УДК 539.3

© 1996 г. А.Н. Друзь, Н.А. Поляков, Ю.А. Устинов

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ И ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

Методом однородных решений исследуется трехмерная задача для естественно закрученного стержня. Строится группа элементарных решений, которая позволяет без привлечения каких-либо гипотез строгими математическими методами, как это было сделано [1] для призматических стержней, построить прикладную теорию естественно закрученного стержня. Показывается, что в общем случае (произвольная крутка, произвольное расположение центра тяжести сечения относительно винтовой оси) построение элементарных решений сводится к решению двух типов краевых задач на сечении, которые в свою очередь сводятся к вариационным задачам для неотрицательных операторов. Получена матрица жесткости, которая связывает компоненты главного вектора и главного момента внешних усилий с коэффициентами разложений по элементарным решениям (последние можно рассматривать как обобщенные перемещения). Дано обоснование принципа Сен-Венана.

В первых исследованиях задач Сен-Венана о растяжении, кручении и изгибе естественно закрученных стержней [2–5] наиболее полно были изучены задачи растяжения–кручения для малого безразмерного относительного угла закручивания.

На основе априорного предположения о структуре решения типа Сен-Венана трехмерная задача сведена [6] к системе восемнадцати уравнений, причем наиболее полно исследована только задача растяжения–кручения.

1. Обозначения и постановка краевой задачи. Для краткости естественно закрученный стержень будем называть псевдоцилиндром. Понятие "псевдоцилиндр" включает такие реальные объекты, как сверло, турбинная лопатка, цилиндрическая пружина. Область V, занятая псевдоцилиндром, получается в результате винтового движения плоской фигуры S вдоль оси x_3 неподвижной декартовой системы координат x_k. В качестве параметра возьмем относительный угол закручивания τ и будем считать его постоянным. Как и в [6], введем сопутствующую систему координат ξ_k, у которой направления осей ξ_α ($\alpha = 1, 2$) жестко связаны с S при ее движении. Радиус-вектор произвольной точки области V в сопутствующей системе координат запишем в виде

$$\mathbf{R} = \xi_k \mathbf{e}_k; \quad \varphi = \tau\xi$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 \cos\varphi + \mathbf{i}_2 \sin\varphi, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{i}_1 \sin\varphi + \mathbf{i}_2 \cos\varphi, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3$$

Здесь $\mathbf{i}_k$ – орты неподвижной системы координат, $\mathbf{e}_k$ – орты сопутствующей системы координат.

Другие обозначения: Γ – боковая поверхность, ∂S – граница S; N_k – проекция вектора внешней нормали к Γ, n_α – проекции внешней нормали к ∂S на оси, сопутствующей системе координат; ξ_α^0 – координаты точек ∂S. Латинские индексы, если не оговорено противное, принимают значения 1–3, греческие 1,2, ведется суммирование по повторяющимся индексам. Проекции N_k и n_α связаны соотношениями

$$N_\alpha = cn_\alpha, \quad N_3 = \tau b$$

$$c = (1+\tau^2 b)^{-1/2}, \quad b = \xi_\alpha^0 \xi_\alpha^{0\prime}, \quad \xi_\alpha^{0\prime} = d\xi_\alpha^0 / ds$$

Ниже будут использоваться гильбертовы пространства H_1 и H_2 трехкомпонентных комплекснозначных вектор-функций, определенных соответственно на S и ∂S со скалярными произведениями

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)_1 = \int_S \mathbf{a}_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 dS = \int_S a_{k1}\bar{a}_{k2} dS$$

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)_2 = \int_{\partial S} \mathbf{a}_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 ds = \int_{\partial S} a_{k1}\bar{a}_{k2} ds$$

а также пространство $H = H_1 \times H_2$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)_1 + (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)_2$$

Здесь и ниже $\mathbf{a}_k = \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}\}$, $\bar{a}_{kj}$ – комплексно сопряженные числа.

Будем считать, что боковая поверхность псевдоцилиндра Г свободна от напряжений. Уравнения равновесия и граничные условия на Г можно представить в следующем операторном виде:

$$\mathcal{L}(-i\partial)\mathbf{u} \equiv -\partial^2 C\mathbf{u} - i\partial B\mathbf{u} + A\mathbf{u} = \mu^{-1}\mathbf{K} \tag{1.1}$$

$$(E - i\partial G)\mathbf{u}|_\Gamma = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор смещений, A, B, C, E, G – матричные операторы со следующими элементами:

$$A_{11} = -2(1+\varkappa)\partial_1^2 - \partial_2^2 - \tau^2(D^2-1), \quad A_{12} = -(1+2\varkappa)\partial_1\partial_2 + 2\tau^2 D$$

$$A_{13} = -\tau(1+2\varkappa)\partial_1 D, \quad A_{21} = -(1+2\varkappa)\partial_1\partial_2 - 2\tau^2 D$$

$$A_{22} = -\partial_1^2 - 2(1+\varkappa)\partial_2^2 - \tau^2(D^2-1), \quad A_{23} = -\tau(1+2\varkappa)\partial_2 D$$

$$A_{31} = -\tau(1+2\varkappa)D\partial_1, \quad A_{32} = -\tau(1+2\varkappa)D\partial_2$$

$$A_{33} = -\partial_1^2 - \partial_2^2 - 2(1+\varkappa)\tau^2 D^2$$

$$B_{11} = B_{22} = -2i\tau D, \quad B_{12} = -B_{21} = 2i\tau$$

$$B_{13} = B_{31} = -i(1+2\varkappa)\partial_1, \quad B_{23} = B_{32} = -i(1+2\varkappa)\partial_2$$

$$B_{33} = -4i\tau(1+\varkappa)D$$

$$C_{11} = C_{22} = 1, \quad C_{33} = 2(1+\varkappa), \quad C_{kl} = 0, \quad k \neq l$$

$$E_{11} = 2(1+\varkappa)n_1\partial_1 + n_2\partial_2 + \tau^2 bD, \quad E_{12} = 2\varkappa n_1\partial_2 + n_2\partial_1 - \tau^2 b$$

$$E_{13} = 2\varkappa n_1\tau D + \tau b\partial_1, \quad E_{21} = n_1\partial_2 + 2\varkappa n_2\partial_1 + \tau^2 b$$

$$E_{22} = n_1\partial_1 + 2(1+\varkappa)n_2\partial_2 + \tau^2 bD, \quad E_{23} = 2\varkappa n_2\tau D + \tau b\partial_2$$

$$E_{31} = n_1\tau D + n_2\tau + 2\varkappa\tau b\partial_1, \quad E_{32} = -n_1\tau + n_2\tau D + 2\varkappa\tau b\partial_2$$

$$E_{33} = n_1\partial_1 + n_2\partial_2 + 2(1+\varkappa)\tau^2 bD$$

$$G_{11} = G_{22} = \tau b, \quad G_{12} = G_{21} = 0, \quad G_{13} = 2\varkappa n_1, \quad G_{23} = 2\varkappa n_2$$

$$G_{31}=n_1,\quad G_{32}=n_2,\quad G_{33}=(2+\varkappa)\tau b$$

$$\partial_\alpha=\partial/\partial\xi_\alpha,\quad \partial=\partial/\partial\xi,\quad D=\xi_2\partial_1-\xi_1\partial_2,\quad \varkappa=\frac{\nu}{1-2\nu}$$

$\mathbf{K}$ – вектор объемных сил, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Для окончательной постановки краевой задачи необходимо поставить условие при $\xi=0$ и $\xi=l$. К этому вопросу вернемся ниже.

2. Однородные решения. Положим в (1.1) $\mathbf{K}=0$ и решение будем отыскивать в виде

$$\mathbf{u}=e^{i\gamma\xi}\mathbf{a}(\xi_1,\xi_2) \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.1), получаем спектральную задачу на сечении

$$L(\gamma)\mathbf{a}=\{\mathcal{L}(\gamma)\mathbf{a},\, M(\gamma)\mathbf{a}|_{\partial S}\}=0 \tag{2.2}$$

Здесь ∂S – граница S.

Исследованию спектральных задач типа (2.2) посвящена обширная литература. Краткий обзор по данной проблеме, а также сопутствующим вопросам имеется в [7].

Напомним, что вектор-функция

$$\mathbf{u}_q(\xi)=e^{i\gamma_q\xi}\mathbf{a}_q \tag{2.3}$$

называется элементарным решением (ЭР), которое удовлетворяет однородному уравнению (1.1) и граничному условию (1.2), если γ_q – простое собственное значение, $\mathbf{a}_q$ – соответствующий ему собственный вектор.

Если γ_q – кратное собственное значение и ему соответствует жорданова цепочка $\mathbf{a}_{0q},\ldots,\mathbf{a}_{pq}$, где $\mathbf{a}_{0q}$ – собственный вектор, $\mathbf{a}_{lq}$ – присоединенные векторы ($l=1,2\ldots,p$), то в этом случае каждой жордановой цепочке соответствует целая группа элементарных решений вида

$$\mathbf{u}_{qn}(\xi)=\frac{(i\xi)^n}{n!}\mathbf{a}_{q0}+\frac{(i\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{a}_{q1}+\ldots+\mathbf{a}_{qn} \tag{2.4}$$

Общее количество таких ЭР равно алгебраической кратности собственного значения γ_q.

Присоединенные векторы определяются решением следующих краевых задач:

$$L(\gamma_q)\mathbf{a}_{qs}=\boldsymbol{\psi}_{qs}\qquad \boldsymbol{\psi}_{qs}=\{\mathbf{F}_{qs},\mathbf{f}_{qs}\} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{F}_{q1}=-\mathcal{L}'(\gamma_q)\mathbf{a}_{q0}$$

$$\mathbf{F}_{qs}=-\mathcal{L}'(\gamma_q)\mathbf{a}_{qs-1}-\frac{1}{2}\mathcal{L}''(\gamma_q)\mathbf{a}_{qs-2},\quad s=2,3,\ldots,p$$

$$\mathbf{f}_{qs}=-G\mathbf{a}_{qs}|_{\partial S},\quad s=1,2,\ldots,p$$

Поскольку каждая из задач (2.5) является "задачей на спектре", то для их разрешимости необходимо выполнение условий

$$\int_S \mathbf{F}_{qs}\cdot\bar{\mathbf{a}}_{q0}dS+\int_{\partial S}\mathbf{f}_{qs}\cdot\bar{\mathbf{a}}_{q0}ds=0 \tag{2.6}$$

Было показано [1], что классические решения Сен-Венана [8] являются линейными комбинациями двенадцати ЭР, соответствующих собственному значению $\gamma_0=0$. Аналогичный результат можно получить и для псевдоцилиндра.

Прежде всего заметим, что

$$\overset{1}{\mathbf{a}}_0 = \{0, 0, 1\}, \quad \overset{2}{\mathbf{a}}_0 = \{-\xi_2, \xi_1, 0\} \tag{2.7}$$

$$\overset{3}{\mathbf{a}}_0 = \{1, i, 0\}, \quad \overset{4}{\mathbf{a}}_0 = \{1, -i, 0\}$$

являются собственными векторами спектральной задачи (2.2). При этом $\overset{1}{\mathbf{a}}_0$, $\overset{2}{\mathbf{a}}_0$ соответствуют собственному значению $\gamma_0 = 0$, $\overset{3}{\mathbf{a}}_0$ – собственному значению $\gamma_1 = \tau$, $\overset{4}{\mathbf{a}}_0$ соответствует $\gamma_{-1} = -\tau$.

Этот результат получается из следующего представления для вектора, определяющего группу твердых смещений осевого сечения S:

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_1^0 - iu_2^0)e^{i\tau\xi} + \frac{i}{2}(u_1^0 + iu_2^0)e^{-i\tau\xi} - \omega\xi_2$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(u_2^0 - iu_1^0)e^{i\tau\xi} + \frac{i}{2}(u_1^0 + iu_2^0)e^{-i\tau\xi} + \omega\xi_1$$

$$u_3 = u_3^0$$

где $\overset{0}{u}_j$ – компоненты поступательного смещения, ω – малый поворот вокруг оси ξ.

Покажем, что каждому собственному вектору соответствует своя система присоединенных векторов.

Обратимся вначале к построению жордановой цепочки для собственного вектора $\overset{0}{\mathbf{a}}_j$ ($j = 1, 2$). Полагая в (2.5) $\gamma_q = 0$, $\mathbf{a}_{qs} = \overset{j}{\mathbf{a}}_1$, получаем следующие краевые задачи:

$$A\overset{j}{\mathbf{a}}_1 = 0, \quad G\overset{j}{\mathbf{a}}_1|_{\partial S} = \overset{j}{\mathbf{f}}_1 \tag{2.8}$$

$$\overset{1}{\mathbf{f}}_1 = \{2\varkappa in_1, 2\varkappa in_2, 2i(1+\varkappa)\tau b\}, \quad \overset{2}{\mathbf{f}}_1 = \{\tau ib\xi_2, -\tau ib\xi_1, ib\}$$

Легко проверяется, что для этих задач выполняются условия разрешимости (2.6). Задачи для $\overset{2}{\mathbf{a}}_1$, $\overset{2}{\mathbf{a}}_2$ неразрешимы, из чего следует, что собственные векторы $\overset{1}{\mathbf{a}}_0$, $\overset{2}{\mathbf{a}}_0$ имеют только по одному присоединенному вектору. Собственные векторы $\overset{3}{\mathbf{a}}_0$, $\overset{4}{\mathbf{a}}_0$ имеют по три присоединенных. При этом

$$\overset{3}{\mathbf{a}}_1 = \{0, 0, -i\zeta\}, \quad \overset{4}{\mathbf{a}}_1 = \{0, 0, -i\bar{\zeta}\} \tag{2.9}$$

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2$$

Для $\overset{3}{\mathbf{a}}_2$, $\overset{3}{\mathbf{a}}_3$, $\overset{4}{\mathbf{a}}_2$, $\overset{4}{\mathbf{a}}_3$ получаются краевые задачи типа (2.5), где вместо γ_q следует подставить τ и $-\tau$ соответственно. Заметим, что достаточно построить жорданову цепочку для τ, поскольку для $-\tau$

$$\overset{4}{\mathbf{a}}_j = (-1)^{j-1}\overset{3}{\bar{\mathbf{a}}}_j \tag{2.10}$$

Приведем выражения для векторов $\overset{3}{\mathbf{F}}_l$, $\overset{3}{\mathbf{f}}_l$ ($l = 2, 3$):

$$\overset{3}{\mathbf{F}}_2 = 2\varkappa\overset{3}{\mathbf{a}}_0, \quad \overset{3}{\mathbf{f}}_2 = \{-2\varkappa n_1\zeta, -2\varkappa n_2\zeta, -2(1+\varkappa)\tau b\zeta\}$$

$$\overset{3}{\mathbf{F}}_{13} = i[2\tau(D+i)a_{12}^3 - 2\tau a_{22}^3 + (1+2\varkappa)\partial_1 a_{32}^3]$$

$$\overset{3}{\mathbf{F}}_{23} = i[2\tau a_{12}^3 + 2\tau(D+i)a_{22}^3 + (1+2\varkappa)\partial_2 a_{32}^3]$$

$$\overset{3}{\mathbf{F}}_{33} = i[(1+2\varkappa)(\partial_1 a_{12}^3 + \partial_2 a_{23}^3) + 4\tau(1+\varkappa)(D+i)a_{32}^3 + 2(1+\varkappa)\zeta]$$

$$\mathbf{f}_{13}^3 = -i[2\varkappa n_1 a_{32}^3 + \tau b a_{12}^3]$$

$$\mathbf{f}_{23}^3 = -i[2\varkappa n_2 a_{32}^3 + \tau b a_{22}^3]$$

$$\mathbf{f}_{33}^3 = -i[n_1 a_{12}^3 + n_2 a_{22}^3 + 2\tau(1+\varkappa) b a_{32}^3]$$

Просто доказывается выполнение условия разрешимости [2.6] для $\overset{3}{\mathbf{a}}_2$, несколько сложнее для $\overset{3}{\mathbf{a}}_3$.

3. Вариационная постановка задач. Рассмотрим две краевые задачи

$$A\mathbf{a} = 0, \quad G\mathbf{a}|_{\partial S} = \mathbf{f} \tag{3.1}$$

$$L(\pm\tau)\mathbf{a}^{\pm} = \mathbf{F}^{\pm}, \quad M(\pm\tau)\mathbf{a}^{\pm}|_{\partial S} = \mathbf{g}^{\pm} \tag{3.2}$$

Задача (3.1) символизирует задачи (2.8), а задача (3.2) – краевые задачи для $\overset{j}{\mathbf{a}}_l$ ($j = 3, 4$; $l = 2, 3$).

Краевая задача (3.2) порождает в H неограниченный самосопряженный оператор A с двумерным ядром, определяемым векторами $\overset{1}{\mathbf{a}}_0$, $\overset{2}{\mathbf{a}}_0$, а краевая задача (3.2) порождает самосопряженные операторы $L(\pm\tau)$ с одномерным ядром, определяемым векторами $\overset{3}{\mathbf{a}}_0$, $\overset{4}{\mathbf{a}}_0$ соответственно.

Будем считать, что условия разрешимости (2.6) применительно к задачам (3.1), (3.2) выполнены. Тогда решения этих краевых задач могут быть представлены в виде ([9])

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_* + C_1 \mathbf{a}_0^1 + C_2 \mathbf{a}_0^2$$
$$\mathbf{a}^{\pm} = \mathbf{a}_*^{\pm} + C^{\pm}\mathbf{a}_0^{\pm}, \quad \mathbf{a}_0^{+} = \overset{3}{\mathbf{a}}_0, \quad \mathbf{a}_0^{-} = \overset{4}{\mathbf{a}}_0 \tag{3.3}$$

Здесь C_1, C_2, $C^{\pm}$ – произвольные постоянные.

Вектор $\mathbf{a}_*$ может быть определен решением вариационной задачи для квадратичного функционала.

$$\Phi(\mathbf{a}) = \Phi_0(\mathbf{a}) - 2\int\limits_{\partial S} f_k \bar{a}_k ds \tag{3.4}$$

$$\Phi_0(\mathbf{a}) = \int\limits_S [2\varkappa|\partial_\alpha a_\alpha + \tau D a_3|^2 + |\partial_1 a_3 + \tau(Da_1 - a_2)|^2 + |\partial_2 a_3 + \tau(a_1 + Da_2)|^2 +$$
$$+2(|\partial_1 a_1|^2 + |\partial_2 a_2|^2) + |\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1|^2 + 2\tau^2 |Da_3|] dS \tag{3.5}$$

На подпространстве H_*, элементы которого удовлетворяют условиям

$$(\mathbf{a}, \overset{j}{\mathbf{a}}_0)_1 = 0, \quad j = 1, 2$$

вектор $\mathbf{a}_*$ определяется единственным образом.

Векторы $\mathbf{a}_*^+, \mathbf{a}_*^-$ могут быть определены решением вариационных задач для функционалов

$$\Phi^{\pm}(\mathbf{a}^{\pm}) = \Phi_0^{\pm}(\mathbf{a}^{\pm}) - 2Re\int\limits_S F_k^{\pm}\bar{a}_k^{\pm} dS - 2Re\int\limits_{\partial S} f_k^{\pm}\bar{a}_k^{\pm} ds \tag{3.6}$$

Выражения для функционалов $\overset{\pm}{\Phi}_0$ получаются заменами D на $D \pm i$ в формуле (3.5) и являются положительно определенными на подпространствах $H^{\pm}$, элементы которых удовлетворяют условиям

$$(\mathbf{a}, \overset{\pm}{\mathbf{a}}_0)_1 = 0$$

Таким образом, учитывая свойство (2.9), построение элементарных решений Сен-Венана сведено фактически к двум типам вариационных задач.

4. Элементарные решения Сен-Венана. ЭР Сен-Венана будем называть подмножество ЭР, соответствующих собственным значениям $\gamma_0 = 0$, $\gamma_{\pm 1} = \pm\tau$. Из проведенного выше анализа следует, что это подмножество состоит из 12 ЭР, которые можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_0^1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_0^2, \quad \mathbf{u}_3(\xi) = \overline{\mathbf{u}}_4(\xi) = e^{i\tau\xi}\mathbf{a}_0^3 \\
&\mathbf{u}_6(\xi) = -\overline{\mathbf{u}}_5(\xi) = e^{-i\tau\xi}(i\xi\mathbf{a}_0^4 + \mathbf{a}_1^4) \\
&\boldsymbol{\sigma}_r = 0, \quad r = 1,2,\ldots,6 \\
&\mathbf{u}_7 = i\xi\mathbf{a}_0^1 + \mathbf{a}_1^1, \quad \mathbf{u}_8 = i\xi\mathbf{a}_0^2 + \mathbf{a}_2^2 \\
&\mathbf{u}_{10} = -\overline{\mathbf{u}}_9 = e^{-i\tau\xi}\left(-\frac{i\xi^3}{6}\mathbf{a}_0^4 - \frac{\xi^2}{2}\mathbf{a}_1^4 + i\xi\mathbf{a}_2^4 + \mathbf{a}_3^4\right) \\
&\mathbf{u}_{12} = -\overline{\mathbf{u}}_{11} = e^{-i\tau\xi}\left(-\frac{\xi^2}{2}\mathbf{a}_0^4 + i\xi\mathbf{a}_1^4 + \mathbf{a}_2^4\right) \\
&\boldsymbol{\sigma}_7 = \mathbf{b}_1^1, \quad \boldsymbol{\sigma}_8 = \mathbf{b}_1^2, \quad \boldsymbol{\sigma}_{10} = -\overline{\boldsymbol{\sigma}}_9 = e^{-i\tau\xi}(i\xi\mathbf{b}_2^4 + \mathbf{b}_3^4) \\
&\boldsymbol{\sigma}_{12} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{11} = e^{-i\tau\xi}\mathbf{b}_2^4
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\mu\boldsymbol{\sigma}_l$ – вектор напряжений в точках поперечного сечения S, векторы $\mathbf{b}_t^j$ определяются соотношениями

$$b_{\alpha t}^j = (\tau D + i\gamma)a_{1t}^j + (-1)^\alpha \tau a_{2t}^j + \partial_\alpha a_{3t}^j + i a_{\alpha t-1}^j$$

$$b_{3t}^j = 2\varkappa d_\alpha a_{\alpha t} + 2(1+\varkappa)(\tau D + ij)a_{3t}^j + 2i(1+\varkappa)a_{3t-1}^j$$

где $\gamma = 0$ для $j = 1, 2$, $\gamma = \tau$ для $j = 3$, $\gamma = -\tau$ для $j = 4$.

Было показано [1], как с помощью подобной системы строится решение классических задач Сен-Венана. Метод построения практически полностью переносится и на псевдоцилиндр.

Пусть на концах цилиндра заданы условия

$$\mathbf{u}(0) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}(l) = \boldsymbol{\sigma}_* \tag{4.2}$$

Решение Сен-Венана поставленной краевой задачи будем отыскивать в виде

$$\mathbf{u}_l = \sum_{q=1}^{6} C_q\mathbf{u}_q(\xi) + \sum_{q=7}^{12} C_q\mathbf{u}_q(\xi - l) \tag{4.3}$$

при этом

$$\boldsymbol{\sigma}_l = \sum_{q=7}^{12} C_q\boldsymbol{\sigma}_q(\xi - l)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{u}_q(0) = \mathbf{a}_q, \quad \boldsymbol{\sigma}_{6+q}(0) = \mathbf{b}_q, \quad q = 1,2,\ldots,6$$

На основании (4.1)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_0^j \quad (j = 1,2,3,4), \quad \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1^3, \quad \mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1^4 \\
&\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1^1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1^2, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_3^3, \quad \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_3^4, \quad \mathbf{b}_5 = \mathbf{b}_2^3, \quad \mathbf{b}_6 = \mathbf{b}_2^4
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Опираясь на известные свойства биортогональности [9], можно показать, что среди различных скалярных произведений

$$d_{qp} = (\mathbf{b}_q, \mathbf{a}_p)_1$$

отличными от нуля будут d_{qq}, d_{12}, d_{21}, причем

$$d_{11} = \int_S b_{31}^1 dS, \quad d_{12} = d_{21} = \int_S b_{31}^2 dS$$

$$d_{22} = \int_S (\xi_1 b_2^2 - \xi_2 b_1^2) dS$$

$$d_{33} = \ldots = d_{66} = d_* = i\int_S \bar{\zeta} b_{32}^3 dS$$

Подставляя выражение (4.3) во второе граничное условие (4.2), после последовательного умножения на a_q и интегрирования получаем следующие соотношения для определения $C_7, \ldots, C_{12}$

$$d_{11}C_7 + d_{12}C_8 = \mu^{-1}Q_3, \quad d_{12}C_7 + d_{22}C_8 = \mu^{-1}M_3 \tag{4.5}$$

$$C_9 = \overline{C}_{10} = \mu^{-1}d_*^{-1}(Q_1 - iQ_2), \quad C_{11} = -\overline{C}_{12} = \mu^{-1}d_*^{-1}i(M_1 + iM_2)$$

Здесь Q_k, M_k – компоненты главного вектора и главного момента внешних усилий $\boldsymbol{\sigma}_*$. Подчеркнем, что компоненты M_k вычисляются относительно осей сопутствующей системы координат при $\xi = l$.

Постоянные C_q (q = 1, 2,...6) могут быть определены следующим образом. Подставляя выражение (4.3) в первое граничное условие (4.2), после умножения на $\mathbf{b}_q$ и интегрирования получаем алгебраическую систему

$$\sum_{p=1}^{6} d_{qp}C_p = z_q \quad \left(z_q = -\left(\sum_{p=1}^{6} C_{6+p}\mathbf{u}_{6+p}(-l), \mathbf{b}_q \right)_1 \right) \tag{4.6}$$

При таком способе построения решения задач Сен-Венана постоянные $C_7, \ldots, C_{12}$, как и в случае призматического стержня, определяются точно ([1]) (независимо от пограничного слоя), что частично обосновывает принцип Сен-Венана для псевдоцилиндра (для полного его обоснования необходимо доказать (см. [10]), что спектральная задача (2.2) не имеет вещественных собственных значений, кроме 0, τ, $-\tau$).

Точные значения постоянных $C_1, \ldots, C_6$ в общем случае не могут быть определены без построения пограничного слоя, который определяется ЭР, соответствующим комплексным собственным значениям задачи (2.2). При малых значениях параметра $\varepsilon = dl^{-1}$, где d – некоторый характерный линейный размер S, можно обосновать асимптотический характер полученного результата. Однако доказательство этого факта, как и анализ конкретных задач, выходят за рамки данной работы.

5. Обоснование принципа Сен-Венана для псевдоцилиндра. Как следует [7] из теоремы о полноте системы элементарных решений однородной задачи (1.1), (1.2), вектор напряжений в сечении, соответствующий решению трехмерной задачи, можно представить в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_c + \sum_k [C_k^+ \boldsymbol{\sigma}_k^+(\xi) + C_k^- \boldsymbol{\sigma}_k^-(\xi - l)] \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k(\xi) = \mathbf{b}_k \exp(i\gamma_k \xi)$$

Исходя из (5.1), обоснование принципа Сен-Венана сводится к доказательству двух утверждений: 1) главные векторы и главные моменты $\boldsymbol{\sigma}_k^+$, $\boldsymbol{\sigma}_k^-$ равны нулю; 2) неравенства $\mathrm{Im}\gamma_k^+ > 0$, $\mathrm{Im}\gamma_k^- < 0$ являются строгими. Такая схема доказательства для обычного цилиндра реализована в [10].

Для доказательства первого утверждения рассмотрим пары векторов

$$\mathbf{V}_q = \{\mathbf{a}_q, \mathbf{b}_q\}, \quad \mathbf{V}_k^\pm = \{\mathbf{a}_k^\pm, \mathbf{b}_k^\pm\}$$

На основе свойств биортогональности ([9]), поскольку $\mathbf{b}_q = 0$, имеем

$$[\mathbf{V}_k^\pm, \mathbf{V}_q] = i[(\mathbf{a}_k^\pm, \mathbf{b}_q)_1 - (\mathbf{b}_k^\pm, \mathbf{a}_q)_1] = -i(\mathbf{b}_k^\pm, \mathbf{a}_q) = 0$$

Учитывая конкретный вид векторов (4.4), (2.7), (2.9), получаем доказательство первого утверждения.

Для доказательства второго утверждения умножим уравнение (2.2) на $\bar{\mathbf{a}}$. После интегрирования и элементарных преобразований получаем квадратное уравнение

$$g_0\gamma^2 + 2g_1\gamma + g_2 = 0 \tag{5.2}$$

Здесь

$$g_0 = c_1^2 + 2c_2^2 + 2c_3^2$$

$$g_1 = \mathrm{Im}[2(\mathring{\nabla}(\bullet)\mathbf{a}_0 + \tau D\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3)_\varkappa + (\mathring{\nabla}\mathbf{a}_3 + \tau\mathbf{a}_*, \mathbf{a}_0)_1 + 2\tau(D\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3)_1]$$

$$g_2 = 2f_1^2 + f_1^2 + 2f_3^2 + 2n_1^2 + n_2^2$$

$$c_1 = \|\mathbf{a}_0\|_1, \quad c_2 = \|\mathbf{a}_3\|_1, \quad c_3 = \|\mathbf{a}_3\|_\varkappa$$

$$f_1 = \|\mathring{\nabla}(\bullet)\mathbf{a}_0 + \tau D\mathbf{a}_3\|_\varkappa, \quad f_2 = \|\mathring{\nabla}\mathbf{a}_3 + \tau\mathbf{a}_*\|_1, \quad f_3 = \tau\|D\mathbf{a}_3\|_1$$

$$n_1^2 = \|\partial_1 a_1\|_1^2 + \|\partial_2 a_2\|_1^2, \quad n_2^2 = \|\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1\|_1^2$$

$$\mathbf{a}_0 = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{a}_* = (Da_1 - a_2)\mathbf{e}_1 + (Da_2 + a_1)\mathbf{e}_2$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\varkappa = \int_S \varkappa \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{b}} dS, \quad \mathring{\nabla} = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, можно доказать, что дискриминант уравнения (5.2) $\Delta = g_1^2 - g_0 g_2 \leqslant 0$. Можно показать также, что равенство $\Delta = 0$ имеет место только на собственном векторе $\overset{1}{\mathbf{a}}_0$ и векторах, которые являются лнейными комбинациями $\overset{2}{\mathbf{a}}_0$, $\overset{3}{\mathbf{a}}_0$, $\overset{4}{\mathbf{a}}_0$. Из последнего вытекает, что кроме $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \tau$, $\gamma_{-1} = -\tau$ других вещественных собственных значений не существует, и следовательно, из представления (5.1) вытекает оценка

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_c = O(\exp(-\alpha_1\theta))$$

$$(\alpha_1 = \mathrm{Im}\,\gamma_1^+ = -\mathrm{Im}\,\gamma_1^-, \quad \theta = \min(\xi, l - \xi))$$

обосновывающая принцип Сен-Венана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00159-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Друзь А.Н., Устинов Ю.А.* Тензор Грина для упругого цилиндра и приложение его к развитию теории Сен-Венана // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 102–110.
2. *Риз П.М.* Деформация естественно закрученных стержней // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23. № 1. С. 18–21.

3. *Лурье А.Н., Джанелидзе Г.Ю.* Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР. 1939. Т. 24. № 1. С. 23–26.
4. *Лурье А.Н., Джанелидзе Г.Ю.* Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР. 1939. Т. 24. № 3. С. 226–228.
5. *Лурье А.Н., Джанелидзе Г.Ю.* Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР. 1939. Т. 24. № 4. С. 325–326.
6. *Бердичевский В.Л., Старосельский Л.А.* Изгиб, растяжение и кручение естественно закрученных стержней // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 978–991.
7. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1993. 144 с.
8. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 с.
9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
10. *Устинов Ю.А.* К обоснованию принципа Сен-Венана / Изв. вузов Сев.-Кавказ. региона. 1994. С. 91–92.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
18.X.1994