**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА** **Том 60, Вып.4, 1996**

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. **С.А. Егорушкин, Г.В. Шубин**

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача о линейной устойчивости быстрых плоских продольных ударных волн (УВ) в изотропном упругом теле, упругий потенциал которого – заданная функция инвариантов тензора деформаций, аддитивно зависящая от энтропии. Когда среда находится в состоянии одноосного сжатия или растяжения, полученное дисперсионное уравнение удается разложить на множители. В предположении о том, что перед УВ среда находится в состоянии одноосного сжатия (растяжения), получены достаточные условия неустойчивости продольных УВ. В случае, когда среда перед УВ находится в состоянии одноосного растяжения, а скорость УВ такова, что деформации за УВ близки к нулю и много меньше деформаций перед УВ, задача о линейной устойчивости решена полностью, т.е. выписаны необходимые и достаточные условия существования устойчивых, неустойчивых и нейтрально устойчивых УВ. Все полученные результаты остаются верны, если рассматривать случай среды с трансверсальной анизотропией (направление оси изотропии в которой совпадает с направлением распространения УВ), а также если среда изотропная и находится в состоянии сжатия (растяжения) в направлении двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости перпендикулярной оси распространения УВ, причем деформации по направлениям этих осей равны.

**1. Вывод уравнения для собственных частот.** Рассмотрим плоскую продольную УВ, распространяющуюся с постоянной лагранжевой скоростью $W_0$ по частицам в изотропной упругой среде, упругий потенциал которой $\Phi$ – некоторая функция инвариантов $I_k$ тензора деформаций $\varepsilon_{ij}$ аддитивно зависящая от энтропии. Последнее предположение справедливо для УВ не слишком большой интенсивности и соответствует общепринятому [1] разложению $\Phi$ по степеням $I_k(I_1=\varepsilon_{ii},\ I_2=\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik},\ I_3=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki})$ до четвертого порядка по степеням $\varepsilon_{ij}$ включительно. Пусть вектор $W_0$ перпендикулярен плоскости УВ и направлен вдоль оси $\xi_3$ некоторой прямоугольной декартовой системы координат ($\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$). Среди компонент тензора деформаций в области перед УВ может быть отлична от нуля только компонента $\varepsilon_{33}$, которая считается постоянной. Система координат ($\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$) в начальный момент совпадает с лагранжевой за УВ. Прохождение УВ по среде приводит к сжатию вдоль оси $\xi_3$, т.е. направления осей лагранжевой системы координат и выбранной здесь системы координат ($\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$) совпадают до и за фронтом УВ.

Уравнения движения описанной выше среды запишутся в виде [1]:

$$\rho_0\frac{\partial V_j^n}{\partial t}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial U_{ij}},\quad \frac{\partial U_{ij}^n}{\partial t}=\frac{\partial V_i^n}{\partial\xi_j},\quad i,j=1,\ldots,3;\quad n=1,2 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{V}^n=\{V_1^n,V_2^n,V_3^n\}$ – вектор скорости среды, $U_{ij}^n$ – компоненты тензора градиента перемещений, $\rho_0$ – плотность, верхний индекс соответствует состояниям до ($n = 1$) и за ($n = 2$) УВ.

Уравнения (1.1), образуя систему гиперболических квазилинейных уравнений первого порядка, могут обладать решениями, содержащими поверхности сильного разрыва, на которых выполняются условия

$$W[U_{ij}] + [V_i]n_j = 0 \tag{1.2}$$

$$\rho_0 W[V_i] + [\partial\Phi / \partial U_{ij}]n_j = 0 \quad ([f] = f^2 - f^1)$$

($\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ – вектор нормали к поверхности разрыва, $W$ – скорость разрыва).

Для плоской УВ, распространяющейся с постоянной скоростью $W_0$ вдоль оси $\xi_3$, условия (1.2) приводят к соотношениям

$$\rho_0 W_0^2 [U_{i3}] = [\partial\Phi / \partial U_{i3}] \tag{1.3}$$

связывающим деформированные состояния до и за УВ. Из (1.3) следует, что если $U_{i3}^{\langle 1\rangle} \neq 0$ только при $i = 3$, то существует решение, при котором и за УВ отличной от нуля будет только компонента $U_{33}^{\langle 2\rangle}$ тензора градиента перемещений.

Для исследования устойчивости УВ перейдем в подвижную систему координат $\{X_1, X_2, X_3\}$ движущуюся вместе с УВ и такую, что $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \xi_2$, $X_3 = \xi_3 - W_0 t$. Тогда область $X_3 > 0$ соответствует состоянию перед УВ, а область $X_3 < 0$ – за УВ.

Рассмотрим слабые возмущения поверхности УВ, описываемые уравнением $X_3 - \varepsilon\chi(X_1, X_2, t) = 0$, $\varepsilon \ll 1$, где $\chi = \chi_0' \exp(-i\Omega t + ik_1 X_1 + ik_2 X_2)$. Тогда возмущения физических величин можно искать в виде

$$\mathbf{U} = (\mathbf{V}', \mathbf{U}') = (\mathbf{V}_0', \mathbf{U}_0') \exp(-i\Omega t + i(\mathbf{k}\mathbf{X})) \tag{1.4}$$

где $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ – волновой вектор, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

При решении поставленной задачи достаточно ограничиться возмущениями только такого вида [2].

В силу эволюционности рассматриваемого быстрого разрыва, возмущения физических величин в области перед УВ являются приходящими, и их можно считать отсутствующими. В области за УВ малые возмущения удовлетворяют соотношениям, получающимся в результате линеаризации системы (1.1), после записи ее в подвижных координатах $\{X_1, X_2, X_3\}$. С учетом (1.4) эти соотношения можно записать в виде

$$-\omega U_{lj}' = k_j V_l', \qquad -\rho_0 \omega V_j' = k_l A_{ljsp} U_{sp}' \tag{1.5}$$

$$A_{ljsp} = \partial^2\Phi / \partial U_{lj} \partial U_{sp}, \qquad \omega = \Omega + W_0 k_3$$

Система линейных уравнений (1.5) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Это условие приводит к соотношению между частотой $\Omega$ и компонентами $k_j$ волнового вектора $\mathbf{k}$

$$[(A_{3333}k_3^2 + A_{3131}k_\tau^2 - \rho_0\omega^2)(A_{1313}k_3^2 + A_{1111}k_\tau^2 - \rho_0\omega^2) -$$

$$-c_0^2 k_3^2 k_\tau^2](A_{1313}k_3^2 + A_{1212}k_\tau^2 - \rho_0\omega^2) = 0 \tag{1.6}$$

$$c_0 = A_{1331} + A_{1133}$$

Подчеркнем, что коэффициенты дисперсионного уравнения (1.6) зависят только от величины $k_\tau^2$ и не зависят от компонент волнового вектора $k_1$ и $k_2$ по отдельности. Это связано с отсутствием поперечных деформаций в области за УВ, в силу чего все направления, тангенциальные плоскости УВ волны, являются равноправными и скорости распространения слабых возмущений зависят только от угла между волновым вектором $\mathbf{k}$ и осью $X_3$.

На УВ величины ($\mathbf{V}'$, $\mathbf{U}'$) удовлетворяют линейным краевым условиям, которые получаются после подстановки в систему (1.2) разложений

$$W = W_0 + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad U_{ij} = U_{ij}^{\langle 2 \rangle} + \varepsilon U'_{ij}$$

$$V_j = V_j^{\langle 2 \rangle} + \varepsilon V'_j, \quad n = \left\{ -\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \ -\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \ 1 \right\}$$

и удержании с учетом (1.3) членов порядка ε. Принимая во внимание условие (1.4), получим систему

$$-2\rho_0 W_0 i\Omega \chi'_0 [U_{33}^0] = U'_{33}[A_{3333}^{<2>} - \rho_0 W_0^2] + A_{3311}^{<2>} U'_{11} + A_{3322}^{<2>} U'_{22}$$

$$\rho_0 W_0^2 U'_{j3} = -[\partial \Phi / \partial U_{jj}] i k_j \chi'_0 + A_{j3j3}^{<2>} U'_{j3} + A_{j33j}^{<2>} U'_{3j}$$

$$W_0 U'_{j3} + V'_i = 0, \quad W_0 U'_{33} - i\Omega \chi'_0 [U_{33}^0] + V'_3 = 0 \tag{1.7}$$

$$U'_{1j} = U'_{2j} = 0, \quad U'_{3j} + i k_j \chi'_0 [U_{33}^0] = 0, \quad j = 1,2$$

из 12 уравнений, связывающих значения 13 неизвестных $U'_{ij}$, $V'_j$, $\chi'_0$ на УВ. Для замыкания системы воспользуемся следующим обстоятельством. Дисперсионное уравнение (1.6) имеет шесть корней $k_{3n} \equiv k_{3n}(\Omega, k_\tau^2)$, $(n = 1,\ldots,6)$, соответствующих продольным и поперечным звуковым волнам, из которых, в силу эволюционности УВ, только одна продольная приходит на разрыв (перед фронтом УВ нет возмущений, так как рассматриваемая УВ быстрая).

Будем считать, что $U_{ij}$, $V_j$ ограниченны при $X_3 \to -\infty$ и в момент $t = 0$ возмущена только поверхность разрыва, а возмущения решений в областях до и за разрывом равны нулю. В силу этого на УВ должно выполняться соотношение [3], которое означает отсутствие приходящих возмущений. Для получения этого соотношения запишем линеаризованную исходную систему (1.1) в виде

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0}\left( \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_3} + \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_2} + \mathbf{G}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} \right) = 0 \tag{1.8}$$

($\mathbf{U}$ – вектор, составленный из значений компонент вектора $\mathbf{V}$ и тензора $\mathbf{U}$).

Применим к системе (1.8) преобразование Лапласа по переменным $t$, $X_3$ и преобразование Фурье по переменным $X_1$ и $X_2$. Тогда, учитывая краевые условия на УВ и совершая обратное преобразование Лапласа, найдем

$$\mathbf{U}(x_3) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}}_0(\Omega, k_3, k_2, k_1)}{i(k_3\mathbf{H} + k_2\mathbf{F} + k_1\mathbf{G} + \rho_0\Omega\mathbf{E})} e^{-ik_3x_3} dk_3 \tag{1.9}$$

где $\hat{\mathbf{U}}_0$ – значение $\hat{\mathbf{U}}$ на УВ.

Решение (1.9) определяется полюсами подынтегрального выражения. Однако приходящие волны не должны вносить вклад в решение, так как при $X_3 \to -\infty$ величины $U_{ij}$, $V_j$ ограничены.

Пусть $\mathbf{L}$ – левый собственный вектор, соответствующий приходящей продольной волне, т.е. ($\mathbf{L}$ $(k_3\mathbf{H} + k_2\mathbf{F} + k_1\mathbf{G} + \rho_0\Omega\mathbf{E}) = 0$). Решение (1.9) будет существовать, если

$$(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}}_0, \mathbf{L}) = 0 \tag{1.10}$$

Это и есть дополнительное соотношение, замыкающее систему (1.7). Для существования нетривиального решения системы (1.7), (1.10) ее определитель должен равняться нулю. Это условие приводится к соотношению для определения собственной частоты Ω. Тем самым решается задача об устойчивости УВ. Когда $c_0 \neq 0$, указанное условие имеет вид

$$D(\Omega, k_3, k_\tau^2) \equiv c_1 \rho_0 \omega^2 + c_2 k_\tau^2 + c_3 k_3^2 = 0 \tag{1.11}$$

$$c_1 = -(A_{1133}[U_{33}^0] - [\partial\Phi / \partial U_{11}]), \quad c_2 = -A_{1313} c_1$$

$$c_3 = c_0 d_3 [U_{33}^0] - A_{3333} c_1, \quad d_j = (W_0^2 \rho_0 - A_{j3j3})$$

(значения $A_{ijsq}$ берутся за фронтом УВ).

Если же выполняется соотношение $c_0 = 0$, то условие равенства нулю определителя системы (1.7), (1.10) сводится к выражению $\omega k_3 [U_{33}^0] d_3 = 0$. Это означает, что точка на ударной адиабате, соответствующая такому разрыву, является точкой Жуге. Поэтому далее будем полагать, что условие $c_0 = 0$ не выполнено.

Если уравнение (1.11) имеет корень $\Omega$, мнимая часть которого положительна, то возмущения нарастают со временем и УВ неустойчива. При $\operatorname{Im} \Omega < 0$ УВ устойчива. Если же $\operatorname{Im} \Omega = 0$, то возмущения остаются ограниченными и имеет место режим нейтральной устойчивости. Трудность решения уравнения (1.11) определяется тем, что входящая в него ветвь дисперсионного уравнения $k_3 \equiv k_3(\Omega, k_\tau^2)$ представляет собой довольно сложную алгебраическую функцию комплексной переменной $\Omega$.

**2. Асимптотические свойства уравнения для собственных частот.** Пространством определяющих параметров задачи (1.5), (1.7) назовем некоторый полный набор независимых безразмерных комплексов $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$, образуемых физическими постоянными, входящими в эту задачу. Пространство $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ может быть представлено в виде прямой суммы подобластей размерности $N$, во внутренних точках каждой из которых решение задачи (1.5), (1.7) либо устойчиво, либо неустойчиво, либо нейтрально устойчиво [2]. На поверхностях $G_\alpha(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = 0$, служащих границами этих подобластей, происходит смена асимптотического поведения решения.

Было показано [2], что если компоненты волнового вектора $k_1$, $k_2$ входят в функцию $D$ только в виде комбинации $k_\tau^2 = k_1^2 + k_2^2$, то одна из поверхностей $G_\alpha$, ограничивающих область неустойчивости, соответствует переходу через бесконечность пары действительных корней $\Omega$ функции $D$ на мнимую ось $\operatorname{Re} \Omega = 0$. (В газовой динамике, например, эта граница определяется соотношением $\delta = -1 - 2\mathrm{M}$, где $\delta$ – безразмерная производная вдоль ударной адиабаты, а M – число Маха за УВ [4].)

Действительно, при $\Omega \to \infty$ зависимость $k_3 = k_3(\Omega, k_\tau^2)$ становится, в главном по $|k_\tau / \Omega|$ члене, линейной и функция $D(\Omega, k_\tau^2)$ превращается в полином

$$D(\Omega, k_\tau^2) = b_0 \Omega^2 + b_1 k_\tau^2 + O(k_\tau^2 / \Omega^2) = 0 \tag{2.1}$$

При $b_0 \to 0$ одна из пар корней функции $D$ имеет асимптотику

$$\Omega = \pm(-b_1 / b_0)^{1/2} |k_\tau|$$

которая соответствует описанному выше переходу к неустойчивости, если в качестве поверхности $G_\alpha$ взять поверхность $b_0(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = 0$. Таким образом, условие $b_0(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = 0$ является достаточным условием неустойчивости УВ.

Для построения поверхности $G_\alpha$ заметим, что при $\Omega \to \infty$ задача о распространении малых возмущений становится, в главном по $k_\tau/\Omega$ члене, одномерной. Поэтому для приходящей на разрыв продольной звуковой волны справедливо соотношение

$$k_3 = \Lambda_1 - \Lambda_2 \frac{k_\tau^2}{\Omega^2}$$

$$\Lambda_1 = \frac{\Omega}{a_0 - W_0}, \quad \Lambda_2 = \frac{\{c_0^2 - A_{1313}(A_{3333} - A_{1313})\}}{2(A_{3333} - A_{1313}) A_{3333}} a_0, \quad a_0 = \left(\frac{A_{3333}}{\rho_0}\right)^{1/2}$$

Подставляя эту асимптотику в (1.11), получим

$$b_0 = c_0 d_3 [U_{33}^0] / (a_0 - W_0)^2$$

$$b_1 = A_{1313}\left(A_{1133}[U_{33}^0] - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial U_{11}}\right]\right) - 2\Lambda_1\Lambda_2 d_3\left(A_{1331}[U_{33}^0] - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial U_{11}}\right]\right)$$

(значения тензора $A_{ijsq}$ берутся за фронтом УВ).

Видно, что условие $b_0 = 0$ не выполняется при сделанных предположениях. Таким образом, не существует поверхности перехода к неустойчивости при $\Omega \to 0$.

Покажем, что при $\Omega \to 0$ в пространстве определяющих параметров задачи может существовать поверхность, на которой происходит переход к неустойчивости.

При $\Omega \to 0$ решение дисперсионного уравнения (1.6) можно представить в виде

$$k_3 = k_\tau(m_1 + m_2\Omega / k_\tau + O(\Omega^2 / k_\tau^2)) \tag{2.2}$$

где приходящей волне соответствует

$$m_1^2 = (b + \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a)$$

$$a = d_1 d_3, \quad b = A_{1111}d_3 + A_{1313}d_1 + c_0^2, \quad c = A_{1111}A_{1313}$$

Величины $a < 0$, $c > 0$, поэтому всегда $m_1^2 < 0$. Это означает негиперболичность системы линеаризованных уравнений упругости при малых $\Omega$. Подставив выражение (2.2) в условие (1.11), получим

$$D = s_0 + s_1\Omega / k_\tau + O(\Omega^2 / k_\tau^2) \tag{2.3}$$

$$s_0 = A_{1313}\left(A_{1133}[U_{33}^0] - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial U_{11}}\right]\right) + m_1^2 d_3\left(A_{1331}[U_{33}^0] + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial U_{11}}\right]\right)$$

$$s_1 = 2m_1\rho_0 W_0\left(\left[\frac{\partial\Phi}{\partial U_{11}}\right] - A_{1133}[U_{33}^0]\right) + m_2 d_3\left(A_{1331}[U_{33}^0] + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial U_{11}}\right]\right)$$

Из равенства (2.3) следует, что $\Omega = -s_0 s_1^{-1} k_1$. Так как $m_1$ – мнимая величина, то $s_1 = s_{11} + is_{12}$, $s_{12} \neq 0$, и на поверхности $s_0 = 0$ будет происходить переход к неустойчивости, причем

$$\operatorname{Im}\Omega = \operatorname{Im}\left(-\frac{s_0}{s_1}k_\tau\right) = k_\tau \frac{s_{12}s_0}{s_{11}^2 + s_{12}^2}$$

Поэтому с той стороны поверхности $s_0 = 0$, где $s_{12}s_0 > 0$, гарантирована неустойчивость.

**3. Об устойчивости УВ специального вида.** Рассмотрим УВ, скорость распространения которых $W_z$ некоторым определенным образом связана с величиной $U_{33}$. Предположим, что состояние среды за УВ, определяемое из соотношений (1.3), является недеформированным, т.е.

$$U_{33}^{\langle 2\rangle} \equiv U_{33}^{\langle 2\rangle}(U_{33}^{\langle 1\rangle}, W_z) = 0 \quad (\partial\Phi / \partial U_{ij})^{\langle 2\rangle} = 0 \tag{3.1}$$

При этом

$$W_z = W_z(U_{33}^{\langle 1\rangle}) = \left[\frac{1}{\rho_0 U_{33}^{\langle 1\rangle}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial U_{33}}\right)^{\langle 1\rangle}\right]^{1/2} \tag{3.2}$$

Поэтому для заданного начального значения $U_{33}^{\langle 1\rangle}$ найдется эволюционная УВ, удовлетворяющая условию (3.1), если для $W_z$ выполнены условия эволюционности (или неравенства Лакса)

$$A_{1313}^{\langle 2\rangle} < \frac{1}{U_{33}^{\langle 1\rangle}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial U_{33}}\right)^{\langle 1\rangle} < A_{3333}^{\langle 2\rangle}, \quad \frac{1}{U_{33}^{\langle 1\rangle}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial U_{33}}\right)^{\langle 1\rangle} > A_{3333}^{\langle 1\rangle} \tag{3.3}$$

Из выполнения второго неравенства (3.3) следует, в частности, что подкоренное выражение в (3.2) будет больше нуля.

При $U_{33}^{\langle 2\rangle} = 0$ все направления в среде за фронтом УВ равноправны. Дисперсионное уравнение (1.6) упрощается и принимает вид

$$(k_\tau^2 + k_3^2 - \alpha_1^2)^2(k_\tau^2 + k_3^2 - \alpha_3^2) = 0, \quad \alpha_j^2 = \rho_0\omega^2 / A_{j3j3} \tag{3.4}$$

Дисперсионное уравнение (3.4) имеет шесть корней, четыре из которых $(k_\tau^2 + k_3^2 = \alpha_1^2)$ соответствуют поперечным, а два $(k_\tau^2 + k_3^2 = \alpha_3^2)$ – продольным волнам. Из последней зависимости следует, что в приходящей продольной волне

$$k_3(\Omega_0) = \frac{\Omega_0 M^2 + [\Omega_0^2 M^2 - (1 - M^2)k_\tau^2]^{1/2}}{1 - M^2} \tag{3.5}$$

$$\Omega_0 = \frac{\Omega}{W_z}, \quad M^2 = \frac{\rho_0 W_z^2}{A_{3333}} < 1$$

Подставляя выражение (3.5) в уравнение (1.11) и учитывая, что при $U_{33}^{\langle 2\rangle} = 0$ выполнены равенства

$$A_{1331} + A_{1133} = A_{3333} - A_{1313}, \quad A_{1111} = A_{3333}$$

получим

$$D(\Omega_0) = \Omega_0^2(1 + M^2) + 2\Omega_0[\Omega_0^2 M^2 - (1 - M^2)k_\tau^2]^{1/2} - \sigma(1 - M^2)k_\tau^2 = 0 \tag{3.6}$$

$$\sigma = [(\partial\Phi / \partial U_{11}) / U_{33}^1 - A_{1133} + A_{3333}] / (\rho_0 W_z^2)$$

причем для волн слабой интенсивности $\sigma \approx 1$.

Было показано [2], что границы между различными режимами устойчивости соответствуют следующим случаям.

1°. Граница между нейтральной устойчивостью и неустойчивостью реализуется при переходе корня уравнения (3.6) через $\infty$. При этом граница между режимами (см. выше) не реализуется.

2°. Граница между нейтральной устойчивостью и устойчивостью возникает, когда точка ветвления функции $k_3(\Omega_0)$ является корнем функции $D(\Omega, k_\tau)$. Уравнение такой поверхности в пространстве определяющих параметров будет таким:

$$1 + M^2 - \sigma M^2 = 0 \tag{3.7}$$

Если $1 + M^2 - \sigma M^2 > 0$, то УВ устойчива, иначе нейтрально устойчива. Это неравенство выполняется для УВ малой интенсивности.

3°. Переход от устойчивости к неустойчивости соответствует появлению кратных корней у функции $D(\Omega, k_\tau)$ на действительной оси или выходу корня из разреза, проведенного между точками ветвления функции $k_3(\Omega)$. Вторая возможность реализуется в точке $\Omega = 0$. Значение $\Omega = 0$ является корнем функции $D(\Omega, k_\tau)$ если $\sigma = 0$. Этот случай не реализуется для волн малой интенсивности, так как для них $\sigma \approx 1$.

Итак, если $\sigma < 0$, то УВ будет неустойчивой, если $0 < \sigma < (1 + M^2) / M^2$, то устойчивой, если $\sigma > (1+M^2)/M^2$, то нейтрально устойчивой. Из рассмотренного выше следует, что УВ малой интенсивности всегда устойчивы. В рамках рассматриваемой модели для УВ конечной интенсивности могут реализоваться (в зависимости от значения $\sigma$) различные режимы.

Например, если среда задается потенциалом

$$\Phi = 2\mu I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1408}{147}\mu I_1^3 + 40\mu I_2^2$$

и состояние перед волной $U_{33}^{\langle 1\rangle} = -1/4$ то при прохождении УВ со скоростью $W_z$, определяемой формулой (3.2), состояние за фронтом УВ будет $U_{33}^{\langle 2\rangle} = 0$. При этом параметр $\sigma = 0$ и выполнены условия эволюционности и положительности квадратов характеристических скоростей. Если $U_{33}^{\langle 1\rangle} = -0{,}24$, то $0 < \sigma < (1+M^2)/M^2$, и УВ устойчивая. Если $U_{33}^{\langle 1\rangle} = -0{,}26$, то $\sigma < 0$, и УВ неустойчивая.

Если среда задается потенциалом $\Phi = 0{,}1\mu I_1^2 + \mu I_2 - 0{,}1\mu I_1^3 - 0{,}2\mu I_2^2$ и состояние перед УВ $U_{33}^{\langle 1\rangle} = -0{,}3$, то при прохождении УВ со скоростью $W_z$, определяемой формулой (2.2), состояние за фронтом УВ будет $U_{33}^{\langle 2\rangle} = 0$. При этом параметр $\sigma > (1+M^2)/M^2$, и УВ будет нейтрально устойчивой.

В газовой динамике уравнение для частот возмущений имеет вид

$$\Omega^2(1+\delta) + 2\Omega[\Omega^2 M^2 - (1-M^2)k_\tau^2]^{1/2} - \sigma(\delta-1)k_\tau^2 = 0 \qquad (3.8)$$

где $\sigma = \rho_2/\rho_1 > 1$ – отношение плотности за скачком к плотности до скачка, $\delta$ – безразмерная производная вдоль ударной адиабаты, $M$ – число Маха за УВ.

Наличие дополнительного параметра $\delta$, в отличие от (3.6), связано с учетом энтропии в газовой динамике. Если рассматривать среды, для которых внутренняя энергия имеет вид

$$E(v,s) = E_1(v) + E_2(s) + \varepsilon E_3(v,s)$$

где $\varepsilon \ll 1$, $v$ – удельный объем, $s$ – энтропия, то можно показать, что параметр $\delta$ перестает быть независимым и становится равным $M^2$. При этом режим неустойчивости реализоваться не может, а граница между нейтральной устойчивостью и устойчивостью дается равенством (3.7).

Авторы благодарят А.Г. Куликовского за помощь в постановке задачи и ряд ценных идей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (MDM 000).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бленд Д.Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
2. *Егорушкин С.А., Куликовский А.Г.* Об устойчивости решений некоторых краевых задач для гиперболических уравнений // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 40–51.
3. *Gardner C.S., Kruskal M.D.* Stability of plane magnetohydrodynamic shocks // Phys. Fluids. 1964. V. 7. N 5. P. 700–706.
4. *Иорданский С.В.* Об устойчивости плоской стационарной ударной волны // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 465–472.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1995