

УДК 539.37

© 1996 г. В.П. Матвеевко, **И.Е. Трояновский**, Г.С. Цаплина**ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
В ВИДЕ РЯДОВ ПО СТЕПЕНЯМ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ВЯЗКОУПРУГОСТИ**

Предлагаются новые формы записи известных упругих задач, позволяющие получать алгоритмы для построения решений в виде рядов по степеням упругих постоянных. В частности, для однородного изотропного тела решения строятся в виде ряда по степеням параметра А.А. Ильюшина ω и объемного модуля, а для кусочно-однородного тела, состоящего из двух материалов, – в виде ряда по степеням ω_1 и ω_2 . Рассматриваются приложения полученных форм решения к задачам вязкоупругости.

Для решения линейных квазистатических задач вязкоупругости широко применяются метод Вольтерры и метод интегральных преобразований, использующий преобразование Лапласа (или Лапласа–Карсона) [1–5]. В каждом из них решение линейной вязкоупругой задачи строится исходя из решения соответствующей упругой задачи. В первом случае построение вязкоупругого решения сводится к замене упругих констант операторами Вольтерры и последующей расшифровке операторных соотношений. Во втором – требуется найти оригиналы по известным изображениям. В обоих методах переход от упругого решения к вязкоупругому зачастую сопряжен с серьезными вычислительными трудностями, связанными с расшифровкой операторных соотношений.

Один из возможных путей решения этой проблемы состоит в том, что решение соответствующей упругой задачи представляется в форме, удобной для последующей расшифровки. Первый пример такого рода принадлежит Вольтерре: для задачи о деформировании вязкоупругого шара при заданных на поверхности перемещениях им было построено решение в виде ряда по положительным степеням временного оператора [6]. Эффективный метод, позволивший устранить вычислительные трудности при переходе от изображений к оригиналам, предложен А.А. Ильюшиным [7]. Именно этот метод дал возможность построить приближенное решение широкого круга задач линейной термовязкоупругости.

Рассматриваемый ниже подход к решению задач вязкоупругости входит в группу перечисленных методов. При этом предлагаемые алгоритмы построения упругих решений, удобных для перехода к соответствующим задачам вязкоупругости, отличаются эффективностью численной реализации и возможностью построения решений новых вязкоупругих задач.

Рассмотрим метод на примере решения задачи линейной вязкоупругости для однородного тела из наследственно-упругого при деформациях сдвига и упругого при объемных деформациях материала. Пусть в соответствующей упругой задаче в качестве упругих постоянных используются параметр А.А. Ильюшина ω и объемный модуль K . Требуется построить упругое решение в перемещениях в виде ряда по целым степеням параметра А.А. Ильюшина для тела объема V , ограниченного поверхностью $\Sigma = \Sigma_p + \Sigma_u$. На тело действуют массовые силы f_i , на части Σ_p заданы поверхностные нагрузки P_i , на части Σ_u – перемещения Φ_i .

Компоненты u_i искомого вектора перемещений должны удовлетворять уравнениям

Ламе

$$\frac{3}{2} \nabla^2 u_i + \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{K\omega_0} \rho f_i - \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \left(\frac{3}{2} \nabla^2 u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (1)$$

и граничным условиям

$$\mathbf{x} \in \Sigma_u: \quad u_i = \Phi_i \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Sigma_p: \quad & \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{1}{\omega_0} - 1 \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \nu_j = \\ & = \frac{P_i}{K\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \nu_j \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ρ – плотность, ν_j – вектор нормали к поверхности, ω_0 – некоторое безразмерное число, δ_{ij} – символ Кронеккера, x_i – декартовы координаты. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

Уравнения (1)–(3) являются следствием тождественных преобразований уравнений классической постановки задачи теории упругости в перемещениях [8]. Решение поставленной задачи предлагается отыскивать в виде

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^n v_i^{(n)} \quad (4)$$

где $v_i^{(n)}$ – искомые, зависящие от координат функции.

Подставляя разложения (4) в соотношения (1)–(3) исходной задачи и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(\omega/\omega_0 - 1)$, приходим к рекуррентной последовательности краевых задач

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in V: \quad & \frac{3}{2} \nabla^2 v_i^{(0)} + \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 v_j^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{K\omega_0} \rho f_i \\ \mathbf{x} \in \Sigma_u: \quad & v_i^{(0)} = \Phi_i \\ \mathbf{x} \in \Sigma_p: \quad & \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{1}{\omega_0} - 1 \right) \frac{\partial v_k^{(0)}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \nu_j = \frac{P_i}{K\omega_0} \\ & \dots \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{x} \in V: \quad \frac{3}{2} \nabla^2 v_i^{(n)} + \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 v_j^{(n)}}{\partial x_i \partial x_j} = - \left(\frac{3}{2} \nabla^2 v_i^{(n-1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_j^{(n-1)}}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

$$\mathbf{x} \in \Sigma_u: \quad v_i^{(n)} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Sigma_p: \quad & \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial v_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(n)}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{1}{\omega_0} - 1 \right) \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \nu_j = \\ & = - \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial v_i^{(n-1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(n-1)}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial v_k^{(n-1)}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \nu_j \end{aligned}$$

Решения вида (4) могут быть построены с удержанием как положительных, так и

отрицательных степеней параметра ω . В самом деле, введем замену

$$\omega^N u_i = U_i \quad (6)$$

и умножим соотношения (1)–(3) на ω^N . Исходная задача примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in V: \quad & \frac{3}{2} \nabla^2 U_i + \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\omega^N}{K \omega_0} \rho f_i = - \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \left(\frac{3}{2} \nabla^2 U_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ \mathbf{x} \in \Sigma_u: \quad & U_i = \Phi_i \omega^N \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Sigma_p: \quad & \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{1}{\omega_0} - 1 \right) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \nu_j = \\ & = \frac{P_i \omega^N}{K \omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \nu_j \end{aligned}$$

Решение задачи (7) отыскивается в виде

$$U_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^n v_i^{(n)} \quad (8)$$

После разложения множителя ω^N по степеням $(\omega/\omega_0 - 1)$, подстановки (8) в (7) и приравнивания членов с одинаковыми степенями параметра ω , получим последовательность краевых задач, отличающихся от задач (5) лишь правыми частями в первых N приближениях.

Вернувшись к исходным переменным, имеем следующую форму решения:

$$u_i = \omega^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^n v_i^{(n)} \quad (9)$$

Для доказательства сходимости метода построения решения упругой задачи в виде (9) и его численной реализации эффективными вычислительными процедурами, в частности, методом конечных элементов (МКЭ), воспользуемся вариационной формулировкой. Краевой задаче (1)–(3) соответствует вариационное уравнение

$$\langle u, \delta u \rangle = \int_V \frac{\rho f_i}{K \omega_0} \delta u_i dV - \int_{\Sigma_p} \frac{P_i}{K \omega_0} \delta u_i d\Sigma = - \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \langle u, \delta u \rangle_1 \quad (10)$$

и граничные условия (2).

Здесь δu – возможные перемещения, удовлетворяющие нулевым граничным условиям на Σ_u , а также приняты обозначения

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \int_V \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{1}{\omega_0} - 1 \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \\ \langle u, v \rangle_1 &= \int_V \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \\ \langle u, v \rangle_2 &= \int_V \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (11)$$

Для выражений (11) выполняется следующее соотношение:

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_1 + \langle u, v \rangle_2$$

Решение вариационной задачи снова ищем в виде разложения (4). Для нахождения коэффициентов ряда имеем рекуррентную последовательность вариационных задач

$$\langle v^{(0)}, \delta u \rangle - \int_V \frac{\rho f_i}{K\omega_0} \delta u_i dV - \int_{\Sigma_p} \frac{P_i}{K\omega_0} \delta u_i d\Sigma = 0$$

...

$$\langle v^{(n)}, \delta u \rangle = - \langle v^{(n-1)}, \delta u \rangle_1 \tag{12}$$

Доказательство сходимости предлагаемой процедуры может быть выполнено следующим образом. В силу произвольности вариаций δu_i сначала положим $\delta u_i = v_i^{(n)} - v_i^{(n-1)}$, затем $\delta u_i = v_i^{(n)} + v_i^{(n-1)}$, и сложим результаты. После ряда тождественных преобразований и учета симметричности скалярных произведений (11) получим

$$\langle v^{(n)}, v^{(n)} \rangle - \langle v^{(n-1)}, v^{(n-1)} \rangle = - \langle v^{(n)} + v^{(n-1)}, v^{(n)} + v^{(n-1)} \rangle_1 - \langle v^{(n)}, v^{(n)} \rangle_2 - \langle v^{(n-1)}, v^{(n-1)} \rangle_2$$

Из положительной определенности скалярных квадратов следует отрицательность правой части последнего равенства. Таким образом, нормы коэффициентов ряда (4) убывают с ростом n , и, следовательно, ряд (4) сходится по норме $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ при выполнении условия

$$0 < \omega < 2\omega_0 \tag{13}$$

Рассмотрим предлагаемый метод применительно к задаче для кусочно-однородного тела, составленного из различных материалов, наследственно упругих при деформациях сдвига и упругих при объемных деформациях. Итак, имеются два вязкоупругих тела, занимающие объемы V_1 и V_2 и ограниченные поверхностями $\Sigma_1 = \Sigma_{p1} + \Sigma_{u1} + \Sigma_{12}$, $\Sigma_2 = \Sigma_{p2} + \Sigma_{u2} + \Sigma_{12}$. Тела контактируют по поверхности Σ_{12} . К первому из них приложены массовые силы f_{i1} , на части поверхности Σ_{p1} заданы поверхностные нагрузки P_{i1} , на поверхности Σ_{u1} — перемещения Φ_{i1} . Аналогичным воздействиям подвергается другое тело. На границе контакта выполняются условия непрерывности перемещений и напряжений, нормальных и касательных к контактной поверхности.

Решение соответствующей упругой задачи предлагается строить в виде

$$u_{i1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}} - 1 \right)^m \left(\frac{\omega_2}{\omega_{02}} - 1 \right)^n v_{i1}^{(m,n)} \tag{14}$$

$$u_{i2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}} - 1 \right)^m \left(\frac{\omega_2}{\omega_{02}} - 1 \right)^n v_{i2}^{(m,n)}$$

(индексы 1, 2 относятся соответственно к объемам V_1 и V_2).

По аналогии с рассмотренной выше задачей для отыскания коэффициентов $v_{ik}^{(m,n)}$ ($k = 1, 2$) рядов (14) может быть получена рекуррентная последовательность вариационных задач

$$\langle v^{(0,0)}, \delta u \rangle^1 + \langle v^{(0,0)}, \delta u \rangle^2 = \int_{V_1} \frac{\rho_1 f_{i1}}{K_1 K_2 \omega_{01} \omega_{02}} \delta u_i dV +$$

$$+ \int_{V_2} \frac{\rho_2 f_{i2}}{K_1 K_2 \omega_{01} \omega_{02}} \delta u_i dV + \int_{\Sigma_{p1}} \frac{P_{i1} \delta u_i}{K_1 K_2 \omega_{01} \omega_{02}} d\Sigma + \int_{\Sigma_{p2}} \frac{P_{i2} \delta u_i}{K_1 K_2 \omega_{01} \omega_{02}} d\Sigma$$

...

$$\langle v^{(m,n)}, \delta u \rangle^1 + \langle v^{(m,n)}, \delta u \rangle^2 = \langle v^{(m-1,n)}, \delta u \rangle_1^1 - \langle v^{(m,n-1)}, \delta u \rangle_1^2 \tag{15}$$

Здесь

$$\langle u, v \rangle^1 = \int_{V_1} \frac{1}{K_2 \omega_{02}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_{i1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j1}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{1}{\omega_{01}} - 1 \right) \frac{\partial u_{k1}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

$$\langle u, v \rangle_1^1 = \int_{V_1} \frac{1}{K_2 \omega_{02}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_{i1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j1}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u_{k1}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

$$\langle u, v \rangle_2^1 = \int_{V_1} \frac{1}{K_2 \omega_{01}} \frac{\partial u_{k1}}{\partial x_k} \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

$$\langle u, v \rangle^2 = \int_{V_2} \frac{1}{K_1 \omega_{01}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_{i2}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j2}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{1}{\omega_{02}} - 1 \right) \frac{\partial u_{k2}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

$$\langle u, v \rangle_1^2 = \int_{V_2} \frac{1}{K_1 \omega_{01}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_{i2}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j2}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u_{k2}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

$$\langle u, v \rangle_2^2 = \int_{V_2} \frac{1}{K_2 \omega_{01} \omega_{02}} \frac{\partial u_{k2}}{\partial x_k} \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

Используя рассмотренный ранее вариант доказательства сходимости, можно показать, что в данной задаче ряды (14) будут сходиться при выполнении условий

$$0 < \omega_1 < 2\omega_{01}, \quad 0 < \omega_2 < 2\omega_{02} \quad (16)$$

Для построения решений с удержанием положительных и отрицательных степеней ω_k используется следующая замена переменных:

$$U_{i1} = \omega_1^M \omega_2^N u_{i1}, \quad U_{i2} = \omega_1^M \omega_2^N u_{i2} \quad (17)$$

Затем уравнения (15) умножаются на $\omega_1^M \omega_2^N$, выполняется замена (17), множитель $\omega_1^M \omega_2^N$ раскладывается в ряд по степеням $(\omega_1/\omega_{01} - 1)(\omega_2/\omega_{01} - 1)$, и решение в новых переменных U_{ik} отыскивается в виде рядов (14). Рекуррентная последовательность задач относительно коэффициентов этих рядов будет отличаться от уравнений (15) лишь правыми частями в первых $M \times N$ приближениях. Вернувшись к исходным переменным, получаем решение в виде разложений по положительным и отрицательным степеням ω_k .

Построение решений задач теории упругости в виде ряда по степеням двух упругих постоянных также позволяет эффективно использовать метод Вольтерры в задачах линейной вязкоупругости для однородного тела, в котором наследственно-упругие свойства материала проявляются и при сдвиговых, и при объемных деформациях.

Для однородного тела при использовании в качестве упругих постоянных модуля сдвига G и объемного модуля K решение строится в виде

$$u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{G}{G_0} - 1 \right)^m \left(\frac{K}{K_0} - 1 \right)^n v_i^{(m,n)} \quad (18)$$

Рекуррентная последовательность вариационных задач для отыскания коэффициентов ряда (18) имеет вид

$$\langle v^{(0,0)}, \delta u \rangle = \int_V \frac{\rho f_i}{G_0 K_0} \delta u_i dV + \int_{\Sigma_p} \frac{P_i}{G_0 K_0} \delta u_i d\Sigma$$

$$\dots \quad (19)$$

$$\langle v^{(m,n)}, \delta u \rangle = -\langle v^{(m-1,n)}, \delta u \rangle_1 - \langle v^{(m,n-1)}, \delta u \rangle_2$$

Здесь

$$\langle u, v \rangle = \int_V \left[\frac{1}{K_0} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{G_0} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_V \frac{1}{K_0} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \quad (20)$$

$$\langle u, v \rangle_2 = \int_V \frac{1}{G_0} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

Решение в виде ряда (18) сходится при условиях

$$0 < G < 2G_0, \quad 0 < K < 2K_0 \quad (21)$$

Для построения решений с удержанием положительных и отрицательных степеней G и K используется замена переменных

$$U_i = G^M K^N u_i$$

Для численной реализации рассмотренного метода предлагается использовать МКЭ. В связи с этим необходимо сделать одно важное замечание: полученные рекуррентные последовательности задач для нахождения решений в виде рядов по степеням упругих постоянных имеют одинаковые выражения для левых частей уравнений и, следовательно, алгебраические аналоги, к которым они сводятся при использовании МКЭ, также отличаются только правыми частями. Практические приложения метода показали, что машинное время, затрачиваемое на построение решения каждой отдельной последующей задачи из общей рекуррентной последовательности, в 15–20 раз меньше, чем затраты на построение решения первой задачи из рассматриваемой последовательности. Это обстоятельство выделяет предлагаемые алгоритмы как наиболее эффективные при численной реализации на ЭВМ среди других методов решения задач теории вязкоупругости на основе метода Вольтерры и метода последовательных преобразований.

Пример 1. Рассмотрим короткий полый цилиндр, занимающий в цилиндрической системе координат область $a \leq r \leq b$, $0 \leq z \leq 2L$. Внешняя поверхность $r = b$ неподвижна, внутренняя поверхность $r = a$ и торцы $z = 0$, $z = 2L$ свободны от напряжений. На цилиндр действуют осевые массовые силы. Определялось упругое осесимметричное поле перемещений.

Вначале МКЭ решаем задачу об упругом цилиндре при $a/b = 0,4$; $2L/b = 1$; $\omega = 0,069$. Это решение принимаем за тестовое.

Затем рассматриваем вариационную задачу (12), решение которой строим в виде ряда (9). Численная реализация осуществляется МКЭ. При этом тип элементов и степень дискретизации берутся аналогичными тестовому варианту.

Количество членов ряда (9) выбирается из условий, что величина

$$\varepsilon = \max_V \frac{|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}|}{|\mathbf{u}^{(n)}|}$$

становится меньше наперед заданного малого значения ε_* .

Расчеты показали, что повышение точности в 10 раз вызывает увеличение числа членов ряда не более чем в 2 раза. О характере зависимости числа членов от ω_0 и от N при заданной точности $\varepsilon_* = 0,01$ дает представление табл. 1 (над чертой – число итераций, под чертой – величина относительной погрешности ε в процентах).

Решение, полученное в виде ряда (9), сравнивалось с тестовым решением во всех узло-

Таблица 1

ω_0	$N=0$	1	2	3
0,04	$\frac{18}{0,22}$	$\frac{6}{0,23}$	$\frac{5}{0,02}$	$\frac{5}{0,0}$
0,143	$\frac{7}{0,95}$	$\frac{5}{0,11}$	$\frac{5}{0,02}$	$\frac{6}{0,02}$
0,02	$\frac{10}{1,34}$	$\frac{6}{0,21}$	$\frac{7}{0,02}$	$\frac{8}{0,02}$
0,05	$\frac{20}{4,84}$	$\frac{11}{0,55}$	$\frac{12}{0,15}$	$\frac{14}{0,12}$

Таблица 2

Параметр	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
A_1	3,0	0,3	0,4	0,04	3,0	0,3	0,4	0,04
A_2	4,0	0,4	4,0	0,4	4,0	0,4	4,0	0,4
β_1	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4
β_2	0,4	0,4	0,4	0,4	4,0	4,0	4,0	4,0

вых точках рассчитываемой области. Зависимость относительной погрешности решения от ω_0 и от N приведена в табл. 1. При этом число ω_0 удовлетворяет условию (13). Просчитан вариант, когда условие (13) не выполняется ($\omega_0 = 0,02$). В этом случае ряд (9) оказался расходящимся.

Пример 2. Рассмотрим модельную задачу о напряженно-деформированном состоянии двухслойного вязкоупругого цилиндра, имеющего размеры $\alpha = a/b = 0,3$, $\beta = c/b = 1,1$, $\gamma = 2L/b = 2$, где a – внутренний радиус, b – радиус поверхности контакта, c – наружный радиус, $2L$ – длина цилиндра. На внутреннюю поверхность цилиндра действует постоянное давление P , внешняя и торцевые поверхности считаются свободными от напряжений. Материалы слоев имеют различные механические характеристики, наследственно-упругие при сдвиге и упругие – при объемных деформациях. Индекс $k = 1$ присвоен внутреннему слою, $k = 2$ – наружному слою.

На основе предлагаемого метода построено решение соответствующей упругой задачи с удержанием положительных и отрицательных степеней параметра А.А. Ильюшина ω_k . С учетом вида этого решения и в соответствии с методом Вольтерры вязкоупругое решение записывается следующим образом:

$$u_k(x, t) = \tilde{\omega}_1^{-M} \tilde{\omega}_2^{-N} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_{01}} - 1 \right)^m \left(\frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_{02}} - 1 \right)^n v_k^{(m,n)}(x) g(t) \quad (22)$$

где $g(t)$ – функция времени, пропорционально которой изменяются все внешние воздействия.

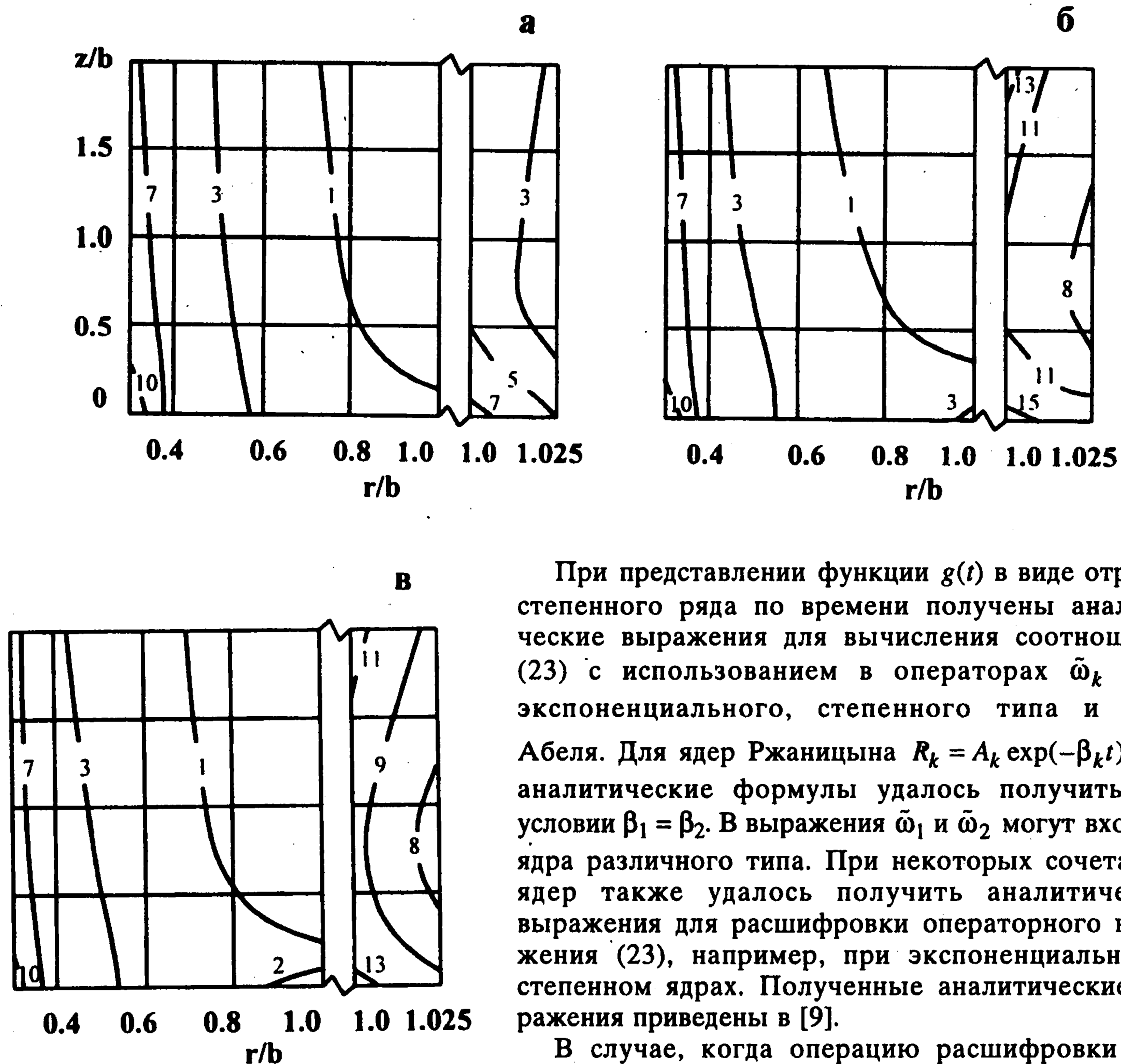
Вычисление соотношений (22) сводится к расшифровке произведения операторов следующей структуры:

$$I_{m,n} = \tilde{\omega}_1^{-M} \tilde{\omega}_2^{-N} \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_{01}} - 1 \right)^m \left(\frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_{02}} - 1 \right)^n g(t) \quad (23)$$

где $\tilde{\omega}_k$ – интегральные операторы Вольтерры

$$\tilde{\omega}_k(g) = \omega_k \left[g(t) - \int_0^t R_k(t-\tau) g(\tau) d\tau \right]$$

с ядрами релаксации $R_k(t)$.



Фиг. 1

При представлении функции $g(t)$ в виде отрезка степенного ряда по времени получены аналитические выражения для вычисления соотношений (23) с использованием в операторах $\bar{\omega}_k$ ядер экспоненциального, степенного типа и типа Абеля. Для ядер Ржаницына $R_k = A_k \exp(-\beta_k t) t^{\alpha_k - 1}$ аналитические формулы удалось получить при условии $\beta_1 = \beta_2$. В выражения $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ могут входить ядра различного типа. При некоторых сочетаниях ядер также удалось получить аналитические выражения для расшифровки операторного выражения (23), например, при экспоненциальном и степенном ядрах. Полученные аналитические выражения приведены в [9].

В случае, когда операцию расшифровки операторных соотношений (23) не удастся осуществить аналитически, можно воспользоваться методом квазиконстантных операторов [10]. Была изложена [11] методика использования этого подхода для предлагаемого метода и показано, что он обеспечивает удовлетворительную точность.

В рассматриваемом примере использовались ядра релаксации экспоненциального типа

$$R_k(t) = A_k \exp(-\beta_k t)$$

Расчеты проводились при мгновенных значениях параметров А.А. Ильюшина $\omega_1 = 0,222$, $\omega_2 = 0,30778$ и объемных модулей $K_1/G_1 = 3$, $K_2/G_1 = 216,7$ (G_1 – мгновенный модуль сдвига внутреннего слоя цилиндра). Варианты рассмотренных значений постоянных A_k и β_k ядер $R_k(t)$ приведены в табл. 2. Их величины выбирались из следующих модельных представлений. При $A_k = 3$ и $\beta_k = 4$ отношение мгновенного значения параметра А.А. Ильюшина ω_k к его длительному значению ω_k^∞ равнялось четырем, а отношение

$$\kappa = \left[\int_0^t R_k(t-\tau) d\tau - \int_0^\infty R_k(t-\tau) d\tau \right] \left[\int_0^\infty R_k(t-\tau) d\tau \right]^{-1}$$

становилось меньше 3% при времени $t = 1$, т.е. считалось, что к этому моменту в материале практически закончились реологические процессы. Материал с этими параметрами получил название материала с ярко выраженными реологическими свойствами (РС), быстро проявляющимися во времени.

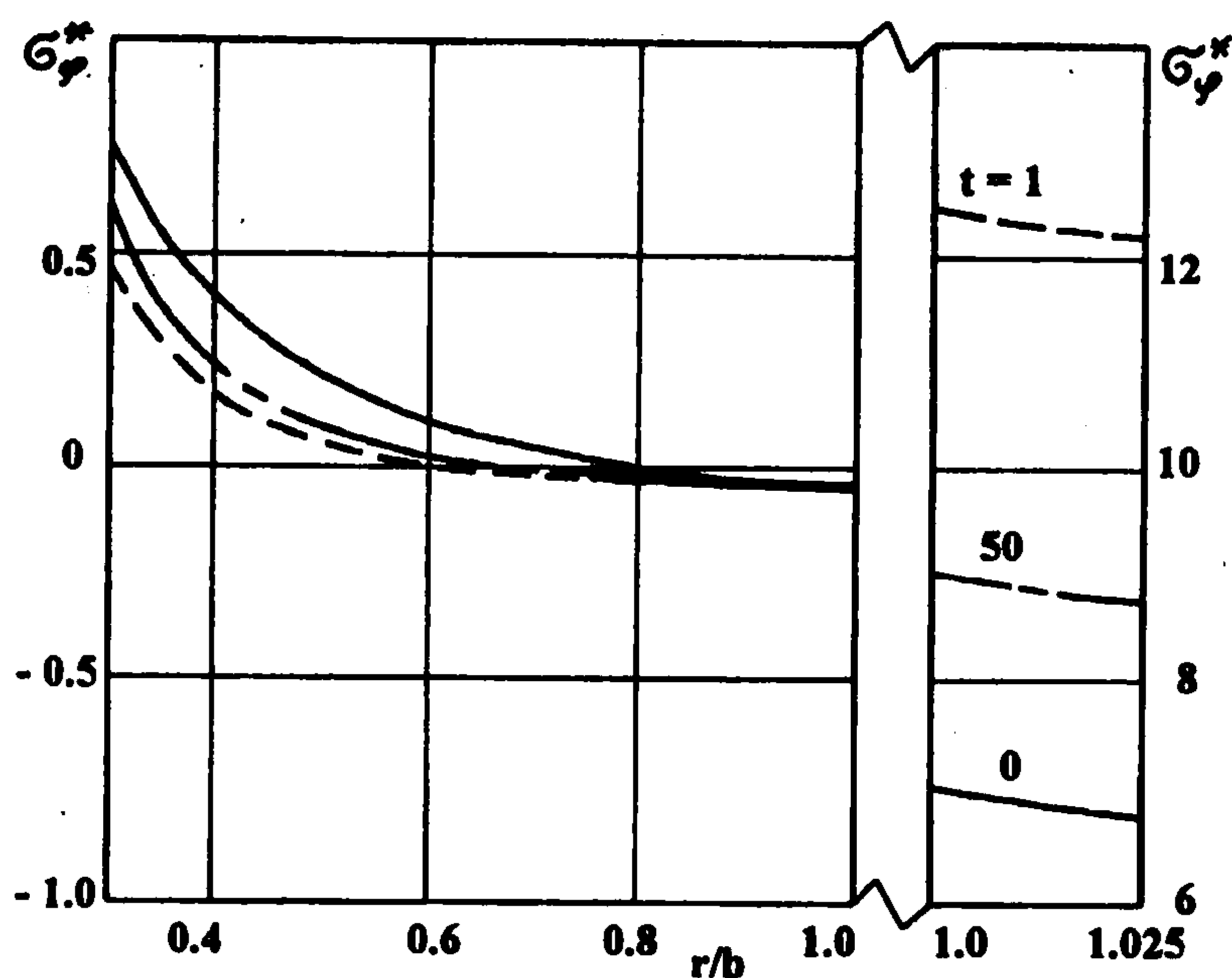
При $A_k = 0,3$ и $\beta_k = 0,4$ отношение $\omega_k / \omega_k^\infty$ оставалось неизменным, а величина κ дости-

гала значения 3% к моменту времени $t = 10$. Соответствующий этим параметрам материал был назван материалом с ярко выраженными РС, медленно проявляющимися во времени. Параметры $A_k = 0,4$ и $\beta_k = 4$ определяют среду со слабо выраженными РС ($\omega_k / \omega_k^\infty = 1,11$), быстро проявляющимися во времени, а $A_k = 0,04$ и $\beta_k = 0,4$ – среду со слабо выраженными РС, медленно проявляющимися во времени.

Анализ полученных результатов позволил выявить особенности изменения напряжений во времени в составном вязкоупругом цилиндре. Наиболее интересным оказался случай, когда один из слоев выполнен из материала с ярко выраженными РС, быстро проявляющимися во времени (в рассматриваемом варианте это внутренний слой), а второй слой – из материала с такими же характеристиками, но медленно проявляющимися во времени.

Этому варианту параметров соответствуют линии равного уровня интенсивности касательных напряжений $\sigma^* = \sigma / P$, приведенные на фиг. 1 для нижней половины цилиндра в моменты времени $t = 0$ (а), $t = 1$ (б) и $t = 50$ (в). Цена деления в пределах слоя постоянна.

В первом слое первому уровню соответствует значение $\sigma^* = 0,12$, десятому уровню – $\sigma^* = 0,83$. Во втором слое на первом уровне $\sigma^* = 1,04$, на пятнадцатом уровне – $\sigma^* = 2,56$. Из сравнения фиг. 1, а–в видно, что при постоянной во времени внешней нагрузке изменение напряжений на некоторых участках исследуемой области имеет немонотонный во времени характер. С уменьшением толщины внешнего слоя этот механический эффект проявляется ярче. Об этом свидетельствует фиг. 2, где показано распределение напряжений $\sigma_\varphi^* = \sigma_\varphi / P$ по толщине цилиндра в разные моменты времени.



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volterra V.* Lecons sur les fonctions de lignes. Paris: Ganthier-Villard, 1913. 230 p.
2. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
3. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
5. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
7. *Ильюшин А.А.* Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости // *Механика полимеров.* 1968. № 2. С. 210–221.
8. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
9. *Цапина Г.С.* Вычисление степенных функций операторов Вольтерра в задачах для неоднородных вязкоупругих сред // *Напряжения и деформации в конструкциях и материалах.* Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 59–63.
10. *Малый В.И.* Квазиконстантные операторы в теории вязкоупругости нестареющих материалов // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1980. № 1. С. 77–86.
11. *Цапина Г.С.* Расшифровка операторных соотношений вязкоупругости с использованием квазиконстантности операторов // *Численное моделирование статического и динамического деформирования конструкций.* Свердловск: УрО АН СССР, 1990. С. 55–59.