begin{aligned} u(x, +0) = 0, \quad v(x, +0) = \gamma x, \quad 0 < x < 1 \\ \sigma_y(x, -0) = 0, \quad b_1 < x < b_2; \quad \tau_{xy}(x, -0) = 0, \quad 0 < x < 1 \\ v(x, -0) = \gamma x, \quad 0 < x < b_1, \quad b_2 < x < a \end{aligned} \quad (2.1)$$

где γ – угол поворота включения.

На основе представлений (1.5) и граничных условий (2.1) приходим к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\kappa^+ \chi_1(x) - \kappa^- \Gamma \chi_2(x) - \Gamma \chi_4(x) = 0, \quad b_1 < x < b_2 \quad (2.2)$$

$$\kappa^- \Gamma \chi_1(x) + \kappa^+ \chi_2(x) - \Gamma \chi_3(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (2.3)$$

$$\kappa \Gamma \chi_2(x) - \kappa^+ \chi_3(x) - \kappa^- \Gamma \chi_4(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (2.4)$$

$$\kappa \Gamma \chi_1(x) + \kappa^- \Gamma \chi_3(x) - \kappa^+ \chi_4(x) = 4G\kappa^+ \gamma, \quad 0 < x < 1 \quad (2.5)$$

$$\Gamma \chi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\chi(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad \text{supp } \chi_4(x) \subset [b_1, b_2]$$

Решение системы должно удовлетворять следующим дополнительным условиям замкнутости разреза и равновесия включения:

$$\int_0^1 \chi_3(x) dx = 0, \quad \int_{b_1}^{b_2} \chi_4(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \chi_1(x) dx = P, \quad \int_0^1 \chi_2(x) dx = -T, \quad \int_0^1 \chi_1(x) x dx = M \quad (2.6)$$

Без ограничения общности считаем, что левая зона проскальзывания меньшая, т.е. $b_1 \ll b_2$. Точки b_1 и b_2 определяются в ходе решения задачи из условий гладкости

$$\chi_4(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow b_1 + 0; \quad \chi_4(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow b_2 - 0$$

Выразим из уравнения (2.5) $\Gamma \chi_1(x)$ и подставим в (2.3), а затем введем функции $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$:

$$\chi_2(x) = \varphi_2(x) - (\kappa^+ / \kappa) \varphi_3(x), \quad \chi_3(x) = -(\kappa / \kappa^+) \varphi_2(x) - \varphi_3(x) \quad (2.7)$$

Тогда уравнения (2.3) и (2.4) преобразуются к виду

$$(I + \Gamma) \varphi_2(x) + (2\kappa)^{-1} \kappa^- (I - \Gamma) \chi_4(x) = -\gamma_*, \quad 0 < x < 1$$

$$(I - \Gamma) \varphi_3(x) - (2\kappa^+)^{-1} \kappa^- (I + \Gamma) \chi_4(x) = (\kappa^+)^{-1} \kappa \gamma_*, \quad 0 < x < 1$$

$$\gamma_* = 2G(\kappa^- / \kappa) \gamma$$

где I – единичный оператор. Доопределяем последние два уравнения на значения $x > 1$ при помощи функций $\varphi_{2+}(x)$ и $\varphi_{3+}(x)$ соответственно и применяем преобразование Меллина; имеем

$$c_+(s) \Phi_2^-(s) + \kappa^- (2\kappa)^{-1} b_2^{s+1} c_-(s) \Phi_4^-(s) = -\gamma_* (s+1)^{-1} + \Phi_2^+(s) \quad (2.8)$$

$$c_-(s) \Phi_3^-(s) - \kappa^- (2\kappa^+)^{-1} b_2^{s+1} c_+(s) \Phi_4^-(s) = \kappa [\kappa^+ (s+1)]^{-1} \gamma_* + \Phi_3^+(s), \quad -\frac{1}{4} < \text{Re}(s) < 0$$

$$\Phi_m^-(s) = \int_0^1 \varphi_m(x) x^s dx, \quad \Phi_m^+(s) = \int_1^\infty \varphi_{m+}(x) x^s dx \quad (m = 2, 3)$$

$$\Phi_4^-(s) = \int_{b_1/b_2}^1 \chi_4(b_2 x) x^s dx, \quad c_\pm(s) = \text{ctg } \pi s \pm 1$$

Факторизуем функции $c_{\pm}(s)$ и построим решение задачи (2.8), не используя интегралы типа Коши и полагая функцию $\Phi_4^-(s)$ временно известной:

$$\Phi_2^+(s) = K_0^+(s)\Sigma_1(s) + \frac{\gamma_*}{s+1}, \quad \Phi_2^-(s) = \frac{\Sigma_1(s)}{K_0^-(s)} - \frac{\kappa^- b_2^{s+1} \Phi_4^-(s)}{2\kappa \operatorname{ctg} \pi(s - 1/4)} \quad (2.9)$$

$$\Phi_3^+(s) = K_1^+(s)\Sigma_2(s) - \frac{\kappa\gamma_*}{\kappa^+(s+1)}, \quad \Phi_3^-(s) = \frac{\Sigma_2(s)}{K_1^-(s)} + \frac{\kappa^- b_2^{s+1} \Phi_4^-(s)}{2\kappa^+ \operatorname{tg} \pi(s - 1/4)}$$

$$\Sigma_m(s) = C_m + \Psi_m^+(s) + \frac{(-1)^m \gamma_* e_m}{s+1}, \quad \Psi_m^+(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{mk}}{s-k+m/2-1/4} \quad (m=1,2)$$

$$K_n^+(s) = (-1)^{n-1} 2^{1/2} \Gamma(-s) [\Gamma(3/4 - n/2 - s)]^{-1}, \quad e_1 = [K_0^+(-1)]^{-1}$$

$$K_n^-(s) = \Gamma(1+s) [\Gamma(1/4 + n/2 + s)]^{-1} \quad (n=0,1); \quad e_2 = \kappa [\kappa^+ K_1^+(-1)]^{-1}$$

где A_{mk} — коэффициенты, подлежащие определению в дальнейшем из условий аналитичности функций $\Phi_2^-(s)$ и $\Phi_3^-(s)$ в точках $s = k - 1/4$ и $s = k - 3/4$ ($k = 1, 2, \dots$) соответственно; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Преобразуем теперь оставшиеся два уравнения (2.2) и (2.5) с учетом (2.7) к виду

$$\kappa^+ \chi_{1-}(x) - \kappa^- \Gamma_* \varphi_{2-}(x) + \kappa^+ \kappa^- / \kappa \Gamma_* \varphi_{3-}(x) - \Gamma_* \chi_{4-}(x) = \chi_{0-}(x) + \chi_{0+}(x)$$

$$\Gamma_* \chi_{1-}(x) - \kappa^- / \kappa^+ \Gamma_* \varphi_{2-}(x) - \kappa^- / \kappa \Gamma_* \varphi_{3-}(x) - \kappa^+ / \kappa \chi_{4-}(x) =$$

$$= 2(\kappa^+ / \kappa^-) \gamma_* \gamma_-(x) + \chi_{1+}(x)$$

$$0 < x < \infty$$

(2.10)

$$\operatorname{supp} \chi_{0-}(x) \subset [0, b_1], \quad \operatorname{supp} \chi_{0+}(x) \subset [b_2, \infty), \quad \operatorname{supp} \chi_{1+}(x) \subset [1, \infty)$$

$$\|\chi_{1-}(x), \varphi_{2-}(x), \varphi_{3-}(x), \gamma_-(x)\| = \begin{cases} \|\chi_1, \varphi_2, \varphi_3, 1\|, & 0 < x < 1 \\ \|\chi_0, 0, 0, 0\|, & x > 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_* \chi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\chi(\xi) d\xi}{\xi - x}$$

Обозначая через $\Phi_0^-(s)$, $\Phi_1^-(s)$, $\Phi_0^+(s)$ и $\Phi_1^+(s)$ преобразования Меллина с весом x^s функций $\chi_{0-}(b_1, x)$, $\chi_{1-}(x)$, $\chi_{0+}(b_2, x)$ и $\chi_{1+}(x)$ соответственно и принимая во внимание соотношения (2.9), сведем систему интегральных уравнений (2.10) к трем функциональным уравнениям

$$\Phi_1^-(s) - \kappa^- [\kappa^+ K_0^-(s)]^{-1} \Sigma_1(s) - \kappa^- [\kappa K_1^-(s)]^{-1} \Sigma_2(s) + b_2^{s+1} h(s) \Phi_4^-(s) = \\ = \operatorname{tg} \pi s \{ \Phi_1^+(s) + 2\kappa^+ \gamma_* [\kappa^-(s+1)]^{-1} \}$$

$$g(s) \Phi_4^-(s) + (b_1 / b_2)^{s+1} \Phi_0^-(s) = -\Phi_0^+(s) + b_2^{-s-1} \Omega(s) \quad (2.11)$$

$$\Phi_0^-(s) = -(b_1 / b_2)^{-s-1} [g(s) \Phi_4^-(s) + \Phi_0^+(s)] + b_1^{-s-1} \Omega(s)$$

$$\Omega(s) = \kappa^+ \operatorname{tg} \pi s \left[\Phi_1^+(s) + \frac{2\kappa^+ \gamma_*}{\kappa^-(s+1)} \right] - \frac{\kappa^- c_-(s)}{K_0^-(s)} \Sigma_1(s) + \frac{\kappa^+ \kappa^- c_+(s)}{\kappa K_1^-(s)} \Sigma_2(s)$$

$$h(s) = \frac{\kappa^-}{\kappa} \left(\frac{\kappa^-}{\kappa^+} \operatorname{tg} 2\pi s - \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \operatorname{tg} \pi s \right), \quad g(s) = \frac{2\kappa \cos 4\pi s + \kappa^2 + 1}{\kappa \sin 4\pi s}$$

Решение векторной задачи Римана (2.11) строится по схеме, предложенной ранее [1]. Ее решение определяется с точностью до произвольной постоянной C_3 . Постоянные C_1 , C_2 и C_3 находятся из первого, третьего и четвертого условий из (2.6). Из остальных двух условий получаем формулу для угла поворота включения $\gamma = (2G\kappa^-)^{-1} \kappa \gamma_*$:

$$\gamma_* = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\kappa^- \Gamma_1 A_{1k}}{\kappa^+ (k - 1/4)(k - 5/4)} + \frac{3\kappa^- \Gamma_0 A_{2k}}{\kappa (k - 3/4)(k - 7/4)} + \frac{2\pi^{1/2} A_{3k}}{(k - 1/2)(k - 3/2)} \right] - \right. \\ \left. -2P - (\kappa^- / \kappa^+) T + 4M \right\} 4\kappa^+ \kappa^- \pi^{-1} [2\kappa + (\kappa^+)^2]^{-1}, \quad \Gamma_1 = \Gamma(1/4), \quad \Gamma_0 = \Gamma(3/4)$$

и трансцендентное уравнение для определения точки b_2

$$C_1 \theta_{11}(1/4) + C_2 \theta_{21}(5/4) + \gamma_* [e_1 \zeta_{11}(1/4) - e_2 \zeta_{21}(5/4)] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\eta_{1k1} \left(\frac{7}{4} \right) A_{1k} - \eta_{2k1} \left(\frac{5}{4} \right) A_{2k} + \frac{A_{4k}}{k - 1/2} \right] + O \left\{ \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^{1/2} \right\} = 0, \quad b_1 \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

$$C_1 = \gamma_* e_1 - \frac{T}{2\Gamma_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{k - 1/4}, \quad C_2 = -\gamma_* e_2 + \frac{\kappa T}{2\kappa^+ \Gamma_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k}}{k - 3/4}$$

$$\| \eta_{mkn}, \theta_{mn}, \zeta_{mn} \| (t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_2^{j-9/4+m/2} h_{mj}}{n+j-t} \left\| \frac{1}{k+j-1}, 1, \frac{1}{j-9/4+m/2} \right\|$$

$$h_{1n} = -\frac{\kappa^- \Gamma(n - 3/4) |\Gamma(2n - 1 + i\beta)|^2}{\pi 2^{1/2} \Gamma(n) \Gamma(2n - 3/2) \Gamma(2n - 1)}, \quad h_{2n} = -\frac{\kappa^+ \kappa^- \Gamma(n - 1/4) |\Gamma(2n + i\beta)|^2}{\pi \kappa 2^{1/2} \Gamma(n) \Gamma(2n - 1/2) \Gamma(2n)}$$

где $\beta = (2\pi)^{-1} \ln \kappa$. Вследствие $b_1 \ll b_2$ (величина b_1 меньше, чем длина зоны проскальзывания, найденная в разд. 1 для симметричного случая) коэффициенты A_{mk} удовлетворяют следующей бесконечной системе:

$$A_{mn} = \alpha_{mn} b_2^{n-\lambda_m+7/4} \left\{ f_{mn} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[E_{1kn}(\lambda_m) A_{1k} + E_{2kn} \left(\lambda_m - \frac{1}{2} \right) A_{2k} + \right. \right. \\ \left. \left. + (n+k-\lambda_m+1/4)^{-1} A_{4k} \right] \right\} \quad (m=1, 2, 3)$$

$$A_{4n} = \kappa \alpha_{3n} b_2^{n-3/2} \left[f_{4n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-1/2) A_{3n}}{(n+k-1)(-k+1/2)} \right] \quad (n=1, 2, \dots)$$

где приняты обозначения

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3/2, \quad \lambda_3 = 5/4, \quad E_{jkn}(t) = -\eta_{jkn}(t) + (k - j/2 + 1/4)^{-1} \theta_{jn}(t)$$

$$f_{mn} = F_n(\lambda_m, \lambda_m - 1/2) \quad (m=1, 2, 3); \quad f_{4n} = \gamma_* e_3 (-n + 1/2)(n - 3/2)^{-1} - \pi^{-1/2} P$$

$$F_n(p, q) = 1/2 T[-\Gamma_1^{-1} \theta_{1n}(p) + (\kappa / \kappa^+) \Gamma_0^{-1} \theta_{2n}(q)] + \\ + \gamma_* \{ e_1 [\theta_{1n}(p) + \zeta_{1n}(p)] - e_2 [\theta_{2n}(q) + \zeta_{2n}(q)] \}$$

$$\alpha_{mn} = \frac{\Gamma(n + 1/4 - \lambda_m) |\Gamma(2n + 2 - 2\lambda_m + i\beta)|^2 \mu_m}{\pi \Gamma(n) \Gamma(2n + 2 - 2\lambda_m) \Gamma(2n + 5/2 - 2\lambda_m)}, \quad \mu_1 = -\frac{\kappa^-}{2\kappa}, \quad \mu_2 = -\frac{\kappa^-}{2\kappa^+}, \quad \mu_3 = \frac{\kappa^+}{\kappa}$$

Длина меньшей зоны проскальзывания отыскивается из условия гладкости профиля разреза в окрестности точки $x = b_1$. Учитывая малость величины b_1 при помощи

асимптотического анализа находим

$$b_1 = b_2 \exp \left\{ -\frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{2R_1 R_2}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{2\pi}{\beta} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

$$R = R_1 + iR_2 = \frac{1}{4^{2i\beta}} \left\{ F_1 \left(2 + \frac{i\beta}{2}, \frac{3}{2} + \frac{i\beta}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[E_{1k1} \left(2 + \frac{i\beta}{2} \right) A_{1k} + E_{2k1} \left(\frac{3}{2} + \frac{i\beta}{2} \right) A_{2k} + (k - \frac{3}{4} - i\beta/2)^{-1} A_{4k} \right] \right\}, \quad \operatorname{Im}\{R_1, R_2\} = 0$$

Как и в разд. 1, из всех длин $b_1 \ll b_2$ выбираем наибольшую, т.е. соответствующую случаю $m = 0$.

Решение задач (2.8), (2.11) при значениях величин b_1, b_2 , удовлетворяющих уравнению (2.12) и соотношению (2.13), порождает решение системы (2.2)–(2.5), обладающее свойствами

$$\chi_j(x) = O(x^{-3/4}), \quad x \rightarrow 0; \quad \chi_j(x) = O\{(1-x)^{-3/4}\}, \quad x \rightarrow 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\chi_4(x) = O\{(x - b_1)^{1/2}\}, \quad x \rightarrow b_1; \quad \chi_4(x) = O\{(b_2 - x)^{1/2}\}, \quad x \rightarrow b_2$$

Численные расчеты проводились при $\nu = 0,3$ и $T = 0$. Приведем значения $P^{-1}b_2$ ($1 - b_2$ – длина большей зоны проскальзывания) и $2G\gamma P^{-1}$ (γ – угол поворота включения) при $M = -Pe$ для некоторых значений эксцентриситета e (при $-1 \leq e < -1/2$ предполагается, что к включению приложена пара сил P и $-P$ с эксцентриситетом $e/2$)

e	-1	-0,8	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,1
$P^{-1}b_2$	0,835	0,848	0,865	0,876	0,890	0,906	0,954
$2GP^{-1}\gamma$	-3,17	-2,76	-2,35	-2,15	-1,95	-1,74	-1,33

Если же $P = 0$, то при изменении M меняется только величина угла поворота, а длины зон проскальзывания при фиксированном ν не меняются. Наибольшая длина правой зоны проскальзывания возникает при $\nu = 0$: $b_2 = 0,7289$. Для сравнения: при $\nu = 0,3$ имеем $b_2 = 0,7438$. Ниже представлены значения угла поворота включения при некоторых значениях момента M

M	-100	-10	-5	-2	-1	-0,5	-0,1
$2G\gamma$	-203	-20,3	-10,2	-4,07	-2,03	-1,02	-0,203

Как видно, угол поворота – линейная функция от момента (при $P = 0$).

Работа выполнена при поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS - 93 - 2600).

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипов Ю.А. Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 290–306.
2. Шерман Д.И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 330–334.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

4. *Черепанов Г.П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 131–137.
5. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
6. *England A.H.* A crack between dissimilar media // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 2. P. 400–402.
7. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. № 4. P. 631–636.
8. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.; Наука, 1993. 224 с.
9. *Моисеев Н.Г., Попов Г.Я.* Плоская задача о концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения // Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван: АН АрмССР, 1985. С. 304–319.

Одесса

Поступила в редакцию
20.IV.1995