

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. Г.И. Михасев

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СЕМЕЙСТВА ИЗГИБНЫХ ВОЛН В НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КОСЫМИ КРАЯМИ

Рассматривается начально-краевая задача для уравнений пологих оболочек, описывающих движение некруговой цилиндрической оболочки. Края оболочки – необязательно плоские кривые. В качестве граничных условий рассматриваются условия шарнирного опирания или жесткой заделки. Предполагается, что начальные перемещения и скорости точек срединной поверхности оболочки – функции, быстро убывающие вдали от некоторой образующей. В случае, когда края оболочки лежат в плоскостях, перпендикулярных образующей, решение задачи может быть построено в виде разложений по балочным функциям вдоль образующей. Указанное разложение позволяет исходную начально-краевую задачу свести к начальной задаче, решение которой может быть построено [1] методом В.П. Маслова [2]. Предлагается комплексная ВКБ – процедура, пригодная к некруговым цилиндрическим оболочкам с косыми краями. Построено асимптотическое решение уравнений движения в виде наложения локализованных семейств (волновых пакетов) бегущих в окружном направлении изгибных волн. Проведен качественный анализ построенных решений. В качестве примера рассмотрены волновые формы движения косоусеченной цилиндрической оболочки.

1. Постановка задачи. Введем на срединной поверхности оболочки толщиной h ортогональную систему координат s, φ , где s – продольная координата, φ – координата на направляющей, выбираемая таким образом, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2 = R^2(ds^2 + d\varphi^2)$. При этом радиус кривизны $R_2 = R/k(\varphi)$. Здесь R – характерный размер срединной поверхности. Пусть оболочка ограничена двумя краями и не обязательно замкнута в направлении φ :

$$s_1(\varphi) \leq s \leq s_2(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

Функции $k(\varphi), s_i(\varphi)$ считаются бесконечно-дифференцируемыми, причем $\partial^m k / \partial \varphi^m, \partial^m s_i / \partial \varphi^m \sim 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($m = 1, 2, \dots$).

В предположении о большой изменчивости волн в направлении круговой координаты φ , используем систему уравнений [3], записанную в безразмерном виде

$$\varepsilon^4 \Delta^2 W + k(\varphi) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad \varepsilon^4 \Delta^2 F - k(\varphi) \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \varepsilon^8 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}, \quad t = \frac{t_*}{T_*}$$

$$W = \varepsilon^4 \frac{W_*}{R}, \quad F = \varepsilon^{-4} \frac{F_*}{hE}, \quad T_*^2 = \varepsilon^{-6} \frac{R^2 \rho}{E}$$

где W_*, F_* – нормальный прогиб и функция напряжений, t_* – время, ρ – плотность материала, $0 < \varepsilon$ – естественный малый параметр, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, T_* – характерное время.

На краях $s = s_1(\varphi)$, $s = s_2(\varphi)$ оболочки рассмотрим одну из двух групп граничных условий – группу шарнирного опирания или группу жесткой заделки. Каждая из этих групп включает по 6 вариантов граничных условий [4, 5]. Напряженное состояние оболочки состоит из основного напряженного состояния и интегралов краевого эффекта [6]. Для исследования основного напряженного состояния на каждом краю следует удовлетворить лишь двум главным условиям. С точностью до величин порядка ε^2 эти условия имеют вид [4]

$$W = \partial^2 W / \partial s^2 = 0, \quad W = \partial W / \partial s = 0 \quad (1.2)$$

для групп шарнирного опирания и жесткой заделки соответственно.

Рассмотрим начальные условия

$$W|_{t=0} = W_0^*(s, \varphi, \varepsilon)\Phi_0, \quad \dot{W}|_{t=0} = i\varepsilon^{-1}V_0^*(s, \varphi, \varepsilon)\Phi_0 \quad (1.3)$$

$$\Phi_0 = \Phi_0(\varphi, \varepsilon) = \exp\{i\varepsilon^{-1}(a_0\varphi + \frac{1}{2}b_0\varphi^2)\}, \quad \text{Im } b_0 > 0$$

где $a_0 (a_0 \neq 0)$ – вещественное число, W_0^*, V_0^* – комплекснозначные функции, такие, что

$$\partial^m W_0^* / \partial s^m, \quad \partial^m V_0^* / \partial s^m \sim \varepsilon^{-m\gamma} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

$$m = 1, 2, \dots; \quad 0 \leq \gamma < 3/4; \quad 0 \leq \alpha \leq 1/2$$

и имеющие в направлении φ конечное число осцилляций с изменяемостью порядка $\varepsilon^{-\alpha}$. Условия (1.3) задают на поверхности оболочки начальный волновой пакет с изменяемостью порядка ε^{-1} в направлении координаты φ и локализованный в окрестности образующей $\varphi = 0$.

2. Метод решения. Рассмотрим уравнение

$$d^4 z / ds^4 - \lambda z = 0 \quad (2.1)$$

Обозначим через $z_1(s, \varphi), z_2(s, \varphi), \dots$ бесконечную систему собственных функций краевой задачи (1.2), (2.1). Пусть W_0^*, V_0^* удовлетворяют одному из вариантов граничных условий (1.2). Тогда для любого $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ W_0^* и V_0^* допускают разложение по системе собственных функций $z_n(s, \varphi)$ в равномерно сходящиеся на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$ ряды [7]

$$W_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} W_{n0}(\varphi, \varepsilon) z_n(s, \varphi), \quad W_{n0} = \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} W_0^* z_n ds \quad (2.2)$$

$$V_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} V_{n0}(\varphi, \varepsilon) z_n(s, \varphi), \quad V_{n0} = \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} V_0^* z_n ds$$

Принимая во внимание (1.4), в (2.2) при практических расчетах можно ограничиться конечным числом слагаемых $N \sim \varepsilon^{-\gamma}$. Пусть W_{n0}, V_{n0} – полиномы аргумента $\varepsilon^{-1/2}\varphi$ с коэффициентами, регулярно зависящими от ε . Такое предположение подразумевает наличие в амплитуде начального волнового пакета конечного числа осцилляций [2]. Тогда W_{n0}, V_{n0} представимы в виде рядов

$$W_{n0} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}^0(\zeta), \quad V_{n0} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} v_{nm}^0(\zeta); \quad \zeta = \varepsilon^{-1/2}\varphi$$

где w_{nm}^0, v_{nm}^0 – полиномы степеней M_{nm} с комплексными (в общем случае) коэффициентами. Функции z_n разложим в ряд Тейлора

$$z_n = z_n^0 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^{r/2} \zeta^r \frac{\partial^r z_n^0}{\partial \varphi^r}; \quad z_n^0 = z_n(s, 0), \quad \frac{\partial^r z_n^0}{\partial \varphi^r} = \left. \frac{\partial^r z_n}{\partial \varphi^r} \right|_{\varphi=0}$$

Следуя [1], а также принимая во внимание линейность исходной системы, решение задачи (1.1)–(1.3), (2.2) будем искать в виде

$$W = \sum_{n=1}^N W_n, \quad F = \sum_{n=1}^N F_n \quad (2.3)$$

где W_n, F_n ($n = 1, 2, \dots, N$) – искомые функции, локализованные в момент времени t в окрестности некоторой образующей $\varphi = q_n(t)$ и удовлетворяющие начальным условиям

$$W_n|_{t=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}^0 z_n, \quad \dot{W}_n|_{t=0} = i\varepsilon^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} v_{nm}^0 z_n \quad (2.4)$$

причем функции $z_n = z_n(s, \varphi)$ представлены приведенным выше рядом Тейлора.

Пару функций W_n, F_n будем называть n -м волновым пакетом с центром в точке $\varphi = q_n(t)$. Здесь $q_n(t)$ – дважды дифференцируемая функция, такая, что

$$q_n(0) = 0 \quad (2.5)$$

Перейдем в (1.1) к новой системе координат, связанной с центром $q_n(t)$, по формуле

$$\varphi = q_n(t) + \varepsilon^{1/2} \xi_n \quad (2.6)$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^4 W_n}{\partial \xi_n^4} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^4 W_n}{\partial \xi_n^2 \partial s^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 W_n}{\partial s^4} + k \frac{\partial^2 F_n}{\partial s^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2} - 2\varepsilon^{3/2} \dot{q}_n \frac{\partial^2 W_n}{\partial \xi_n \partial t} + \\ + \varepsilon \dot{q}_n^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial \xi_n^2} - \varepsilon^{3/2} \ddot{q}_n \frac{\partial W_n}{\partial \xi_n} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^4 F_n}{\partial \xi_n^4} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^4 F_n}{\partial \xi_n^2 \partial s^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 F_n}{\partial s^4} - k \frac{\partial^2 W_n}{\partial s^2} = 0$$

описывающую поведение n -го волнового пакета.

Решение уравнений (2.7) с начальными условиями (2.4) будем искать в виде

$$W_n = W_n^* \Phi_n, \quad F_n = F_n^* \Phi_n \quad (2.8)$$

$$W_n^* = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}(s, \xi_n, t), \quad F_n^* = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} f_{nm}(s, \xi_n, t)$$

$$\Phi_n = \exp \left\{ \left[\varepsilon^{-1} \int_0^1 \omega_n(\tau) d\tau + \varepsilon^{-1/2} p_n(t) \xi_n + \frac{1}{2} b_n(t) \xi_n^2 \right] \right\}$$

где ω_n, p_n, b_n – дважды дифференцируемые по t функции, $\text{Im} b_n(t) > 0$ для любого $t > 0$, а w_{nm}, f_{nm} – полиномы по ξ_n . Здесь $\omega_n(t)$ имеет смысл мгновенной частоты колебаний оболочки в окрестности центра $\varphi = q_n(t)$, $p_n(t)$ определяет изменчивость в направлении ψ , а $b_n(t)$ характеризует скорость затухания амплитуды волн при удалении от центра $\varphi = q_n(t)$.

Отметим, что разложения вида (2.8), в случае, когда $q_n = 0$, а ω_n, p_n, b_n – постоянные, были построены [8, 9] для уравнений устойчивости и собственных колебаний оболочек.

Подставим (2.8) в (2.7), а функцию $k(\varphi)$, разложим в ряд Тейлора по степеням $\varepsilon^{1/2} \xi_n$ в окрестности подвижной точки $\varphi = q_n(t)$. Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$ и исключая функции f_{nm} , получим последовательность диф-

дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=0}^m L_{nj} w_{nm-j} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

для определения $\omega_n, q_n, p_n, b_n, w_{nm}$. Здесь

$$L_{n0} = \frac{k^2[q_n(t)]}{p_n^4(t)} \frac{\partial^4}{\partial s^4} + \{p_n^4(t) - [\omega_n(t) - \dot{q}_n(t)p_n(t)]^2\}$$

$$L_{n1} = (b_n L_p + L_q + \dot{p}_n L_\omega) \xi_n - i L_p \frac{\partial}{\partial \xi_n} \quad (2.10)$$

$$L_{n2} = \frac{1}{2} (b_n^2 L_{pp} + 2b_n L_{pq} + L_{qq} + \dot{p}_n^2 L_{\omega\omega} + 2\dot{p}_n L_{\omega q} + 2\dot{p}_n b_n L_{\omega p} + \dot{b}_n L_\omega) \xi_n^2 +$$

$$+ a_{n0} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} + a_{n1} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \xi_n + a_{n2} \frac{\partial}{\partial t} + a_{n3}$$

$$a_{n0} = -\frac{1}{2} L_{pp}, \quad a_{n1} = -i(b_n L_{pp} + L_{pq} + \dot{p}_n L_{\omega p}), \quad a_{n2} = -i L_\omega$$

$$a_{n3} = -i \left(\frac{1}{2} b_n L_{pp} + \frac{1}{2} \dot{\omega}_n L_{\omega\omega} + \dot{p}_n L_{\omega p} - \frac{4kk'}{p_n^5} \frac{\partial^4}{\partial s^4} + \ddot{q}_n p_n \right)$$

Индексы p, q, ω в (2.10) и ниже означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Функции f_{nm} находятся последовательно из неоднородных уравнений и выражаются через $f_{n0}, f_{n1}, \dots, f_{nm-1}$. В частности, $f_{n0} = k(q_n) p_n^{-4} \partial^2 w_{n0} / \partial s^2$.

Подстановка (2.8) в (1.2) дает последовательность краевых условий для функций w_{nm} при $s = s_i[q_n(t)]$. Например, в случае шарнирного опирания получаем

$$w_{n0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{n0}}{\partial s^2} = 0 \quad (2.11)$$

$$w_{n1} + \xi_n s' \frac{\partial w_{n0}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{n1}}{\partial s^2} + \xi_n s' \frac{\partial^3 w_{n0}}{\partial s^3} = 0 \quad (2.12)$$

$$w_{n2} + \xi_n s' \frac{\partial w_{n1}}{\partial s} + \frac{1}{2} \xi_n^2 \left[s'' \frac{\partial^2 w_{n0}}{\partial s^2} + s'^2 \frac{\partial^3 w_{n0}}{\partial s^3} \right] = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 w_{n2}}{\partial s^2} + \xi_n s' \frac{\partial^3 w_{n1}}{\partial s^3} + \frac{1}{2} \xi_n^2 \left[s'' \frac{\partial^3 w_{n0}}{\partial s^3} + s'^2 \frac{\partial^4 w_{n0}}{\partial s^4} \right] = 0$$

3. Интегрирование уравнений (2.9). Рассмотрим краевую задачу (2.9), (2.11), возникающую в нулевом приближении ($m = 0$). Ее решение ищем в виде

$$w_{n0} = P_{n0}(\xi_n, t) z_n[s, q_n(t)] \quad (3.1)$$

где $P_{n0}(\xi_n, t)$ – полином аргумента ξ_n . Подстановка (3.1) в (2.9) при $m = 0$ дает

$$\omega_n(t) = \dot{q}_n(t) p_n(t) \mp H_n[p_n(t), q_n(t)]$$

$$H_n(p_n, q_n) = [p_n^4 + \lambda_n(q_n) k^2(q_n) p_n^{-4}]^{1/2} \quad (3.2)$$

где $H_n(p_n, q_n)$ – функция Гамильтона, а $\lambda_n[q_n(t)]$ – собственное число краевой задачи (2.1), (2.11) при $s = s_i[q_n(t)]$.

В первом приближении ($m=1$) имеем краевую задачу (2.9), (2.12) относительно w_{n1} . Решение последней ищем в виде

$$w_{n1} = P_{n1}(\xi_n, t)z_n[s, q_n(t)] + w_{n1}^{(p)}(s, \xi_n, t) \quad (3.3)$$

где P_{n1} – полином аргумента ξ_n , а $w_{n1}^{(p)}$ – какое-либо частное решение уравнения (2.9) при $m=1$. Условием существования решения w_{n1} служит равенство

$$\int_{s_1}^{s_2} z_n(L_{n0}w_{n1} + L_{n1}P_{n0}z_n)ds = 0 \quad (3.4)$$

представляющее собой дифференциальное уравнение относительно P_{n0} . Для того чтобы последнее имело решение в виде полинома аргумента ξ_n , необходимо чтобы $p_n(t), q_n(t)$ тождественно удовлетворяли системе Гамильтона

$$\dot{q}_n = H_p, \quad \dot{p}_n = -H_q \quad (3.5)$$

Пусть $p_n(t), q_n(t)$ – решение системы (3.5) с начальными условиями $p_n(0) = a_0, q_n(0) = 0$. Тогда $w_{n1}^{(p)} = \xi_n P_{n0} z_q$, где $z_q = \partial z_n / \partial q_n$. Полиномы P_{n0}, P_{n1} в этом приближении остаются неопределенными.

Рассмотрим уравнение (2.9) при $m=2$ с краевыми условиями (2.13). Условие существования решения этой задачи при учете (3.2), (3.5) приводит к уравнению

$$(\xi_n^2 D_b - 2D_{\xi_t})P_{n0} = 0 \quad (3.6)$$

относительно P_{n0} . Здесь

$$D_b = \dot{b}_n + H_{pp}b_n^2 + 2H_{pq}b_n + H_{qq}$$

$$D_{\xi_t} = a_{n0}^* \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} + a_{n1}^* \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} + a_{n2}^* \frac{\partial}{\partial t} + a_{n3}^*$$

$$a_{n0}^*(t) = \frac{1}{2} H_{pp}, \quad a_{n1}^*(t) = i(b_n H_{pp} + H_{pq}), \quad a_{n2}^* = i$$

$$a_{n3}^*(t) = i\eta_n^{-1} (2H_n)^{-1} [H_n H_{pp} b_n - \dot{\omega}_n - 2H_p H_q - 4\lambda_n(q_n)k(q_n)k'(q_n)p_n^{-5} + \ddot{q}_n p_n +$$

$$+ \int_{s_1}^{s_2} (L_n z_q + L_{\omega} \dot{z}_n) z_n ds, \quad \eta_n(t) = \int_{s_1}^{s_2} z_n^2 ds$$

Для того чтобы уравнение (3.6) имело решение в виде полинома, необходимо, чтобы функция $b_n(t)$ являлась решением уравнения Риккати

$$\dot{b}_n + H_{pp}b_n^2 + 2H_{pq}b_n + H_{qq} = 0 \quad (3.7)$$

Пусть $b_n(t)$ – решение уравнения (3.7), удовлетворяющее начальному условию $b_n(0) = b_0$. Можно доказать ([10], с. 104), что если $\text{Im} b_0 > 0$, то на любом конечном отрезке $0 < t < T$ выполняется неравенство $0 < \text{Im} b_n(t) < +\infty$.

Уравнение (3.6) при учете (3.7) примет вид $D_{\xi_t} P_{n0} = 0$. Его решением является любой полином

$$P_{n0}(\xi_n, t) = \sum_{k=0}^M A_{nk}(t) \xi_n^k \quad (3.8)$$

степени M с коэффициентами

$$A_{nM}(t) = d_{n0} \Psi_{n0}(t), \quad A_{nM-1}(t) = d_{n1} \Psi_{n1}(t)$$

$$A_{nM-r}(t) = \Psi_{nr}(t) \left[d_{nr} - (M-r+2)(M-r+1) \int \frac{a_{n0}^*(t) A_{nM-r+2}(t)}{a_{n2}^*(t) \Psi_{nr}(t)} dt \right]$$

$$\Psi_{nj}(t) = \exp \left\{ - \int \frac{(M-j)a_{n1}^*(t) + a_{n3}^*(t)}{a_{n2}^*(t)} dt \right\} \quad (3.9)$$

$$r = 2, 3, \dots, M; \quad j = 0, 1, \dots, M$$

где d_{nj} – произвольные комплексные числа, подлежащие определению из начальных условий задачи.

Функция $W_n = [w_{n0} + O(\varepsilon^{1/2})] \Phi_n$, найденная из первых трех приближений, является главным членом в асимптотическом разложении решения (2.8) и удовлетворяет исходным граничным условиям (1.2) с точностью до $O(\varepsilon^{1/2})$. Для определения в (2.8) поправки $\varepsilon^{m/2} w_{nm}$ при $m \geq 1$ требуется рассмотрение соответствующей краевой задачи в $(m+2)$ -м приближении, существование решения которой приводит к неоднородному дифференциальному уравнению $D_{\xi t} P_{nm} = P^*$ относительно полинома $P_{nm}(\xi_n, t)$. Укажем на то, что изложенная процедура построения полиномов w_{nm} при $m \geq 4$ теряет смысл, ибо поправка, вносимая краевой задачей на шестом шаге в общее решение (2.8), на краях оболочки составляет величину $O(\varepsilon^2)$, равную погрешности исходных граничных условий (1.2).

4. Определение постоянных d_{nj} . Принимая во внимание (3.2), обозначим через p_n^\pm , q_n^\pm , ω_n^\pm , b_n^\pm , z_n^\pm , P_{nm}^\pm , w_{nm}^\pm положительные и отрицательные ветви найденных выше функций, соответствующие гамильтонианам H_n и $-H_n$. Здесь $z_n^\pm = z_n[s, q_n^\pm(t)]$. Пусть $\xi_n^\pm = \varepsilon^{-1/2} [\varphi - q_n^\pm(t)]$. Тогда P_{n0}^\pm – полиномы аргумента ξ_n^\pm , содержащие неопределенные константы a_{nj}^\pm . Рассмотрим функции

$$W_n = W_n^+ + W_n^-, \quad F_n = F_n^+ + F_n^- \quad (4.1)$$

$$W_n^\pm = [w_{n0}^\pm + O(\varepsilon^{1/2})] \Phi_n^\pm, \quad F_n^\pm = [f_{n0}^\pm + O(\varepsilon^{1/2})] \Phi_n^\pm$$

где индексы плюс и минус указывают на то, что вычисления проводятся соответственно на положительной и отрицательной ветвях. В силу проведенного выше построения функции (4.1) удовлетворяют уравнениям (2.7) в главном приближении. Для определения входящих в W_n, F_n постоянных d_{nj}^\pm подставим (4.1) в начальные условия (2.4) и учтем имеющие при $t=0$ место равенство $\xi_n^\pm = \zeta$ и тождество $z_n^\pm \equiv z_n^0$. В результате получим систему уравнений

$$P_n^\pm|_{t=0} = \frac{1}{2} \left[w_{n0}^0(\zeta) \mp \frac{v_{n0}^0(\zeta)}{H_n^0} \right], \quad H_n^0 = H_n(a_0, 0) \quad (4.2)$$

для определения d_{nj}^\pm . Из (4.2) следует, что полиномы P_{r0}^\pm имеют степень $M = M_{n0}$.

5. Анализ решения. В случае, когда k, s_i – постоянные построенные функции (2.3), (4.1) совпадают с решением, найденным в [1] методом В.П. Маслова [2].

Условимся слагаемые с индексами плюс и минус в (4.1) называть n^+ -м и n^- -м волновыми пакетами соответственно. Анализ формул (2.3), (4.1) показывает, что при фиксированных n и t вне окрестностей образующих $\varphi = q_n^\pm(t)$ выполняется соотношение $|W_n| = O(\varepsilon^\infty)$. Это означает, что начальный волновой пакет (1.3) при $t > 0$ разбивается на $2N$ пакетов, при этом n^+ -й и n^- -й пакеты двигаются в противо-

положных от образующей $\varphi = 0$ направлениях с групповыми скоростями $v_{ng}^{\pm} = \dot{q}_n^{\pm}(t)$.

Ширина пакетов – величина порядка $\varepsilon^{1/2} / \text{Im } b_n^{\pm}(t)$.

Поведение волновых пакетов сильно зависит от функций $k(\varphi)$, $s_i(\varphi)$. Введем в (3.2) обозначение $g_n = \lambda_n(q_n)k^2(q_n)$ и рассмотрим следующие случаи.

1°. $g'_n(\varphi) < 0$ при $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Из анализа системы (3.5) получаем, что для любого $t > 0$ справедливы неравенства

$$\dot{p}_n^+ > 0, v_{ng}^+ > 0, \dot{v}_{ng}^+ > 0, \text{ если } a_0^8 \geq g_n(0)$$

$$\dot{p}_n^- < 0, v_{ng}^- > 0, \dot{v}_{ng}^- > 0, \text{ если } 0 < a_0^8 < g_n(0)$$

Последние показывают, что один из n^{\pm} -х пакетов движется в сторону убывания функции $g_n(\varphi)$ с возрастающей групповой скоростью.

2°. $g'_n(\varphi) > 0$ при $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Пусть $H_n^0 > (4K_n)^{1/4}$, где $K_n = \sup g_n(\varphi)$ на множестве $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Здесь

$$\dot{p}_n^+ < 0, v_{ng}^+ > 0, \dot{v}_{ng}^+ < 0 \text{ при } a_0^8 \geq g_n(0)$$

$$\dot{p}_n^- > 0, v_{ng}^- > 0, \dot{v}_{ng}^- < 0 \text{ при } 0 < a_0^8 < g_n(0)$$

В данном случае один из n^{\pm} -х пакетов движется в сторону возрастания функции $g_n(\varphi)$, однако групповая скорость его убывает.

Пусть теперь

$$H_n^0 \leq (4K_n)^{1/4} \tag{5.1}$$

Здесь при $a_0^8 > g_n(0)$ существует такое $t_r^+ > 0$, что

$$\dot{p}_n^+ < 0, v_{ng}^+ > 0, \dot{v}_{ng}^+ < 0 \text{ для } 0 < t < t_r^+$$

$$v_{ng}^+ = 0 \text{ при } t = t_r^+ \tag{5.2}$$

$$\dot{p}_n^+ < 0, v_{ng}^+ < 0, \dot{v}_{ng}^+ < 0 \text{ для } t > t_r^+$$

Если $0 < a_0^8 < g_n(0)$, то также найдется такое $t_r^- > 0$, что выполняются соотношения, аналогичные (5.2) при замене индекса плюс на индекс минус и перемене знака неравенства для p_n^- на противоположный. Таким образом, если выполняется неравенство (5.1), то один из n^{\pm} -х пакетов отражается от некоторой образующей $\varphi_{nr}^{\pm} = q_n^{\pm}(t_r^{\pm})$, определяемой из уравнения

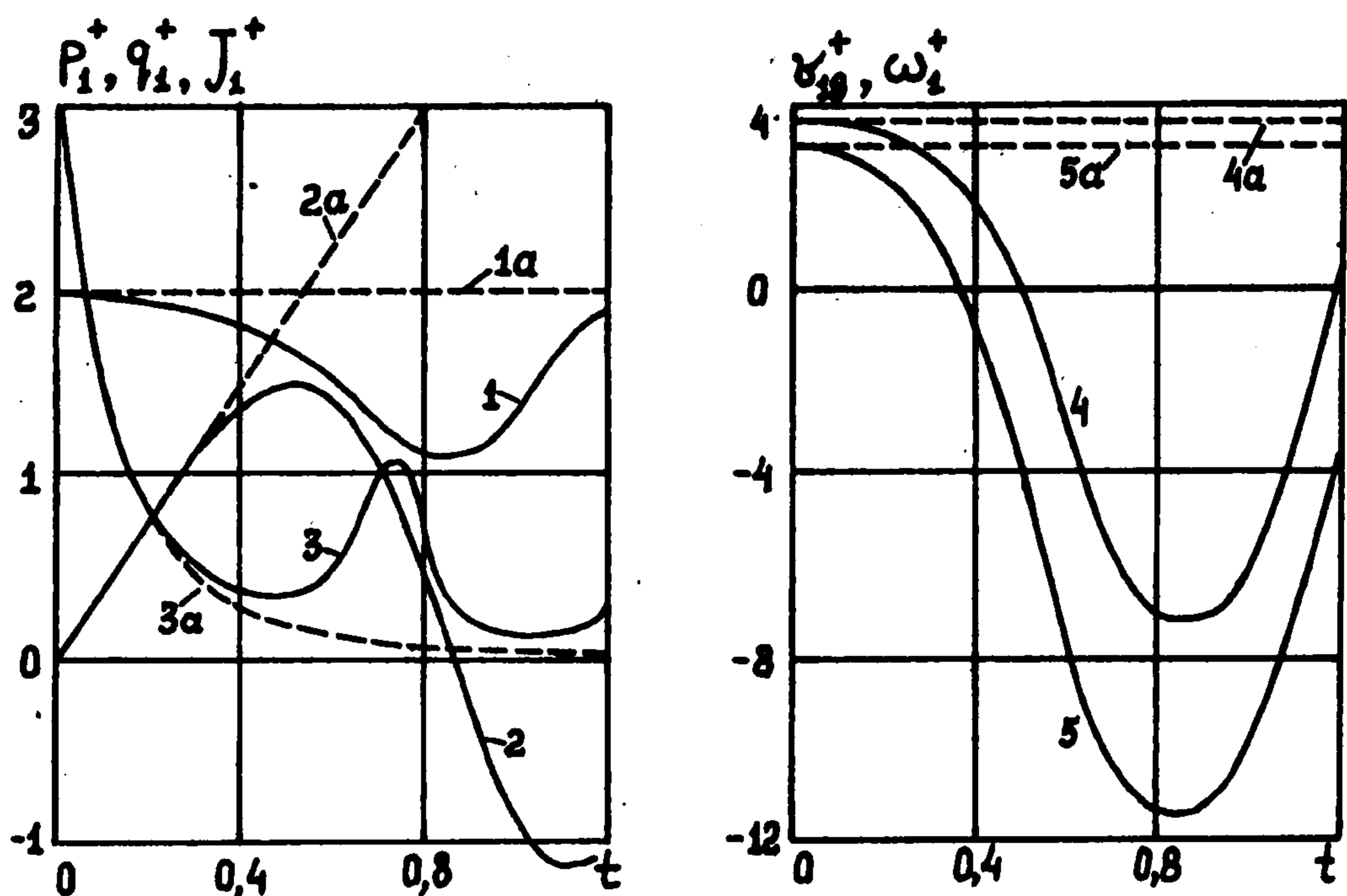
$$H_n^0 = [4\lambda_n(\varphi)k^2(\varphi)]^{1/4}$$

И наконец, в случае $a_0^8 = g_n(0)$ при условии (5.1) движение обоих n^{\pm} -х пакетов в сторону возрастания функции $g_n(\varphi)$ невозможно.

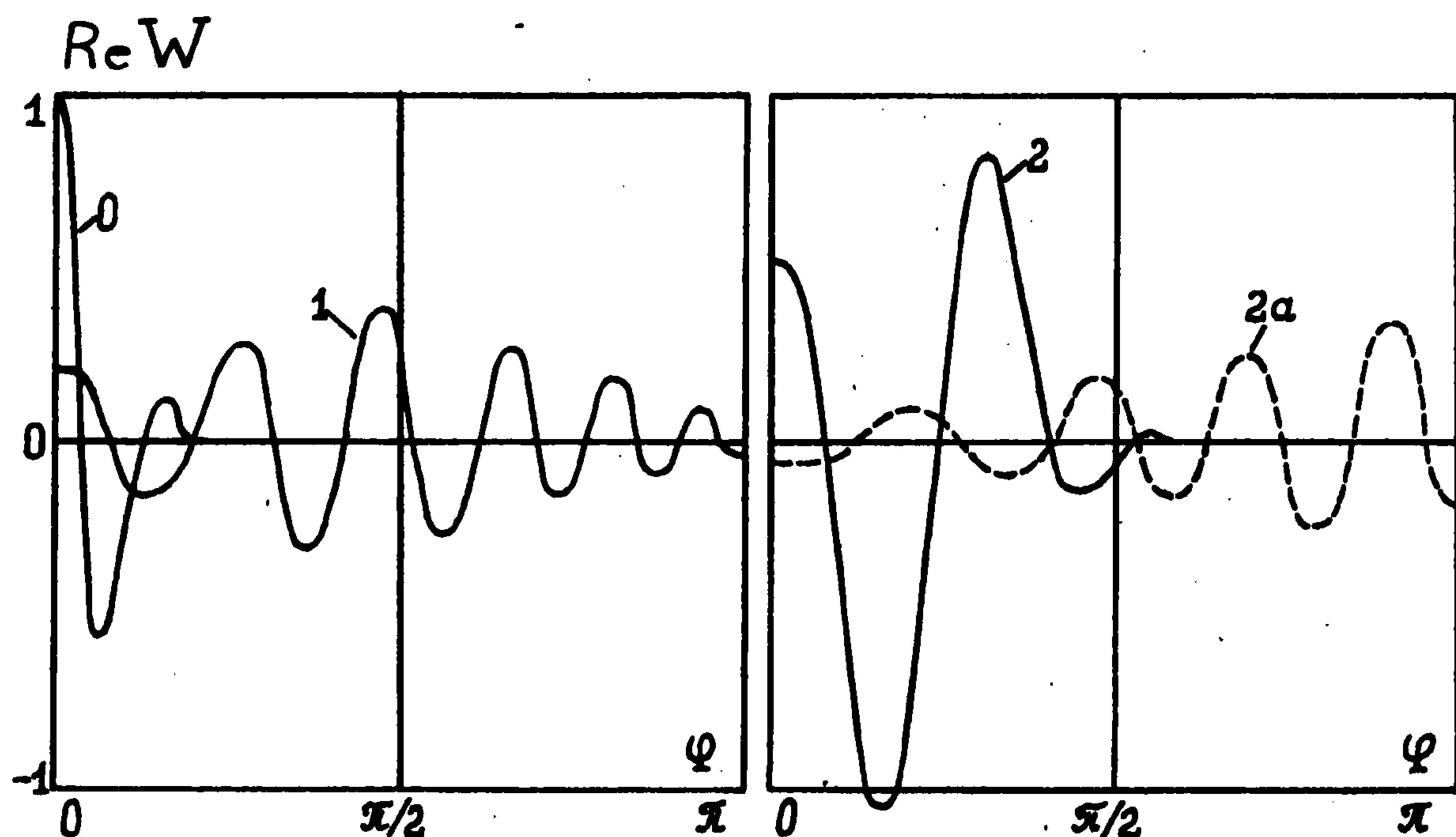
3°. Особый интерес представляет случай наличия на поверхности оболочки "наиболее слабой" [8] образующей $\varphi = 0$, для которой $g'_n(0) = 0$, $g''_n(0) > 0$. В окрестности этой образующей локализируются формы

$$W = z_n^0 \exp\{i\varepsilon^{-1}[\omega_n^w t + p_n^w \varphi + 1/2 b_n^w \varphi^2]\} \tag{5.3}$$

свободных колебаний с наименьшей частотой $\omega_n^w = H_n^w + \varepsilon\chi/2$ при n числе полуволи вдоль образующей. Здесь $\chi = [H_{pp}^w H_{qq}^w - (H_{pq}^w)^2]^{1/2}$. Индекс w указывает на то, что зна-



Фиг. 1



Фиг 2

чения функции H_n и ее производных берутся при $p = p_n^w = g_n^{1/8}(0)$, $q = q_n^w = 0$ (на "наиболее слабой" образующей). Заметим, что p_n^w, q_n^w, b_n^w находятся из уравнений (3.5) и (3.7) соответственно, в которых следует взять $\dot{p}_n, \dot{q}_n, \dot{b}_n$ тождественно равными нулю.

Если $a_0 \neq p_n^w$ и выполняется неравенство (5.1), то n^\pm -е пакеты совершают колебательные движения около "наиболее слабой" образующей, многократно отражаясь от линий $\varphi = \varphi_{nr}^\pm$.

Пусть теперь $a_0 = p_n^w$. Тогда из (3.5) получаем $p_n = p_n^w, q_n = 0$ для любого $t \geq 0$, что указывает на отсутствие эффекта расщепления начального n -го пакета (2.4). Если $b_0 \neq b_n^w$, то $b_n(t)$ – функция времени, а при $b_0 = b_n^w$ получаем $b_n = b_n^w$ для любого $t \geq 0$. В последнем случае n -й пакет совершает движения, совпадающие, с точностью до амплитуды, с собственной формой (5.3) колебаний оболочки.

Таким образом наличие "наиболее слабой" образующей может приводить к локализации волновых форм движения оболочки в окрестности этой образующей.

6. Пример. Рассмотрим шарнирно опертую круговую цилиндрическую оболочку с косым краем. Пусть

$$k = 1, \quad s_1 = 0, \quad l = s_2(\varphi) = l_0 + \operatorname{tg}\beta \cos\varphi$$

$$W_0^* = w_{n0}^{\circ} \sin(\pi n s / l), \quad V_0^* = v_{n0}^{\circ} \sin(\pi n s / l)$$

где β – угол наклона края, n – натуральное число, $l_0, w_{n0}^{\circ}, v_{n0}^{\circ}$ – постоянные. Тогда $\lambda_n(\varphi) = (\pi n / l) \cos\varphi$, $z_n(s, \varphi) = \sin(\pi n s / l)$. В данном случае начальный волновой пакет расположен на "наиболее слабой" образующей $\varphi = 0$ длиной $l_0 + \operatorname{tg}\beta$. Были проведены расчеты при $h/R = 4 \cdot 10^{-3}$, $l_0 = 1$, $R = 50$ см, $\nu = 0,3$, $E = 6,24 \cdot 10^{-7}$ кг/(см · с²), $\rho = 1,18 \cdot 10^{-3}$ кг/см³, $a_0 = 2$, $b_0 = 3$, $n = 1$, $\beta = 30^\circ$, $w_{n0}^{\circ} = 1, v_{n0}^{\circ} = 0$. Для рассматриваемых значений параметров выполняются неравенства (5.1) и $a_0^8 > g_1(0)$.

На фиг. 1 цифрами 1–5 отмечены графики функций $p_1^+(t), q_1^+(t), J_1^+(t) = \operatorname{Im} b_1^+(t), v_{1g}^+(t), \omega_1^+(t)$ соответственно. Для сравнения штриховыми линиями 1а–5а изображены графики тех же функций для оболочки с прямым краем $s_2 = l_0 + \operatorname{tg}30^\circ$. Кривые 1–5 указывают на полное соответствие поведения 1⁺-го пакета с ранее проведенным качественным анализом построенного решения: первоначально пакет, двигаясь в сторону убывания длины образующей, расплывается, затем, в момент времени $t = 0,51$, происходит его отражение от образующей $\varphi_{1r}^+ = 1,45$ с последующей фокусировкой.

Картина волнообразований на поверхности оболочки в сечении $s = l(\varphi)/2$ показана на фиг. 2. Цифрами 0–2 отмечены волны при $t = 0, t = 0,4$ (до отражения пакета) и $t = 0,75$ (после отражения в момент фокусировки) соответственно. Штриховой линией 2а отмечено решение при $t = 0,75$ для оболочки с прямым краем $s_2 = l_0 + \operatorname{tg}30^\circ$. Видно, что наличие косого края приводит к увеличению амплитуды волн отраженного пакета.

Погрешность предложенного здесь метода сильно зависит от соотношения входящих в задачу параметров. В частности, если оболочка имеет косой край, то погрешность возрастает с увеличением угла β и (или) уменьшением числа b_0 . Это объясняется тем, что решение (2.3), (4.1) точно удовлетворяет граничным условиям на косом краю лишь на образующих $\varphi = q_n^\pm(t)$ и приближенно, с точностью до $O(\varepsilon^{1/2})$, вдали от них. Погрешность в удовлетворении краевым условиям на косом краю приводит к накоплению ошибок при вычислении амплитуды волн (см. (3.9)) при больших значениях t .

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасёв Г.И. О распространении изгибных волн в цилиндрической оболочке // Вестник СПб ун-та. Сер. 1. 1933. Вып. 2. № 8. С. 99–103.
2. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.
3. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. Киев: Выща шк., 1989. 208 с.
4. Товстик П.Е. Полубезмоментные формы потери устойчивости цилиндрических и конических оболочек // Тр. 14-ой Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси. 1987. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 2. С. 501–506.
5. Михасёв Г.И., Товстик П.Е. Устойчивость конических оболочек под действием внешнего давления // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 99–104.
6. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
8. Товстик П.Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 815–822.
9. Михасёв Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 9. С. 50–55.
10. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 271 с.

Витебск

Поступила в редакцию
18.VII.1994