

УДК 539.3

© 1996 г. Ю.Д. Каплунов, Е.В. Нольде

О РОЛИ ПОПЕРЕЧНОГО ОБЖАТИЯ В ДИНАМИКЕ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается упругая тонкая оболочка при действии поперечной поверхностной нагрузки. Производится асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений теории упругости. Определяется область параметров задачи, при которых даже в самом грубом приближении нельзя пренебрегать влиянием поперечного обжатия.

Асимптотический анализ трехмерной статической задачи теории упругости для случая тонкой оболочки позволяет заключить [1], что поперечное обжатие является второстепенным фактором. Однако этот вывод не всегда может быть распространен на динамический случай. Так например, исследование рассеяния плоской акустической волны сферической и цилиндрической оболочками показывает [2, 3], что пренебрежение поперечным обжатием оболочки акустической средой кардинально искажает вид резонансов парциальных мод, отвечающих мембранной волне (нулевой симметричной волне типа Лэмба). Для более полного понимания явлений, подобных наблюдаемым в [2, 3], в предлагаемой статье предпринимается попытка асимптотического анализа трехмерной динамической задачи теории упругости для случая оболочки общего очертания с загруженными лицевыми поверхностями. Аналогичная задача для оболочки со свободными лицевыми поверхностями рассмотрена ранее [4].

1. Постановка задачи. Уравнения движения оболочки как трехмерного упругого тела возьмем в виде [1, 4]

$$L_i + \frac{1}{R\eta} a_i^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_i^2 \tau_{i3}) - \rho \left(\frac{c_s \eta^{-a}}{R} \right)^2 a_i a_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial \tau^2} = 0$$

$$-L + F + \frac{1}{R\eta} \frac{\partial \tau_3}{\partial \zeta} - \rho \left(\frac{c_s \eta^{-a}}{R} \right)^2 a_1 a_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} = 0$$

$$E a_j e_i = a_i \tau_i - \nu a_j \tau_j - \nu \tau_3$$

(1.1)

$$\frac{E}{R\eta} a_1 a_2 \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} = \tau_3 - \nu a_1 \tau_1 - \nu a_2 \tau_2$$

$$\frac{E}{R\eta} a_i a_j \frac{\partial v_i}{\partial \zeta} + E a_j g_i = 2(1+\nu) a_i \tau_{i3}$$

$$E a_i m_i + E a_j m_j = 2(1+\nu) a_j \tau_{ij} \quad (i \neq j = 1, 2)$$

Здесь

$$L_i = \frac{\eta^{-q}}{R} \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \xi_j} + \eta^q k_j^* (\tau_i - \tau_j) + \eta^q k_i^* (\tau_{ij} + \tau_{ji}) \right]$$

$$L = \frac{1}{R} \left(\frac{\tau_1}{R_1^*} + \frac{\tau_2}{R_2^*} \right)$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\eta^{-q}}{R} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \xi_2} + \eta^q k_2^* \tau_{13} + \eta^q k_1^* \tau_{23} \right) \\
e_i &= \frac{\eta^{-q}}{R} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} + \eta^q k_i^* v_j + \eta^q \frac{v_3}{R_i^*} \right) \\
m_i &= \frac{\eta^{-q}}{R} \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} - \eta^q k_j^* v_j \right)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$g_i = \frac{\eta^{-q}}{R} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial v_3}{\partial \xi_i} - \eta^q \frac{v_i}{R_i^*} \right)$$

$$\xi_{i0} = \eta^q \xi_i, \quad R_i^* = R_i / R, \quad c_s = \sqrt{E/\rho}, \quad \eta = h/R$$

$$\tau_i = a_j \sigma_{ii}, \quad \tau_{ij} = a_i \sigma_{ij}, \quad \tau_{i3} = \tau_{3i} = a_j \sigma_{i3}, \quad \tau_3 = a_1 a_2 \sigma_{33}$$

$$a_i = 1 + \frac{\eta}{R_i^*} \zeta, \quad k_i^* = R k_i = \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}}$$

где σ_{kl} ($k, l = 1, 2, 3$) – трехмерные напряжения, v_m ($m = 1, 2, 3$) – трехмерные перемещения, h – полутолщина оболочки, R – характерный радиус кривизны ее срединной поверхности, A_i, R_i – коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности, k_i – геодезические кривизны координатных линий срединной поверхности, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, q – показатель изменчивости, a – показатель динамичности.

Безразмерные переменные ξ_i, ζ, τ связаны со своими размерными аналогами α_k, t (α_i – параметры линий кривизны на срединной поверхности, α_3 – расстояние, отсчитываемое по нормали от срединной поверхности, t – время) следующими масштабными соотношениями

$$\alpha_i = R \eta^q \xi_i, \quad \alpha_3 = R \eta \zeta, \quad t = R c_s^{-1} \eta^a \tau \tag{1.3}$$

Считается, что относительная полутолщина оболочки η мала, а дифференцирование по безразмерным переменным не меняет асимптотического порядка искомых величин. Кроме того, на показатели изменчивости и динамичности накладываются неравенства, обычные для двумерной теории оболочек [4]

$$q < 1, \quad a < 1 \tag{1.4}$$

Рассматривается случай, когда показатели изменчивости и динамичности связаны формулой

$$q = a \tag{1.5}$$

а к лицевым поверхностям оболочки $\zeta = \pm 1$ ($\alpha_3 = \pm h$) приложены нормальные напряжения $\mp q_3^\pm$, т.е.

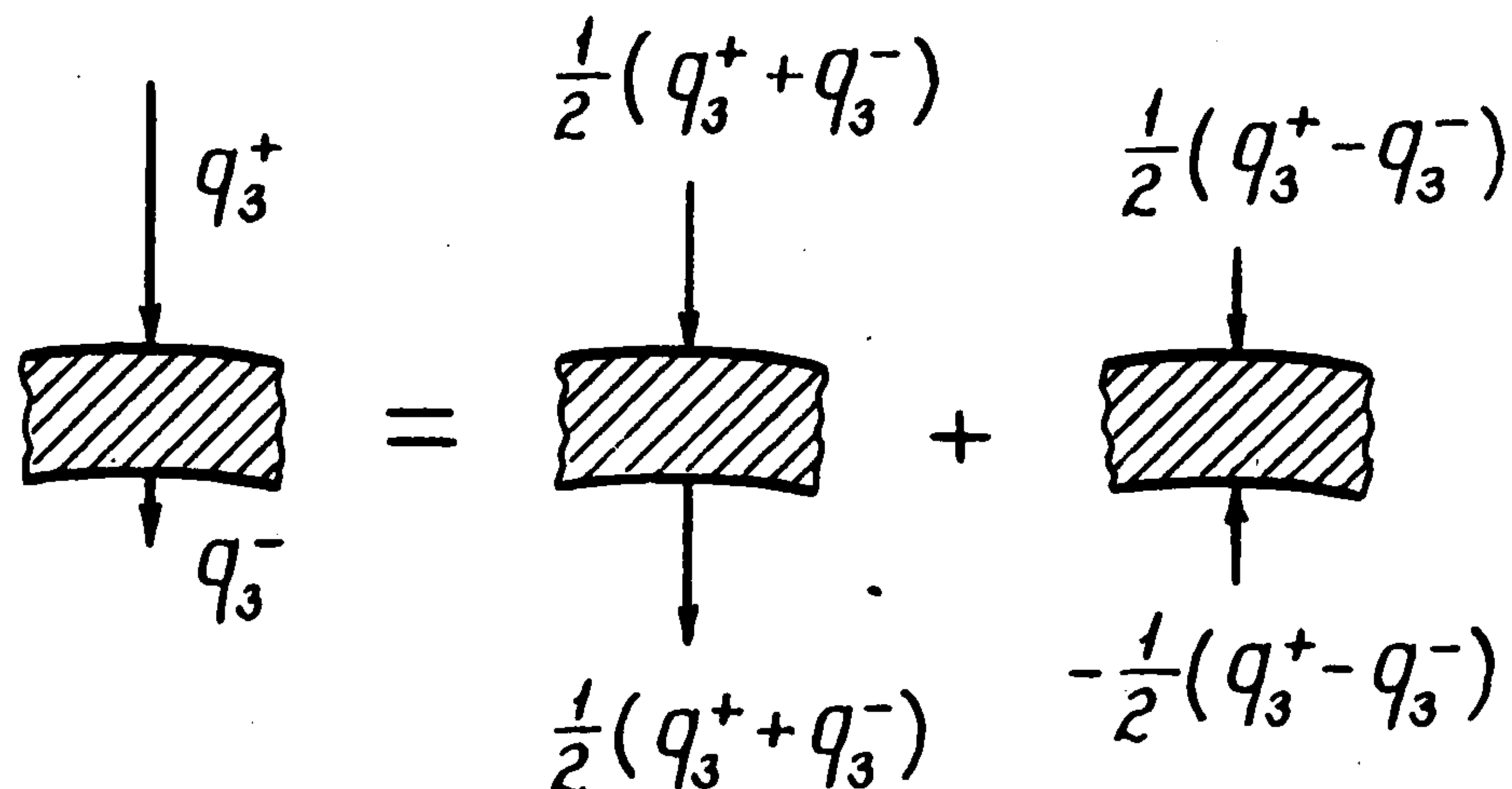
$$\tau_{3i} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad \frac{\tau_3}{a_1 a_2} \Big|_{\zeta=\pm 1} = \mp q_3^\pm \tag{1.6}$$

Будем для определенности считать, что величины $|q_3^+ - q_3^-|$ и $|q_3^+ + q_3^-|$ соизмеримы. Последнее условие соответствует весьма общей ситуации, к которой, в частности, относится случай нагружения оболочки по одной из лицевых поверхностей.

При отсутствии нагрузки на лицевых поверхностях равенство (1.5) соответствует

при $q = 0$ безмоментным колебаниям ($v_i \sim v_3$), а при $q > 0$ – тангенциальным (или плоскостным) колебаниям ($v_i \gg v_3$) [4]. При нагруженных лицевых поверхностях это равенство означает, что рассматриваются вынужденные колебания, при которых соотношение между частотой и длиной волны такое же, как при свободных колебаниях.

В случае действия поперечной нагрузки существует два разных механизма возбуждения колебаний, определяемых условием (1.5): за счет всестороннего сжатия и за счет поперечного обжатия оболочки нагрузкой. В символической записи (фигура)



первое слагаемое в правой части соответствует сжатию, а второе – поперечному обжатию. Априори можно ожидать, что при достаточно низких частотах, когда напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки близко к статическому безмоментному [1], влияние обжатия будет пренебрежимо малым. При увеличении частоты, когда длина волны деформации станет намного меньше, чем характерный линейный размер оболочки, роль кривизны срединной поверхности становится второстепенной и оболочка в известном смысле вырождается в пластину. При таких частотах пренебрежимо малым уже становится влияние сжатия. Действительно, в пластине в случае действия поперечной нагрузки колебания, отвечающие условию (1.5), (колебания пластины в своей плоскости) возбуждаются лишь за счет обжатия (см., например, [5]).

Очевидно, что результат действия сжатия и обжатия может оказаться противоположным. Так в примере, представленном на фигуре, сжатие ведет к сокращению срединной поверхности оболочки, а обжатие, наоборот, к ее увеличению. Далее показывается, что при $q = a < 1/2$ преобладает сжатие, при $q = a > 1/2$ – обжатие, а при $q = a = 1/2$ они могут компенсировать друг друга.

2. Асимптотическое интегрирование. Асимптотику НДС оболочки примем в виде

$$\begin{aligned} v_i &= R(\eta^{q-b} v_i^e + \eta^q v_i^o), \quad v_3 = R(\eta^{1-b} v_3^o + \eta^{2q-1} v_3^e) \\ \tau_i &= E(\eta^{-b} \tau_i^e + \tau_i^o), \quad \tau_{ij} = E(\eta^{-b} \tau_{ij}^e + \tau_{ij}^o) \\ \tau_{i3} &= E(\eta^{3-3q-b} \tau_{i3}^o + \eta^{1-q} \tau_{i3}^e), \quad \tau_3 = E(\tau_3^e + \tau_3^o) \quad (i \neq j = 1, 2) \\ b &= 1 - 2q \quad (q \leq 1/2), \quad b = 0 \quad (q \geq 1/2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

В соотношениях (2.1) считается, что величины с верхним индексом e и o имеют одинаковый асимптотический порядок, причем величины с индексом e являются четными, а величины с индексом o нечетными функциями переменной ζ . При этом совокупности величин $S^s = \{v_i^e, v_3^o, \tau_i^e, \tau_{ij}^e, \tau_{i3}^o, \tau_3^e\}$ и $S^a = \{v_i^o, v_3^e, \tau_i^o, \tau_{ij}^o, \tau_{i3}^e, \tau_3^o\}$ соответственно определяют симметричное и антисимметричное НДС относительно срединной поверхности оболочки.

Асимптотика (2.1), в отличие от аналогичной асимптотики для случая свободных колебаний [4], отвечает при $q > 0$ колебаниям, для которых $v_3 \gg v_i$.

Внося (2.1) в формулы (1.2), получим

$$L_i = \frac{E}{R}(\eta^{-q-b}L_i^e + \eta^{-q}L_i^o), \quad L = \frac{E}{R}(\eta^{-b}L^e + L^o)$$

$$F = \frac{E}{R}(\eta^{3-4q-b}F^o + \eta^{1-2q}F^e), \quad e_i = \eta^{-b}e_i^e + e_i^o \quad (2.2)$$

$$m_i = \eta^{-b}m_i^e + m_i^o, \quad g_i = \eta^{1-q-b}g_i^o + \eta^{q-1}g_i^e$$

Здесь

$$L_i^p = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \tau_i^p}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \tau_{ij}^p}{\partial \xi_j} + \eta^q k_j^* (\tau_i^p - \tau_j^p) + \eta^q k_i^* (\tau_{ij}^p + \tau_{ji}^p), \quad L^p = \frac{\tau_1^p}{R_1^*} + \frac{\tau_2^p}{R_2^*}$$

$$F^p = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{13}^p}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{23}^p}{\partial \xi_2} + \eta^q k_2^* \tau_{13}^p + \eta^q k_1^* \tau_{23}^p, \quad e_i^p = \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i^p}{\partial \xi_i} + \eta^q k_i^* v_j^p + \eta^{\beta^p} \frac{v_3^p}{R_i^*} \quad (2.3)$$

$$m_i^p = \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_i^p}{\partial \xi_j} - \eta^q k_j^* v_j^p, \quad g_i^p = \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_3^p}{\partial \xi_i} - \eta^{\gamma^p} \frac{v_i^p}{R_i^*}$$

$$\beta^e = \gamma^o = 2q - 1 + b, \quad \beta^o = \gamma^e = 1 - b$$

где символ-индекс p принимает значения e и o .

Подставим теперь соотношения (2.1), (2.2) в исходную систему уравнений (1.1). Принимая во внимание четность величин из (2.1), (2.2) и пренебрегая членами порядка $\varepsilon = O(\eta + \eta^{2-2q})$ по сравнению с единицей, приходим с учетом формул (2.3) к замкнутой системе уравнений для величин $v_i^e, \tau_i^e, \tau_{ij}^e, \tau_3^e$ из совокупности S^e , а также v_3^o и τ_3^o из совокупности S^o . Она имеет вид

$$L_i^e - \frac{\partial^2 v_i^e}{\partial \tau^2} = 0, \quad -\eta^{1-b}L^e + \frac{\partial \tau_3^o}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_3^e}{\partial \tau^2} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_3^e}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial v_3^e}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial v_i^e}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.4)$$

$$e_i^e = \tau_i^e - v\tau_j^e - v\eta^b \tau_3^e, \quad m_i^e + m_j^e = 2(1+v)\tau_{ij}^e$$

Остальные неизвестные величины выражаются через величины, входящие в (2.4), согласно системе уравнений

$$L_i^o + \frac{\partial \tau_{i3}^o}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_i^o}{\partial \tau^2} - \eta^{1-b}\zeta \left(\frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*} \right) \frac{\partial^2 v_i^e}{\partial \tau^2} = 0$$

$$e_i^o = \tau_i^o - v\tau_j^o - v\tau_3^o + \eta^{1-b}\zeta \left(-\frac{1}{R_j^*} e_i^e + \frac{1}{R_i^*} \tau_i^e - \frac{v}{R_j^*} \tau_j^e \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v_3^o}{\partial \zeta} = \eta^b \tau_3^e - v\tau_1^e - v\tau_2^e, \quad \frac{\partial v_i^o}{\partial \zeta} + g_i^e = 0$$

$$m_i^o + m_j^o = 2(1+v)\tau_{ij}^o + \eta^{1-b}\zeta \left[-\frac{1}{R_i^*} m_i^e - \frac{1}{R_j^*} m_j^e + \frac{2(1+v)}{R_j^*} \tau_{ij}^e \right]$$

В системы уравнений (2.4), (2.5) не вошел асимптотически второстепенный член τ_{13}^o .

Для его определения следует уточнить (2.4) путем введения асимптотически второстепенных членов, на чем, однако, не будем здесь останавливаться.

С учетом (2.1) граничные условия на лицевых поверхностях в рамках погрешности ε перепишем так:

$$\tau_{i3}^e \Big|_{\zeta=\pm 1} = \tau_{i3}^o \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0 \quad (2.6)$$

$$\tau_3^e \Big|_{\zeta=\pm 1} = \frac{1}{2E} (-q_3^+ + q_3^-), \quad \tau_3^o \Big|_{\zeta=\pm 1} = \mp \frac{1}{2E} (q_3^+ + q_3^-)$$

Перейдем к интегрированию по толщине оболочки. Интеграл системы уравнений (2.4), удовлетворяющий граничным условиям (2.6), представляется в форме

$$v_i^e = v_{i,0}, \quad v_3^e = v_{3,0}, \quad \tau_i^e = \tau_{i,0}, \quad \tau_{ij}^e = \tau_{ij,0}, \quad \tau_3^e = \tau_{3,0} \quad (2.7)$$

$$\tau_3^o = \zeta \tau_{3,1}, \quad e_i^e = e_{i,0}, \quad m_i^e = m_{i,0}, \quad g_i^e = g_{i,0}, \quad L_i^e = L_{i,0}, \quad L^e = L_0$$

Функции, содержащие запятую в нижнем индексе, не зависят от поперечной координаты ζ и связаны соотношениями

$$\begin{aligned} e_{i,0} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{i,0}}{\partial \xi_i} + \eta^q k_i^* v_{j,0} + \eta^{2q-1+b} \frac{v_{3,0}}{R_i^*} \\ m_{i,0} &= \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_{i,0}}{\partial \xi_j} - \eta^q k_j^* v_{j,0}, \quad g_{i,0} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{3,0}}{\partial \xi_i} - \eta^{1-b} \frac{v_{i,0}}{R_i^*} \\ \tau_{ij,0} &= \frac{1}{2(1+\nu)} (m_{i,0} + m_{j,0}), \quad \tau_{3,0} = \frac{1}{2E} (-q_3^+ + q_3^-) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\tau_{i,0} = \frac{1}{1-\nu^2} (e_{i,0} + \nu e_{j,0}) + \frac{\nu}{1-\nu} \eta^b \tau_{3,0}$$

$$L_{i,0} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \tau_{i,0}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \tau_{ij,0}}{\partial \xi_j} + \eta^q k_j^* (\tau_{i,0} - \tau_{j,0}) + \eta^q k_i^* (\tau_{ij,0} + \tau_{ji,0})$$

$$L_0 = \frac{\tau_{1,0}}{R_1^*} + \frac{\tau_{2,0}}{R_2^*}, \quad \tau_{3,1} = -\frac{1}{2E} (q_3^+ + q_3^-), \quad \frac{\partial^2 v_{3,0}}{\partial \tau^2} = \tau_{3,1} - \eta^{1-b} L_0, \quad L_{i,0} - \frac{\partial^2 v_{i,0}}{\partial \tau^2} = 0$$

представляющими собой систему 17 уравнений относительно 17 неизвестных двумерных функций из (2.6).

Интеграл системы уравнений (2.5), удовлетворяющий граничным условиям (2.6), выглядит так:

$$v_i^o = \zeta v_{i,1}, \quad v_3^o = \zeta v_{3,1}, \quad \tau_i^o = \zeta \tau_{i,1}, \quad \tau_{ij}^o = \zeta \tau_{ij,1} \quad (2.9)$$

$$\tau_{i3}^e = \tau_{i3,0} + \zeta^2 \tau_{i3,2}, \quad e_i^o = \zeta e_{i,1}, \quad m_i^o = \zeta m_{i,1}, \quad g_i^o = \zeta g_{i,1}, \quad L_i^o = \zeta L_{i,1}$$

Входящие в (2.9) двумерные функции удовлетворяют уравнениям

$$v_{i,1} = -g_{i,0}, \quad v_{3,1} = \eta^b \tau_{3,0} - \nu \tau_{1,0} - \nu \tau_{2,0}$$

$$e_{i,1} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{i,1}}{\partial \xi_i} + \eta^q k_i^* v_{j,1} + \eta^{1-b} \frac{v_{3,1}}{R_i^*} \quad (2.10)$$

$$m_{i,1} = \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_{i,1}}{\partial \xi_j} - \eta^q k_j^* v_{j,1}, \quad g_{i,1} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_{3,1}}{\partial \xi_i} - \eta^{2q-1+b} \frac{v_{i,1}}{R_i^*}$$

$$\tau_{i,1} = \frac{1}{1-\nu^2}(e_{i,1} + \nu e_{j,1}) + \frac{\nu}{1-\nu}\tau_{3,1} + \eta^{1-b} \left[\frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{e_{i,0}}{R_j^*} + \frac{e_{j,0}}{R_i^*} \right) - \frac{\tau_{i,0}}{R_i^*} \right]$$

$$\tau_{ij,1} = \frac{1}{2(1+\nu)}(m_{i,1} + m_{j,1}) + \eta^{1-b} \left[\frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{m_{i,0}}{R_i^*} + \frac{m_{j,0}}{R_j^*} \right) - \frac{\tau_{ij,0}}{R_j^*} \right]$$

$$L_{i,1} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \tau_{i,1}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \tau_{ij,1}}{\partial \xi_j} + \eta^q k_j^* (\tau_{i,1} - \tau_{j,1}) + \eta^q k_i^* (\tau_{ij,1} + \tau_{ji,1})$$

$$\tau_{i3,2} = -\frac{1}{2} L_{i,1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_{i,1}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2} \eta^{1-b} \left(\frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*} \right) \frac{\partial^2 v_{i,0}}{\partial \tau^2}, \quad \tau_{i3,0} = -\tau_{i3,2}$$

Можно убедиться, что при известных величинах с запятой в нижнем индексе из (2.9) соотношения (2.10) являются системой 18 уравнений относительно 18 неизвестных.

Вид представлений (2.1) показывает, что при $q \geq 1/2$ ($b = 0$) напряжение τ_3 становится асимптотически главным. При этом, как следует из формул (2.7), (2.8), в рамках допускаемой погрешности ε его симметричная относительно срединной поверхности составляющая определяется действием обжатия (фигура) и выражается формулой

$$\tau_3^e = (-q_3^+ + q_3^-) / (2E) \quad (2.11)$$

Таким образом, при $q \geq 1/2$ обжатие становится асимптотически главным фактором и им нельзя пренебрегать даже в самом грубом приближении.

3. Осредненные уравнения движения. Представим полученные в разд. 2 двумерные уравнения в терминах осредненных характеристик (усилий, перемещений срединной поверхности и др.). Ограничимся при этом уравнениями (2.8).

Введем предварительно обозначения [1]: T_i – нормальные усилия, S_{ij} – касательные усилия, u_i – тангенциальные перемещения срединной поверхности, w – прогиб, ε_i и ω – компоненты тангенциальной деформации. С учетом (2.1), (2.7), (2.9) имеем

$$T_i = 2Eh\eta^{-b}\tau_{i,0}, \quad S_{ij} = 2Eh\eta^{-b}\tau_{ij,0}, \quad u_i = R\eta^{q-b}v_{i,0}$$

$$w = -R\eta^{2q-1}v_{3,0}, \quad \varepsilon_i = \eta^{-b}e_{i,0}, \quad \omega = \eta^{-b}(m_{i,0} + m_{j,0})$$

В этих обозначениях уравнения (2.8) примут вид

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_i - T_j) + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ij} + S_{ji}) - 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -(q_3^+ + q_3^-)$$

(3.1)

$$T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_i + \nu\varepsilon_j) + \frac{\nu h}{1-\nu}(q_3^- - q_3^+), \quad S_{ij} = \frac{Eh}{1+\nu}\omega$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j - \frac{w}{R_i}, \quad \omega = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_2}{A_2}$$

С точностью до инерционных членов уравнения (3.1) совпадают со статическими уравнениями безмоментной теории оболочек, в которых дополнительно учтено поперечное обжатие (член, пропорциональный $(q_3^- - q_3^+)$ в соотношениях упругости для

нормальных усилий T_j). Однако, если в статике член, соответствующий поперечному обжатию, является асимптотически второстепенным, то в динамике при $q = a \geq 1/2$ он становится асимптотически главным.

4. Пример. Рассмотрим происходящие по закону $\exp(-i\Omega t)$ (Ω – круговая частота) вынужденные гармонические колебания бесконечной круговой цилиндрической оболочки при действии равномерно распределенной вдоль оси цилиндра поверхностной нагрузки. Полагая в (3.1) $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \equiv R$, $u_2 \equiv u$, $\alpha_2 \equiv \alpha$, $u_1 = 0$, $\partial/\partial\alpha_1 = 0$, $\partial/\partial t = -i\Omega$, перейдем к уравнениям в перемещениях, введем безразмерные координату и частоту

$$\xi = \eta^{-q}\alpha/R, \quad \Lambda = Rc_s^{-1}\eta^q\Omega \quad (a = q, \Lambda \sim \partial/\partial\xi \sim 1)$$

и будем считать, что $q > 0$. Тогда, пренебрегая асимптотически второстепенными членами, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (1 - \nu^2)\Lambda^2 u = \frac{R}{2E}\eta^{3q-1}\frac{\partial F}{\partial \xi} \quad (4.1)$$

$$F = \eta^{1-2q}\nu(1+\nu)(q_3^+ - q_3^-) - \Lambda^{-2}(q_3^+ + q_3^-)$$

Первое слагаемое в выражении для функции F отвечает обжатию, а второе – сжатию. Как и следовало ожидать, при $q \geq 1/2$ влиянием обжатия нельзя пренебречь даже в самом грубом приближении.

Если при $q = 1/2$ отношение $r = (q_3^+ + q_3^-)/(q_3^+ - q_3^-)$ оложительно и не зависит от α (например, если $q_3^\pm = Q_3^\pm \cos(m\alpha/R)$), то на частоте

$$\Lambda = \sqrt{r/[\nu(1+\nu)]} \quad (4.2)$$

правая часть уравнения (4.1) обращается в нуль ($F = 0$).

Условие $r > 0$ приводит к ограничению $|q_3^+| > |q_3^-|$, которое показывает, что частота (4.2) существует лишь в случае, когда амплитуда нагрузки на внешней лицевой поверхности оболочки превосходит амплитуду на внутренней лицевой поверхности.

Отметим, что при совпадении частоты (4.2) с одним из резонансов тангенциальных колебаний этот резонанс не возбуждается. Подобное явление наблюдается, например, при рассеянии акустических волн оболочками [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Российского правительства (М7Х300) и Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01098).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. Kaplunov J.D., Nolde E.V., Veksler N.D. Asymptotic description of the peripheral waves in scattering of a plane acoustic wave by a spherical shell // *Acustica*. 1992. V. 76. No. 1. P. 10–19.
3. Kaplunov J.D., Nolde E.V., Veksler N.D. Asymptotic formulae for the modal resonances of peripheral waves in the scattering of an obliquely incident plane acoustic wave by a cylindrical shell // *Acustica*. 1994. V. 80. No. 1. P. 280–293.
4. Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // *ПММ*. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 83–91.
5. Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V. On Timoshenko – Reissner type theories of plates and shells // *Intern. J. Solids Structures*. 1993. V. 30. No. 5. P. 675–694.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.1995