УДК 539.3

© 1996 г. В.Я. Терещенко

О ВЗАИМОСВЯЗИ ФОРМУЛИРОВОК МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Устанавливается взаимосвязь формулировок МГЭ на основе граничных интегральных уравнений (ГИУ) и метода взвешенных невязок (МВН) [1, 2] с вариационными формулировками [3–11], применимыми для решения не только задач теории упругости, но и других задач математической физики.

Формулировка МГЭ на основе ГИУ по сути является численным методом решения этих уравнений: искомая плотность в точках граничного элемента аппроксимируется интерполянтами метода конечных элементов (МКЭ), ГИУ записывается для каждой узловой точки дискретной границы (метод коллокации). Таким образом, задача сводится к системе дискретных граничных уравнений (ДГУ) относительно узловых значений искомой плотности. Формулировка МГЭ на основе МВН использует сведение приближенного решения краевой задачи к решению задачи минимизации невязки удовлетворения граничных условий в точках дискретной границы. При этом используются известные интегральные соотношения на основе формул Грина, связывающие между собой значения функций в точках области и границы, которые записываются для аппроксимации интерполянтами МКЭ искомого решения и сингулярного (фундаментального) решения дифференциального уравнения краевой задачи.

Вариационные формулировки МГЭ, составляющие суть вариационного метода граничных элементов, используют задачи минимизации граничных функционалов (ГФ) или обобщенных функционалов Трефтца (ОФТ) исходных краевых задач на допустимых функциях в виде дискретных граничных потенциалов, плотность которых аппроксимируется интерполянтами МКЭ. Отношение вариационной формулировки МГЭ к формулировке на основе МВН очевидно: граничные вариационные уравнения, полученные в результате минимизации ГФ (или ОФТ), можно рассматривать как соотношения МВН для построенных гранично-элементных приближений "по Ритцу" решения задачи и заданных граничных значений.

Подобно слабым вариационным формулировкам МКЭ, когда реализуются "вариационные" уравнения типа уравнений Галеркина [12, 13], возможна слабая вариационная формулировка МГЭ. Для решения краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа такая формулировка использует непосредственную интерполяцию нормальной производной в точках дискретной границы и дискретное условие, соответствующее условию для нормальной производной гармонической функции, которое в формулировке "по Ритцу" á priori выполняется.

Ниже устанавливается (на примере решения задачи Сен-Венана), что ДГУ, получаемые в результате реализации слабой формулировки, тождественны ДГУ, к которым приводится реализация формулировки МГЭ на основе ГИУ, тем самым устанавливается взаимосвязь формулировок.

1. Задача Сен-Венана о кручении однородного изотропного стержня в постановке задач математической физики соответствует [14] неоднородной краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi(x)=0,\quad x\in G;\quad \partial_\nu\varphi|_S=f(y),\quad y\in S \tag{1.1}$$

$$f=y^{(2)}\cos(\boldsymbol{\nu},x^{(1)})-y^{(1)}\cos(\boldsymbol{\nu},x^{(2)})$$

Для решения указанной задачи может быть использован классический аппарат теории потенциала: искомое решение представляется в виде гармонического потенциала простого слоя (ППС) с неизвестной плотностью [15]

$$\varphi(x)=\int_S \psi(y)\ln\frac{1}{r}ds(y), \quad x\in\overline{G}, \quad y\in S \tag{1.2}$$

Здесь G – область сечения стержня с границей S, $r=|x-y|$. Следует отметить: φ существует в предположении, что S – достаточно гладкая граница (поверхность Ляпунова [15]) и ψ – непрерывная в точках S функция. В связи со сказанным напомним, что алгоритм МГЭ (непрямая формулировка [1, 2]) использует аппроксимирующий ППС в виде суммы интегралов по граничным элементам, в точках которых интерполяция плотности является непрерывной функцией.

В дальнейшем сохраняются обозначения [3, 7]: пусть Δs_n – линейный граничный элемент и $S_\Delta=\cup\Delta s_n$ ($n=1,\ldots,N$) – дискретная граница многоугольной области сечения стержня G_Δ; аппроксимирующий для (1.2) ППС в глобальных (декартовых) координатах $y=(y^{(1)},y^{(2)})$ имеет вид

$$\varphi_N(x)=\int_{S_\Delta}\psi_\Delta(y)\ln\frac{1}{r_\Delta}ds_\Delta(y)=\sum_{n=1}^{N}\int_{\Delta s_n}\psi_n(y)\ln\frac{1}{r_n}ds(y_n), \quad x\in\overline{G}_\Delta \tag{1.3}$$

где $y_n^{(i)}(\eta)$ ($i=1, 2$) – связь в точках Δs_n глобальных координат и локальной координаты $\eta\in[-1, 1]$ линейного элемента

$$y_n^{(i)}(\eta)=\sum_{k=1}^{2}Y_{nk}^{(i)}\psi_k=\overset{+}{Y}{}_n^{(i)}+\overline{Y}{}_n^{(i)}\eta \tag{1.4}$$

$$\overset{+}{Y}{}_n^{(i)}=\frac{1}{2}(Y_{n1}^{(i)}+Y_{n2}^{(i)}), \quad \overline{Y}{}_n^{(i)}=\frac{1}{2}(Y_{n2}^{(i)}-Y_{n1}^{(i)})$$

Здесь $Y_{nk}^{(i)}$ ($i=1, 2$) – декартовые координаты узлов Δs_n.

В общем случае узлы интерполяции плотности (функциональные узлы) могут не совпадать с геометрическими узлами $k=1, 2$, тогда при заданной интерполяции $\psi_n=\Sigma\Psi_{nk'}\psi'_{k'}(\eta)$, $k'=1,\ldots,K'$, где $\Psi_{nk'}$ – искомые узловые значения, а $\psi'_{k'}$ – базисные функции МГЭ, интеграл по Δs_n в (1.3) записывается в виде

$$\int_{-1}^{+1}\sum_{k'=1}^{K'}\Psi_{nk'}\psi'_{k'}\ln\frac{1}{r_n}|J_n|d\eta \tag{1.5}$$

где $|J_n|$ – якобиан (определитель матрицы Якоби) преобразования $y_n(\eta)$

$$|J_n|=\left\{\sum_{i=1}^{2}(\partial_\eta y_n^{(i)})^2\right\}^{1/2}=\left\{\sum_{i=1}^{2}(\overline{Y}{}_n^{(i)})^2\right\}^{1/2} \tag{1.6}$$

Рассмотрим самый простой случай (достаточность которого определяется согласованием интерполяций по порядку, см. ниже) постоянной интерполяции ψ_n, т.е. когда узел k' лежит посредине между узлами $k=1$ и $k=2$, при этом $\psi'_{k'}\equiv 1$ и узловое значение плотности обозначим Ψ_{n0} ($n=1,\ldots,N$). Для этого случая дискретное ГИУ в точках Δs_n запишется в виде

$$\pi\Psi_{n0}+\Psi_{n0}\int_{\Delta s_n}\partial_{\nu_n}(x)\left(\ln\frac{1}{r_n}\right)ds(y_n)=f_n(y_n) \tag{1.7}$$

где в левой части первое слагаемое соответствует узловому скачку нормальной производной аппроксимирующего ППС, а f_n – заданное значение нормальной производной в точках Δs_n. Вычисление интегрального коэффициента в (1.7) (как вклада элемента Δs_n) производится в глобальных координатах при пределах интегрирования от $Y_{n1}^{(i)}$ до $Y_{n2}^{(i)}$. При этом используется равенство

$$\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \ln r_n = \frac{x^{(i)} - y_n^{(i)}}{r_n^2}, \quad i = 1,2$$

и замена переменной интегрирования

$$dr_n = \frac{\partial r_n}{\partial y_n^{(i)}} dy_n^{(i)} = -\frac{x^{(i)} - y_n^{(i)}}{r_n} dy_n^{(i)}, \quad i = 1,2$$

Здесь $r_n = |x - y_n|$, $x \in S_\Delta$, $y_n \in \Delta s_n$, а также используются значения направляющих косинусов внешней нормали ν_n в точках Δs_n [7], см. (1.4), (1.6)

$$\cos\alpha_{1n} \equiv \cos(\nu_n, x^{(1)}) = \frac{\overline{Y}_n^{(2)}}{|J_n|}, \quad \cos\alpha_{2n} \equiv \cos(\nu_n, x^{(2)}) = -\frac{\overline{Y}_n^{(1)}}{|J_n|} \tag{1.8}$$

В итоге получаем $\forall n$

$$\int_{\Delta s_n} \partial_{\nu_n}(x)\left(\ln\frac{1}{r_n}\right) ds(y_n) = -(k_n - k_n^{-1}) \ln\frac{r_{n2x}}{r_{n1x}} \tag{1.9}$$

$$k_n = -\frac{\overline{Y}_n^{(2)}}{\overline{Y}_n^{(1)}}, \quad r_{nkx} = |x - Y_{nk}|, \quad x \in S_\Delta, \quad Y_{nk} \in \Delta s_n$$

Таким образом, при записи ДГУ для $x = Y_{m0}$ вклады граничного элемента Δs_n зависят от расстояния функционального узла Y_{m0} постоянной интерполяции плотности ψ_n от геометрических узлов Y_{nk} ($k = 1, 2$; $n = 1,..., N$). При аппроксимации в точках Δs_n заданного значения нормальной производной $f(y)$ (см. (1.1)) используется (1.4) и (1.6)

$$f_n = \frac{1}{|J_n|} \sum_{i=1}^{2} Y_{n0}^{(i)} \overline{Y}_n^{(i)}, \quad \forall n \tag{1.10}$$

В итоге систему ДГУ на основании дискретного ГИУ (1.7) с учетом (1.9) и (1.10) при постоянной функциональной интерполяции запишем в виде

$$\sum_{n=1}^{N} \Psi_{n0} a_{nm} = \sum_{n=1}^{N} f_n, \quad m = 1,\dots,N \tag{1.11}$$

где

$$a_{nm} = \pi + c_n \ln\frac{r_{n2Ym0}}{r_{n1Ym0}} \quad (c_n = k_n^{-1} - k_n)$$

– коэффициенты линейной алгебраической системы уравнений относительно узловых значений Ψ_{n0} плотности аппроксимирующего ППС.

Очевидно, для фиксированного m каждое слагаемое левой части (1.11) $\Psi_{n0}a_{nm}$ имеет смысл значений нормальной производной в точках Δs_n ($n = 1,..., N$), так как такой смысл имеет каждое слагаемое правой части (это следует также из дискретного ГИУ (1.7)). Сказанное служит обоснованием следующей интерполяционной задачи: пусть $\{\Psi_{n0}\}_{n=1,\dots,N}$ – решение системы (1.11), требуется определить узловые значения Φ_{nk} ($k = 1, 2$ – геометрические узлы Δs_n) интерполяции некоторой функции $\tilde{\varphi}_n(y)$, $y \in \Delta s_n$, нормальная производная которой в точках элемента Δs_n равна $\Psi_{n0}a_{nm}$ (при этом постоянная интерполяция ψ_n и линейная интерполяция $\tilde{\varphi}_n$ согласованы по порядку).

2. Для линейной интерполяции $\tilde{\varphi}_n(y_n(\eta)) = \Sigma\Phi_{nk}\psi_k$ ($k = 1, 2$) при вычислении нормальной производной $\partial_{\nu_n}\tilde{\varphi}_n$ используется [3, 7] дифференцирование функции $\psi_k(y_n(\eta))$ по правилу

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial y_n^{(i)}} = \frac{\partial\psi_k}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y_n^{(i)}}, \quad i = 1,2; \quad k = 1,2$$

При этом $\partial\eta / \partial y_n^{(i)} = (\partial y_n^{(i)} / \partial\eta)^{-1}$ и значения направляющих косинусов даются формулами (1.8). В итоге получаем

$$\partial_{\nu_n}\tilde{\varphi}_n = \frac{1}{|J_n|}\left(\frac{\partial_\eta y_n^{(2)}}{\partial_\eta y_n^{(1)}} - \frac{\partial_\eta y_n^{(1)}}{\partial_\eta y_n^{(2)}}\right)\sum_{k=1}^{2}\Phi_{nk}\partial_\eta\psi_k, \quad \left(\partial_\eta y_n^{(i)} = \frac{\partial y_n^{(i)}}{\partial\eta}\right)$$

Учитывая связь глобальных координат и координаты локальной (см. (1.4)), а также (1.11), получаем, что выражение в квадратных скобках в правой части последнего равенства равно

$$\overline{Y}_n^{(2)}(\overline{Y}_n^{(1)})^{-1} - \overline{Y}_n^{(1)}(\overline{Y}_n^{(2)})^{-1} = k_n^{-1} - k_n = c_n, \quad \forall n$$

Таким образом, интерполяция нормальной производной для линейной интерполяции функции $\tilde{\varphi}_n$ в точках Δs_n имеет вид

$$\partial_{\nu_n}\tilde{\varphi}_n = \frac{c_n}{|J_n|}\sum_{k=1}^{2}\Phi_{nk}\partial_\eta\psi_k, \quad \forall n \tag{2.1}$$

Для линейных базисных функций МГЭ (см. (1.4)) легко проверяется, что если для узловых значений выполняется равенство $\Phi_{n1} = \Phi_{n2} = \Phi_n$ (следовательно функция $\tilde{\varphi}_n = \Phi_n\Sigma\psi_k = \Phi_n$ – постоянная в точках Δs_n), то имеет место равенство

$$\partial_{\nu_n}\tilde{\varphi}_n = \frac{c_n}{|J_n|}\left(\frac{1}{2}\Phi_{n2} - \frac{1}{2}\Phi_{n1}\right) = 0$$

При учете (2.1) уравнения сформулированной выше интерполяционной задачи, запишем в виде

$$\frac{c_n}{2|J_n|}(\Phi_{n2} - \Phi_{n1}) = \Psi_{n0}a_{nm}, \quad \forall n,m \tag{2.2}$$

Алгоритм решения системы уравнений вида (2.2) относительно Φ_{nk} ($k = 1, 2$) использует условия межэлементной согласованности $\Phi_{n1} = \Phi_{(n-1)2}$, $\Phi_{n2} = \Phi_{(n+1)1}$ (таким образом, число искомых узловых значений Φ_{nk} равно числу известных из решения системы (1.11) значений Ψ_{n0}), а также условие для глобальной интерполяции (в точках S_Δ) нормальной производной (см. (2.1))

$$\sum_{n=1}^{N}\int_{\Delta s_n}\frac{c_n}{|J_n|}\sum_{k=1}^{2}\Phi_{nk}\partial_\eta\psi_k ds_n(y) = 0 \tag{2.3}$$

которое соответствует (см. ниже) условию для нормальной производной гармонической функции.

При учете (2.2) систему (1.11) запишем в виде

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{c_n}{2|J_n|}(\Phi_{n2} - \Phi_{n1}) = \sum_{n=1}^{N} f_n, \quad \forall m \tag{2.4}$$

В разд. 3 устанавливается, что система (2.4) тождественна системе ДГУ слабой вариационной формулировки МГЭ "по Галеркину".

Примечание. Вид интерполяции (2.1) может быть установлен соответственно условию (2.3) в глобальных координатах:

$$\int\limits_{\Delta s_n} \partial_{\nu_n}\tilde{\varphi}_n ds(y_n) = \sum_{k=1}^{2} \Phi_{nk} \int\limits_{\Delta s_n} \sum_{i=1}^{2} \partial_{y_n^{(i)}}\psi_k \cos\alpha_{in} ds(y_n)$$

Здесь интегралы при $i = 1, 2$ вычисляются единообразно, например при $i = 1$ имеем

$$\int\limits_{\Delta s_n} \partial_{y_n^{(1)}}\psi_k \cos\alpha_{1n} ds(y_n) = \int\limits_{Y_{n1}^{(1)}}^{Y_{n2}^{(1)}} \partial_{y_n^{(1)}}\psi_k \cos\alpha_{1n}\left(-\frac{dy_n^{(1)}}{\cos\alpha_{2n}}\right) =$$

$$= -\frac{\cos\alpha_{1n}}{\cos\alpha_{2n}}[\psi_k(y_n^{(1)} = Y_{n2}^{(1)}) - \psi_k(y_n^{(1)} = Y_{n1}^{(1)})]$$

Далее используем (1.8) и значения ψ_k в узлах $k = 1, 2$

$$\psi_1(Y_{n2}^{(1)}) = \psi_1(\eta = 1) = 0; \quad \psi_1(Y_{n1}^{(1)}) = \psi_1(\eta = -1) = 1$$

$$\psi_2(Y_{n2}^{(1)}) = \psi_2(\eta = 1) = 1; \quad \psi_2(Y_{n1}^{(1)}) = \psi_2(\eta = -1) = 0$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{2} \Phi_{nk} \int\limits_{\Delta s_n} \partial_{y_n^{(1)}}\psi_k \cos\alpha_{1n} ds(y_n) = \frac{\bar{Y}_n^{(2)}}{\bar{Y}_n^{(1)}}(\Phi_{n2} - \Phi_{n1}), \quad \forall n$$

Аналогичные вычисления при $i = 2$ дают в итоге

$$\int\limits_{\Delta s_n} \partial_{\nu_n}\tilde{\varphi}_n ds_n = c_n(\Phi_{n2} - \Phi_{n1}), \quad \forall n$$

Этот же результат получается и при интегрировании равенства (2.1) (с использованием равенства $ds(y_n) = |J_n| d\eta$)

$$\int\limits_{\Delta s_n} \partial_{\nu_n}\tilde{\varphi}_n ds(y_n) = \frac{c_n}{2|J_n|}(\Phi_{n2} - \Phi_{n1}) \int\limits_{-1}^{+1} |J_n| d\eta = c_n(\Phi_{n2} - \Phi_{n1}), \quad \forall n$$

3. Покажем, что плотность аппроксимирующего ППС (1.3) может быть построена при помощи численного процесса типа процесса Галеркина с использованием интерполяционных уравнений (2.2).

Напомним, что в методе Галеркина применяется условие ортогональности невязки удовлетворения дифференциальному уравнению краевой задачи к множеству координатных функций, удовлетворяющих всем граничным условиям задачи [14]. Имеется [14] видоизменение метода для случая естественных краевых условий, а также различные обобщения процесса Галеркина [14], которые используют указанную выше идею метода при различном выборе систем координатных функций: обобщение Петрова, метод разделения области, метод коллокации.

Здесь предлагается для приближенного решения задачи (1.1) в виде аппроксимирующего ППС (1.3) процесс нахождения плотности, использующий условие ортогональности невязки удовлетворения граничного условия задачи на базисных функциях МГЭ и дискретный аналог условия для нормальной производной гармонической функции. Численным обоснованием процесса является тождественность получаемой системы ДГУ системе (2.4), которая следует из системы дискретных ГИУ, сходимость же последовательности аппроксимирующих ППС установлена в [6].

Итак, потребуем, чтобы в точках элемента Δs_n выполнялось условие

$$\int\limits_{\Delta s_n} (\partial_{\nu_n}\tilde{\varphi}_n - f_n)\sum_{l=1}^{2} \psi_l ds(y_n) = 0, \quad \forall n \tag{3.1}$$

где $\partial_{\nu_n}\tilde{\varphi}_n$ определяется согласно (2.1), а f_n – согласно (1.10).

Переходя к локальным координатам, перепишем (3.1) в виде

$$\frac{c_n}{|J_n|}\int_{-1}^{+1}\left(\sum_{k=1}^{2}\Phi_{nk}\partial_\eta\psi_k\right)\sum_{l=1}^{2}\psi_l\,|J_n|\,d\eta=\frac{1}{|J_n|}\int_{-1}^{+1}\left(\sum_{i=1}^{2}y_n^{(i)}\overline{Y}_n^{(i)}\right)\sum_{l=1}^{2}\psi_l\,|J_n|\,d\eta,\quad\forall n \tag{3.2}$$

Правая часть записана для общего случая геометрической интерполяции, когда $y_n^{(i)}$ (i = 1, 2) определяется согласно (1.4) и использовано (1.8). Преобразование левой части (3.2) использует вычисление интегралов $\int\partial_\eta\psi_k\psi_l d\eta$ по отрезку [–1, 1], а правой части – интегралов $\int\psi_l d\eta$, $\int\eta\psi_l d\eta$.

В итоге (3.2) преобразуется к виду

$$c_n(\Phi_{n2}-\Phi_{n1})=2\sum_{i=1}^{2}\overset{+}{Y}{}_n^{(i)}\,\overline{Y}_n^{(i)},\quad\forall n$$

что при суммировании по n = 1,..., N тождественно (2.4), при этом для среднего узла k' = 0 элемента Δs_n имеем $\overset{+}{Y}{}_n^{(i)}=Y_{n0}^{(i)}$.

Установление тождественности систем ДГУ двух рассмотренных выше формулировок МГЭ использует условие (2.3), которое является дискретным аналогом условия для нормальной производной гармонической функции. Действительно, нормальная производная аппроксимирующего ППС $\varphi_N(x)$ (см. (1.3)) при $x\in S_\Delta$ соответствует левой части дискретного ГИУ (см. (1.7)); так как аппроксимирующий ППС – гармоническая функция в G_Δ, то интеграл по S_Δ от нормальной производной должен обращаться в нуль. Это имеет место, так как интеграл по S_Δ от правой части дискретного ГИУ равен нулю, что соответствует условию разрешимости задачи Неймана [14] и легко проверяется для аппроксимации (1.10). Тогда переход от системы дискретных ГИУ вида (1.7) к системе (2.4) при помощи соотношений (2.2) становится обоснованным, если глобальную интерполяцию нормальной производной подчинить условию (2.3). Таким образом, при реализации алгоритма слабой формулировки уравнения Галеркина дополняются условием (2.3).

Естественно попытаться установить также взаимосвязь изложенного в разд. 3 обобщения процесса Галеркина с методом Галеркина для непосредственного решения ГИУ типа Фредгольма [14] на базисных функциях МГЭ. Не затрагивая вопрос сходимости гранично-элементных приближений "по Галеркину" для решения ГИУ, можно утверждать, что если дискретное ГИУ имеет место для каждого функционального узла (см. (1.7) при постоянных граничных элементах), то умножив каждое ГИУ на $\Sigma\psi_l$ (l = 1, 2), проинтегрировав результат по Δs_n и просуммировав по n = 1,..., N, получим реализацию процесса Галеркина для решения ГИУ.

Приближенное решение задачи (1.1) как в формулировке на основе ГИУ, так и в формулировке "по Галеркину" может быть представлено [7] в виде линейной комбинации произведений узловых значений $\Psi_{nk'}$ плотности ППС (1.3) и интегральных функций "влияния" k'-го узла, n-го граничного элемента, для вычисления которых используется интеграл (1.5). Каждое из слагаемых в указанной линейной комбинации является гармонической функцией в области G_Δ с границей S_Δ. Тогда на таких функциях аппроксимирующая задача для задачи (1.1) эквивалентна (см., например, [7]) вариационной задаче для соответствующего ГФ. Можно проверить, что построенные выше гранично-элементные приближения (при найденных узловых значениях $\Psi_{nk'}$ из формулировки на основе ГИУ или формулировки "по Галеркину") удовлетворяют вариационному уравнению для ГФ и, следовательно, минимизируют функционал. Была установлена [6] сходимость минимизирующей последовательности для ГФ при $N\to\infty$ к решению задачи (1.1).

Изложенное завершает установление взаимосвязи формулировки МГЭ на основе ГИУ с вариационной формулировкой "по Ритцу".

Приведенное обоснование может быть использовано также для связи формулировок МГЭ при решении задач линейной теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
3. *Терещенко В.Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616–627.
4. *Терещенко В.Я.* Об алгоритме решения задачи Синьорини // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 1020–1029.
5. *Терещенко В.Я.* Двойственные формулировки метода граничных элементов. Приложение к задачам теории упругости для неоднородных тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 118–125.
6. *Терещенко В.Я.* К вопросу обоснования вариационных формулировок метода граничных элементов // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 309–316.
7. *Терещенко В.Я.* Алгоритм реализации и оценки погрешности вариационного метода граничных элементов в задачах теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 442–451.
8. *Терещенко В.Я.* Двойственные несвязанные формулировки вариационного метода граничных элементов в задачах теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 729–736.
9. *Терещенко В.Я.* Численно-аналитический алгоритм решения задач о трещинах // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 155–159.
10. *Терещенко В.Я.* О моделировании особенностей решения в задачах теории упругости // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 133–140.
11. *Терещенко В.Я.* О формулировке вариационного метода граничных элементов, улучшающей точность аппроксимации // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 614–619.
12. *Деклу Ж.* Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976. 95 с.
13. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
14. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
15. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
31.V.1995