

УДК 532.51.011

© 1996 г. Н.А. Остапенко

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ВХОДА  
ТОНКОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЛА В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ**

Строится равномерно пригодное решение в окрестности передних кромок тонкого пространственного тела, проникающего в сжимаемую жидкость. Приводятся примеры таких решений для некоторых режимов входа тонких циклически-симметричных тел с плоскими гранями.

Решения линейных задач входа тонких тел в жидкость обладают особенностями, которые характеризуются расходимостью отдельных физических величин возмущенного течения как в окрестности линий пересечения тела со свободной поверхностью жидкости, так и в окрестности острого носика тела в плоских и осесимметричных задачах [1–3], либо острых передних кромок [4, 5], погруженных в жидкость. Равномерно пригодные решения в окрестности носика клина и конуса в акустической постановке были получены в [6, 7].

Областью неоднородности внешнего (линейного) решения в пространственной задаче является "трубка", охватывающая окрестность острой передней кромки, с малым поперечным масштабом. Внутренняя задача сводится к решению двумерного уравнения Лапласа для внутреннего потенциала в плоскости, нормальной к передней кромке в некоторой ее точке, с условием Римана–Гильберта на гранях "клина", образующего кромку в окрестности рассматриваемой точки. Приводятся примеры равномерно пригодных решений для различных режимов входа с постоянной скоростью, нормальной к свободной поверхности жидкости, тонких конических тел с ромбовидным поперечным профилем и формулы для давления на передних кромках. Рассматриваются особенности построения равномерно пригодного решения в случае входа тонкого циклически-симметричного тела (ЦСТ), представляющего собой связку из целого числа симметрично расположенных вокруг продольной оси одинаковых тонких пространственных тел – циклов с острыми передними кромками. Давление на передней кромке ЦСТ в областях взаимного влияния циклов определяется суммой давления на кромке, вычисленного в основной задаче входа одиночного цикла с использованием равномерно пригодного решения и нелинейного интеграла Коши – Лагранжа, и возмущений давления, привносимых в данную точку остальными циклами и вычисленных на основе линейного решения.

**1. Постановка задачи. Построение равномерно пригодного решения.** Пусть тонкое пространственное тело проникает в полупространство, занятое жидкостью, со скоростью  $v_0(t)$ , направление которой (для простоты изложения) совпадает с направлением внутренней нормали к свободной поверхности жидкости. Предположим, что форма тела и условия входа обеспечивают безотрывное обтекание, а также известно решение соответствующей линейной задачи для потенциала возмущенного движения жидкости, которое в дальнейшем будем называть внешним решением  $\Phi_e(x_1, y_1, z_1, t)$ ;  $x_1, y_1, z_1$  – абсолютная декартова система координат, связанная со свободной поверхностью невозмущенной жидкости, направление оси  $x_1$  которой совпадает с направлением скорости  $v_0(t)$  тела.

Выпишем волновое уравнение, интеграл Коши–Лагранжа и краевое условие на теле, которые понадобятся для построения равномерно пригодного решения в окрест-

ности передних кромок тела

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi \quad (1.1)$$

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{v}_0(t)) \quad (1.3)$$

Здесь  $c$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$  – соответственно скорость звука, давление и плотность невозмущенной жидкости,  $\mathbf{n}_1$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела. В случае тонких тел  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{v}_0(t)) = O(\epsilon)$ , где  $\epsilon \ll 1$  – малый параметр, характеризующий относительную толщину тела. Потенциал возмущенного движения жидкости также имеет порядок  $\epsilon$ , главный член которого  $\varphi_\epsilon$  является решением начально-краевой линейной задачи.

Решения линейных пространственных задач входа тонких тел в жидкость [4, 5] для скорости и давления, определяемого из линеаризованного интеграла Коши–Лагранжа (1.2), имеют в окрестности острых передних кромок тот же логарифмический тип особенности, что и решения для входа тонких клина и конуса [1–3] в окрестности их носика, т.е.  $-\epsilon \ln r$ , где  $r$  – расстояние от передней кромки пространственного тела, отсчитываемое в нормальной к ней плоскости в некоторой точке. Таким образом, область неоднородности [8], где внешнее (линейное) решение задачи  $\varphi_\epsilon$  теряет смысл, имеет характерный размер  $r \sim e^{-1/\epsilon}$ . Случаи, когда область неоднородности внешнего решения будет не "трубка" с радиусом  $r$ , окружающая острую переднюю кромку тела, а "сфера" того же радиуса с центром в некоторой точке, будут оговорены ниже.

Для построения внутреннего решения перейдем сначала к декартовой системе координат, связанной с телом. В ней уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{v_0}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{\dot{v}_0}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.4)$$

$$x = x_1 - \int_0^t v_0(t) dt, \quad y = y_1, \quad z = z_1, \quad M = \frac{v_0(t)}{c}$$

Пусть для простоты острая передняя кромка тела (или одна из них) является плоской дважды дифференцируемой кривой, лежащей в плоскости  $z = 0$ , а одна из двух поверхностей тела, образующих в пересечении данную переднюю кромку, определяется в ее окрестности уравнением  $\epsilon f(x, y) - z = 0$ . Таким образом,  $f(x, y) = 0$ ,  $z = 0$  – уравнение передней кромки.

Перейдем к криволинейной ортогональной системе координат, связанной с передней кромкой,

$$n = f(x, y), \quad s = f_1(x, y), \quad z = z \quad (1.5)$$

где  $s$  может быть, например, константой первого интеграла уравнения  $dy/dx = f_y/f_x$ . Уравнение (1.4) и краевое условие (1.3) на выбранной части поверхности тела запишутся в виде

$$\begin{aligned} & \left[ (1 - M^2) f_x^2 + f_y^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \left[ (1 - M^2) f_{1x}^2 + f_{1y}^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \\ & - 2M^2 f_x f_{1x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial s} + \left[ (1 - M^2) f_{xx} + f_{yy} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \left[ (1 - M^2) f_{1xx} + f_{1yy} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{v_0}{c^2} \left( f_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial n} + f_{1x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s} \right) + \frac{\dot{v}_0}{c^2} \left( f_x \frac{\partial \varphi}{\partial n} + f_{1x} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) = 0 \quad (1.6)$$

$$\varepsilon (f_x^2 + f_y^2) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varepsilon f_x v_0(t) \quad (1.7)$$

В соответствии с приведенной выше оценкой для масштаба окрестности передней кромки, где внешнее (линейное) решение задачи становится непригодным, введем внутренние переменные

$$n_i = n e^{1/\varepsilon}, \quad z_i = z e^{1/\varepsilon} \quad (1.8)$$

Тогда при необходимых ограничениях на порядки величин производных функций  $f(x, y)$  и  $f_1(x, y)$  в окрестности передней кромки, для главных членов (1.6) и (1.7) получим соотношения

$$\left[ 1 - M_n^2(t, s) \right] \Delta^2(s) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial n_i^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z_i^2} = 0 \quad (1.9)$$

$$\varepsilon \Delta^2(s) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i} = \varepsilon f_x(s) v_0(t) e^{-1/\varepsilon} \quad (1.10)$$

Здесь  $M_n(t, s) = v_0(t) |f_x(s)| / (c \Delta(s))$  – число Маха составляющей скорости, нормальной к передней кромке, в некоторой точке;  $\Delta^2(s) = f_x^2 + f_y^2$  при  $f(x, y) = 0$ ;  $\varphi_i$  – потенциал внутреннего решения.

Поскольку линейные решения задач входа тонких пространственных тел в жидкость содержат логарифмическую особенность в окрестности передних кромок при дозвуковой скорости последних ( $M_n < 1$ ) [4, 5], то (1.9) является уравнением эллиптического типа. Вводя новые переменные

$$\varphi_i = \frac{f_x}{\Delta^2} v_0 e^{-1/\varepsilon} n_i + \Phi_i, \quad n_i = \Delta m n_{i1} \quad (1.11)$$

$$\left( m = \sqrt{1 - M_n^2(t, s)} \right)$$

получим для (1.9) и (1.10) следующие выражения:

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial n_{i1}^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z_i^2} = 0 \quad (1.12)$$

$$\varepsilon \frac{\Delta}{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_{i1}} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_i} = 0 \quad (1.13)$$

Таким образом, внутренняя задача свелась к решению двумерного уравнения Лапласа (1.12) для потенциала  $\Phi_i$  в плоскости, нормальной к передней кромке тонкого пространственного тела в некоторой ее точке, с условием Римана–Гильберта (1.13) [9] на одной из граней "клина":  $z_i = \varepsilon \Delta m n_{i1}$  (здесь опущены члены порядка  $\varepsilon^2$  по сравнению с единицей), во внутренней области являющейся образом линии пересечения поверхности  $z = \varepsilon f(x, y)$  с указанной плоскостью. Переменные  $t$  и  $s$  – параметры внутренней задачи. Если плоскость  $z = 0$  – плоскость симметрии пространственного тела в малой окрестности передней кромки, то к условию (1.13) следует добавить краевое условие  $\partial \Phi_i / \partial z_i = 0$  при  $z_i = 0, n_{i1} < 0$ . В более общем случае, когда поверхность, образующая вместе с указанной в их пересечении переднюю кромку, определяется в ее окрестности уравнением  $z = -\varepsilon_1 f(x, y)$ , к (1.13) следует добавить

краевое условие на второй грани "клина"  $z_i = -\varepsilon_1 \Delta m n_{i1}$ :

$$\varepsilon_1 \frac{\Delta}{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_{i1}} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_i} = 0 \quad (1.14)$$

Решение уравнения (1.12), как и в [7], удобно записать в полярных координатах

$$r_i = \sqrt{n_{i1}^2 + z_i^2}, \quad \text{tg } \theta_i = z_i / n_{i1} \quad (1.15)$$

но в виде, содержащем две произвольные функции переменных  $t$  и  $s$ , а также произвольный параметр для удовлетворения краевым условиям (1.13), (1.14)

$$\Phi_i = a(t, s) r_i^k \cos[k(\theta_i - \alpha)] + b(t, s) \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в (1.13) и (1.14) соответственно при  $\theta_i = \varepsilon \Delta m$  и  $\theta_i = 2\pi - \varepsilon_1 \Delta m$  найдем

$$k = 1 + \frac{(\varepsilon + \varepsilon_1) \Delta}{2\pi m} \left[ 1 + \frac{(\varepsilon + \varepsilon_1) \Delta m}{2\pi} \right], \quad \alpha = 2\pi \frac{\varepsilon(k-1)}{k(\varepsilon + \varepsilon_1)} \quad (1.17)$$

Поскольку, согласно (1.11),  $\Phi_i$  – потенциал относительного движения жидкости для внутренней задачи, легко найти линию тока – луч  $\theta_{i0}$  полярной системы координат  $r_i, \theta_i$ , входящую в критическую точку на передней кромке. В главном приближении будем иметь

$$\theta_{i0} = (\varepsilon - \varepsilon_1) \Delta / (2m) \quad (1.18)$$

Учитывая формулы перехода к внутренним переменным (1.4), (1.5), (1.8), (1.11), заключаем, что положение критической линии тока (1.18) зависит не только от линейных углов между касательными плоскостями к поверхностям, образующим в пересечении переднюю кромку в рассматриваемой точке, и плоскостью  $z = 0$ , но и от числа Маха скорости, нормальной к передней кромке.

Функции  $a(t, s)$  и  $b(t, s)$  (1.16) находятся из условия срачивания внешнего предела внутреннего решения с внутренним пределом внешнего решения [8]

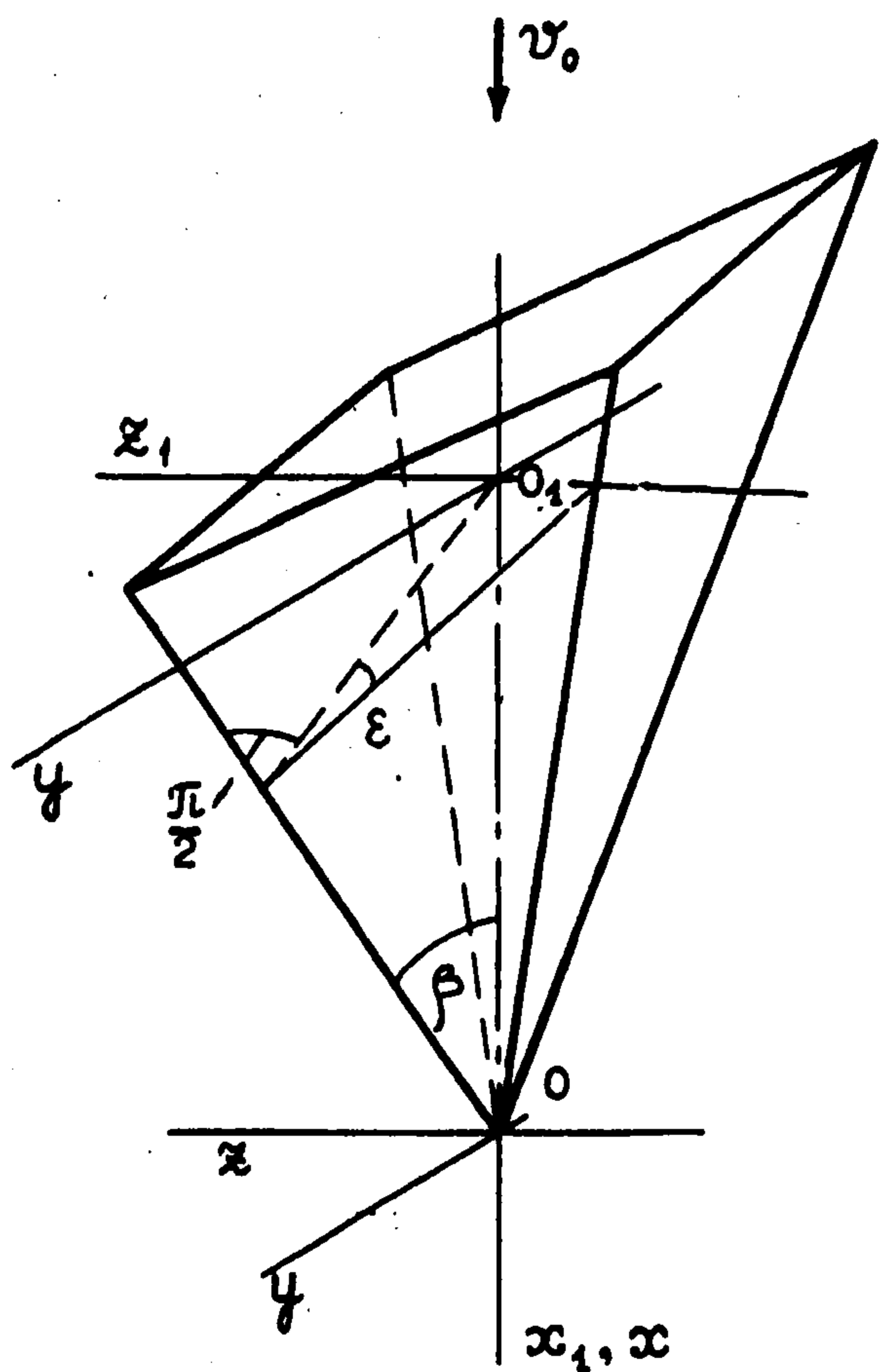
$$[\varphi_i]_e = [\varphi_e]_i \quad (1.19)$$

В рассматриваемой задаче указанные функции удобнее разыскивать последовательно, срачивая сначала компоненты скорости внутреннего и внешнего решений, а затем потенциалы. После нахождения функций  $a(t, s)$  и  $b(t, s)$  равномерно пригодное составное решение задачи строится по формуле

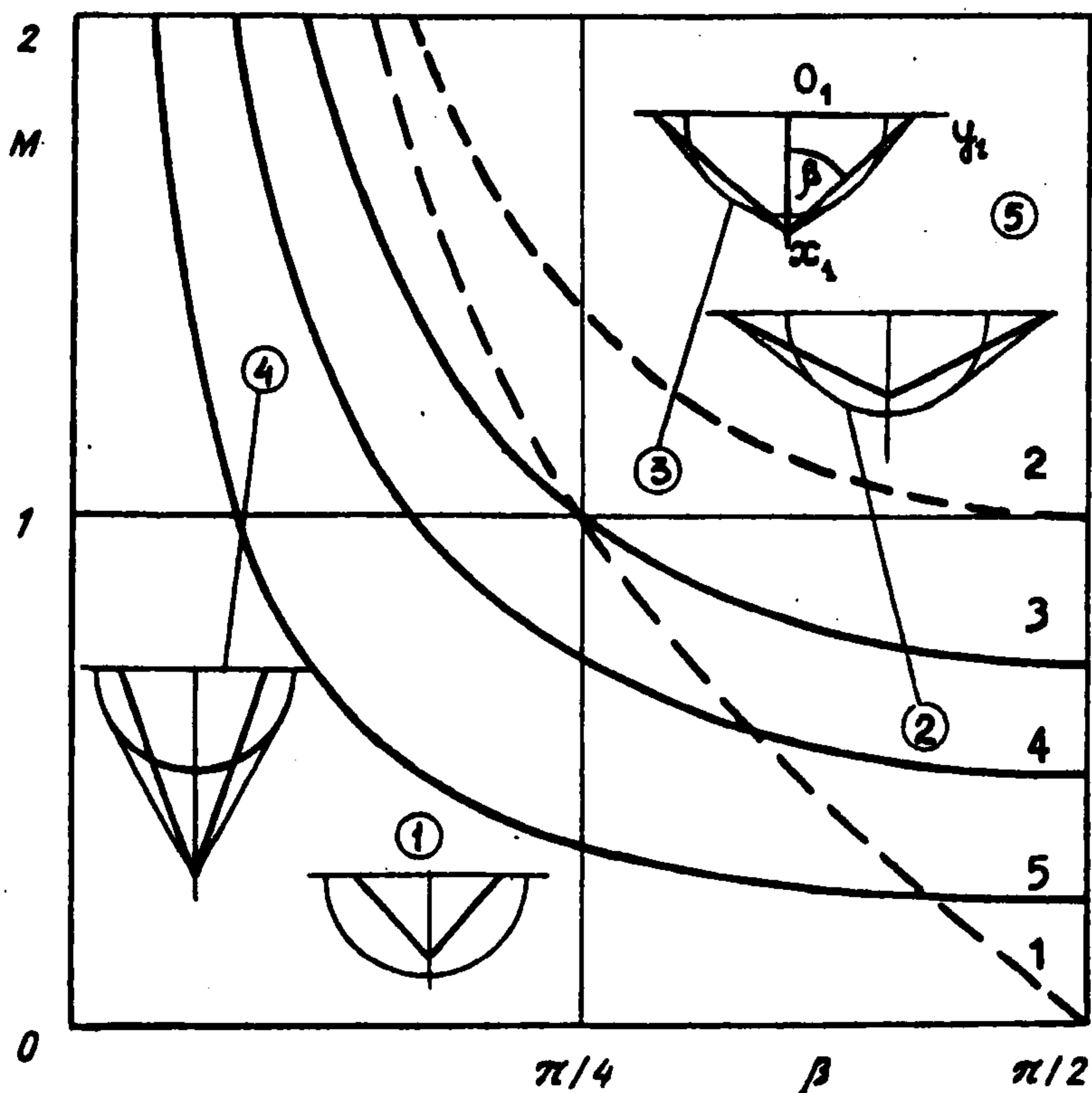
$$\varphi_c = \varphi_e - [\varphi_e]_i + \varphi_i \quad (1.20)$$

**2. Примеры и замечания.** Рассмотрим задачу входа в сжимаемую жидкость по нормали к ее поверхности с постоянной скоростью  $v_0$  циклически-симметричного тонкого пространственного тела с плоскими гранями и четным числом циклов [5]. Общее линейное решение указанной задачи представляет собой угловую суперпозицию решений линейной задачи входа конического тела с тонким ромбовидным профилем в поперечном сечении (фиг. 1).

На фиг. 2 в плоскости параметров  $M = v_0/c$  и  $\beta$  изображены области существования режимов входа тонкого конического тела с ромбовидным профилем с различной конфигурацией акустических волн. Штриховые кривые описываются уравнениями:  $M \text{tg } \beta = 1$  (кривая 1) и  $M \sin \beta = 1$  (кривая 2). Область 1, расположенная под прямой  $M = 1$  и кривой 1, отвечает полностью дозвуковому режиму входа тела; область 2, расположенная под прямой  $M = 1$  и над кривой 1, – сверхзвуковому движению следа передней кромки тела по свободной поверхности жидкости; область 3, ограниченная прямой  $M = 1$  и кривыми 1 и 2, – полностью дозвуковому режиму движения передней кромки ( $M_h \equiv M \sin \beta < 1$ ) при сверх-



Фиг. 1



Фиг. 2

звуковых скоростях движения носика тела и следа передней кромки по свободной поверхности жидкости; область 4, расположенная над прямой  $M = 1$  и под кривой 1, – сверхзвуковому движению носика тела; область 5, расположенная над кривой 2, – сверхзвуковому режиму движения передней кромки тела ( $M_n > 1$ ). Сплошные кривые 3–5 соответствуют постоянной скорости движения передних кромок тела:  $M_n = \sqrt{2}/2, 0,5$  и  $0,25$ .

Согласно [5] линейные (внешние) решения задач входа тонкого тела, отвечающие значениям параметров  $M$  и  $\beta$  в областях 1–4 (фиг. 2, под кривой 2) содержат логарифмические особенности на передних кромках.

Приведем примеры построения равномерно пригодного решения для режимов 2–4 в областях конического движения возмущенной жидкости.

Пусть  $M \operatorname{tg} \beta > 1$ . Потенциал внешнего решения в области между конической волной, с вершиной в подвижной точке пересечения передней кромки со свободной поверхностью жидкости, сферической волной и свободной поверхностью (фиг. 2, области 2, 3) в соответствии с [5] можно записать в виде

$$\varphi_e = - \int_{t_1}^t F(x_1, y_1, z_1, t) dt, \quad t > t_1 \quad (2.1)$$

$$F(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{\varepsilon v_0^2 h}{2\pi g} \sin \beta \ln \left| \frac{G_+}{G_-} \right|, \quad h = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{M^2 \operatorname{tg}^2 \beta - 1}}$$

$$G_{\pm} = \left[ \sqrt{h^2 (v_0 t - y_1 \operatorname{ctg} \beta)^2 - (x_1^2 + z_1^2)} \pm g x_1 \right]^2 + h^2 z_1^2$$

$$t_1 = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{v_0} \left( y_1 + \sqrt{M^2 \operatorname{tg}^2 \beta - 1} \sqrt{x_1^2 + z_1^2} \right), \quad g = \frac{h}{\sin \beta} \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \beta}$$

Грань тела (фиг. 1), расположенная в первом квадранте системы  $x_1, y_1, z_1$ , в переменных  $x, y, z$  (1.4) описывается функцией

$$z = -\varepsilon(x \sin \beta + y \cos \beta)$$

Тогда, согласно разд. 1, передняя кромка тела задается уравнением  $f(x, y) \equiv -(x \sin \beta + y \cos \beta) = 0$ , а переменные  $n$  и  $s$  системы координат, связанной с передней кромкой, определяются соотношениями

$$\begin{aligned} n &= -x_1 \sin \beta - y_1 \cos \beta + v_0 t \sin \beta \\ s &= x_1 \cos \beta - y_1 \sin \beta + v_0 t \sin \beta \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

(здесь начало координат помещено в точку пересечения передней кромки со свободной поверхностью жидкости), а функции  $M_n(t, s)$  и  $\Delta(s)$  являются постоянными:

$$M_n = M \sin \beta, \quad \Delta = 1 \quad (2.3)$$

Опуская громоздкие выкладки, выпишем внутренние пределы для компонент скорости внешнего решения в проекциях на оси  $n, s, z$  и внешнего потенциала  $\varphi_e$ :

$$[v_{ne}]_i = \frac{\varepsilon v_0}{\pi q_1} \left\{ \ln \sqrt{\left( \frac{n}{s \cos \beta \sin \beta} \right)^2 + q_1^2 \left( \frac{z}{s \cos \beta} \right)^2} - \ln(2q_1^2) - \sin^2 \beta \ln q_2 \right\} \quad (2.4)$$

$$[v_{se}]_i = \frac{\varepsilon v_0}{\pi q_1} \left\{ \sin \beta \cos \beta \ln q_2 - \frac{n}{s} \right\} \quad (2.5)$$

$$[v_{ze}]_i = \frac{\varepsilon v_0 \sin \beta}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{n}{mz} \right) \right\} \quad (2.6)$$

$$[\varphi_e]_i = n[v_{ne}]_i + s[v_{se}]_i + z[v_{ze}]_i \quad (2.7)$$

$$q_1 = g/h, \quad q_2 = h^2(g+h)^{-2q_1}$$

Как видно из (2.4) – (2.6), при стремлении точки к передней кромке при  $s = \text{const}$  компонента скорости  $v_{ne}$  содержит логарифмическую особенность, что имеет место и у возмущения давления в линейном решении [5] (см. (2.1),  $\partial \varphi_e / \partial t$ ), компонента  $v_{se}$  непрерывна, а величина  $v_{ze}$  зависит от направления подхода к передней кромке.

Для симметричного относительно плоскости  $z = 0$  профиля тела (фиг. 1) и  $\Delta = 1$  (2.3) параметры внутреннего решения (1.17) примут вид

$$k = 1 + \frac{\varepsilon}{\pi m} \left( 1 + \frac{\varepsilon m}{\pi} \right), \quad \alpha = \pi \frac{k-1}{k} \quad (2.8)$$

а потенциал внутреннего решения (1.11) запишется в форме

$$\varphi_i = -v_0 n \sin \beta - a(t, s) r_i^k \cos[k(\theta_i - \pi)] + b(t, s) \quad (2.9)$$

Учитывая (1.8), (1.11), (1.15) и (2.8), потенциал внутреннего решения с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  по сравнению с единицей запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i &= -v_0 n \sin \beta + \frac{a(t, s)}{q_1 \sin \beta} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi m}\right) \pi \chi \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{\pi^2} - \frac{\varepsilon}{\pi m} \ln q_1 + \frac{\varepsilon z}{\pi n} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{n}{mz} \right) \right] + b(t, s) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\chi = \left[ (n / \sin \beta)^2 + q_1^2 z^2 \right]^{\varepsilon / (2\pi m)}$$

Для определения функции  $a(t, s)$  найдем внешний предел  $[v_{ni}]_e$  компоненты скорости  $v_{ni}$  внутреннего решения. Представляя  $a(t, s)$  в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ :  $a(t, s) = a_0 + \varepsilon a_1 + \dots$  и приравнявая  $[v_{ni}]_e$  и  $[v_{ne}]_i$  (2.4), найдем

$$\begin{aligned} a_0 &= v_0 m \sin \beta \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\pi m}\right) \\ a_1 &= -\frac{a_0}{\pi m} \left\{ 1 + \frac{m}{\pi} + \ln|2q_1 s \cos \beta| + \sin^2 \beta \ln q_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Определив с использованием (2.11) внешний предел потенциала внутреннего решения (2.10), из равенства (1.19) получим

$$b(t,s) = \varepsilon \frac{v_0 \sin \beta \cos \beta}{\pi q_1} s \ln q_2 \quad (2.12)$$

Окончательно выражение для потенциала внутреннего решения примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_i = v_0 n \sin \beta & \left\{ \left[ \left( \frac{n}{s \cos \beta \sin \beta} \right)^2 + q_1^2 \left( \frac{z}{s \cos \beta} \right)^2 \right]^{\varepsilon/(2\pi m)} \times \right. \\ & \left. \times \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{\pi m} \left( m \frac{z}{n} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{n}{mz} \right) - 1 - \sin^2 \beta \ln q_2 \right) \right] - 1 \right\} + \varepsilon \frac{v_0 \sin \beta \cos \beta}{\pi q_1} s \ln q_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Можно проверить, что  $[v_{si}]_e$  и  $[v_{zi}]_e$  совпадают с выражениями (2.5) и (2.6) соответственно.

Составное решение для потенциала  $\varphi_c$  определяется по формуле (1.20) с использованием (2.1), (2.7) и (2.13). Его анализ показывает, что компоненты скорости равномерно пригодного решения непрерывны на передней кромке.

Определим давление на передней кромке тонкого конического тела с ромбовидным профилем (фиг. 1) при  $M \operatorname{tg} \beta > 1$  в области конического течения (фиг. 2, области 2 и 3). Воспользуемся интегралом Коши–Лагранжа (1.2), где в качестве  $\varphi$  следует использовать  $\varphi_c$  (1.20). Опуская выкладки, при  $n = z = 0$  найдем приведенный коэффициент давления, рассчитывая скоростной напор  $q$  по скорости, нормальной к передней кромке

$$\bar{c}_{p0} \equiv \frac{\pi}{4\varepsilon} (c_{p0} - 1) = \sin \beta \ln \left[ (1 + q_1) \left( \sqrt{1 - q_1^2} \right)^{1/q_1 - 1} \right] \quad (2.14)$$

$$c_{p0} = (p - p_0)|_{n,z=0} q^{-1}, \quad q = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \sin^2 \beta$$

Решение линейной задачи входа в сжимаемую жидкость тонкого тела с ромбовидным профилем [5] при  $\beta \rightarrow \pi/2$  переходит в соответствующее решение плоской задачи входа тонкого клина. В свою очередь, как показывает анализ соотношения (2.14), выражение для давления на кромке, полученное из интеграла Коши–Лагранжа с использованием равномерно пригодного решения, при  $\beta \rightarrow \pi/2$  и малых значениях числа  $M$  совпадает с соответствующей формулой для давления в носике клина [6].

Опуская рассуждения и выкладки, выпишем выражение для приведенного коэффициента давления на кромке тонкого тела с ромбовидным профилем в области конического течения, реализующегося в окрестности носика тела на режимах входа  $M > 1$  (фиг. 2, области 3 и 4),

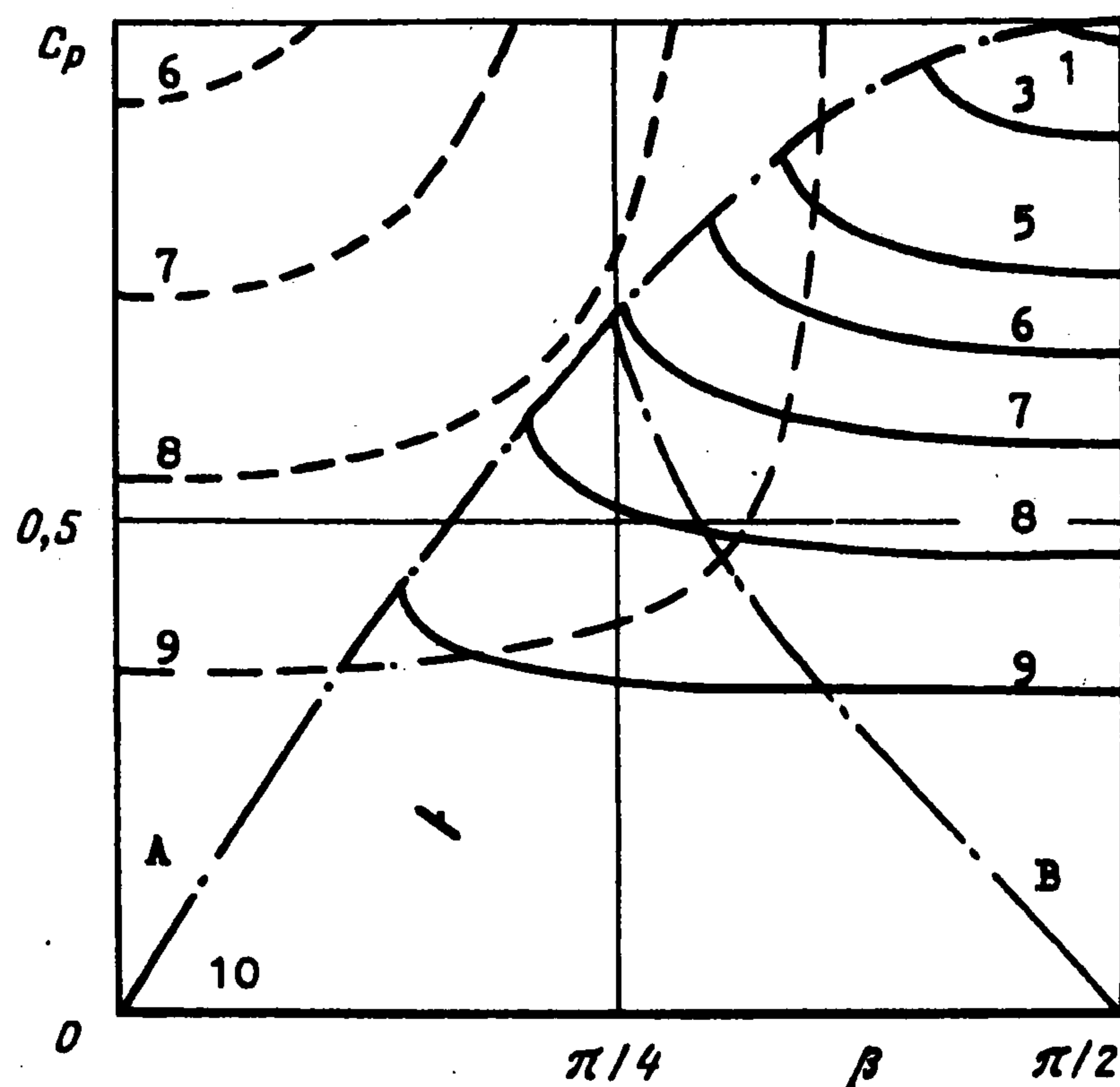
$$\bar{c}_{p0} = -\frac{\cos^2 \beta}{m} \ln \left( \operatorname{tg} \beta \sqrt{M^2 - 1} \right) \quad (2.15)$$

Возникает вопрос, если построено равномерно пригодное решение для одиночного тонкого тела (фиг. 1), то каким оно будет в случае входа циклически-симметричного тела (ЦСТ), в частности, как определить в этом случае давление на передней кромке?

Очевидно, что на режиме входа  $M \operatorname{tg} \beta > 1$  всегда существует область изменения определяющих параметров и конечный интервал изменения переменной  $s$ , в которых область конического течения, реализующаяся в окрестности точки пересечения передней кромки одного из циклов, составляющих тело, со свободной поверхностью жидкости, не подвержена влиянию остальных циклов.

Следовательно, равномерно пригодное решение, построенное для этой области в случае входа одиночного тонкого тела (фиг. 1 и 2, области 2 и 3), может быть использовано для ЦСТ.

Однако в других областях течения, содержащих дозвуковую переднюю кромку ( $M_n < 1$ ), при построении равномерно пригодного решения необходимо учитывать совокупное влия-



Фиг. 3

ние циклов, составляющих тело. Последнее относится, в частности, к конической области течения в окрестности носика тела при  $M > 1$  (фиг. 2, области 3 и 4), и значит, формула (2.15) должна быть исправлена с учетом соответствующего числа циклов, составляющих пространственное тело.

Рассмотрим основные особенности построения равномерно пригодного решения задачи входа тонкого ЦСТ. Поскольку внешнее (линейное) решение в окрестности любой из передних кромок представляет собой суперпозицию основного решения, порождаемого циклом, которому принадлежит выбранная передняя кромка, и содержащего логарифмическую особенность на передней кромке, а также влияний остальных циклов, которые не приносят в общее решение особенностей в окрестность передней кромки, то, например, внутренняя асимптотика внешнего решения задачи входа ЦСТ для компоненты скорости  $v_n$ :

$[v_{ne}^c]_i$  может быть записана в виде

$$[v_{ne}^c]_i = [v_{ne}^0]_i + \epsilon c(t, s) + O(\epsilon e^{-1/\epsilon}) \quad (2.16)$$

где  $[v_{ne}^0]_i$  – внутренний предел внешнего решения для соответствующей компоненты скорости в основной линейной задаче, отвечающей входу одного цикла (например, изображенного на фиг. 1),  $c(t, s)$  – функция, описывающая влияние других циклов.

Согласно (2.16) для потенциала в окрестности передней кромки в общем случае будет справедливо выражение

$$[\varphi_\epsilon^c]_i = [\varphi_\epsilon^0]_i + \epsilon c(t, s)n + \epsilon c_1(t, s)z + \epsilon d(t, s) + O(\epsilon e^{-2/\epsilon}) \quad (2.17)$$

где  $c_1(t, s)$  и  $d(t, s)$  – некоторые функции, описывающие влияние остальных циклов. В силу циклической симметрии тела  $c_1(t, s) = 0$ , так как возмущения, приходящие на плоскость  $z = 0$  от остальных циклов, взаимно компенсируются, так что  $v_{ze}^c(z=0) - v_{ze}^0(z=0) = 0$ . С учетом последнего анализ соотношений (1.19), (2.9), (2.17) показывает, что функция  $c(t, s)$  войдет в коэффициент  $a_1$  (2.11) ряда для функции  $a(t, s)$ , а функция  $d(t, s)$  – в функцию  $b(t, s)$  (2.9). Это позволяет сделать вывод, принимая во внимание соотношения (1.2), (1.20), (2.8), (2.9), (2.17), что давление на кромке с точностью до членов порядка  $\epsilon^2$  будет зависеть лишь от производной функции  $d(t, s)$  по времени, которая войдет в соответствующее выражение аддитивно, т.е. так же, как в линейной теории при вычислении давления с помощью линеаризованного интеграла Коши–Лагранжа.

Таким образом, для определения давления на передней кромке ЦСТ в областях взаим-

ного влияния циклов достаточно просуммировать давление на кромке, вычисленное в основной задаче с использованием равномерно пригодного решения и нелинейного интеграла Коши–Лагранжа, и возмущения давления, привносимые в данную точку остальными циклами, вычисленные на основе линейного решения.

На фиг. 3 представлены результаты расчетов нормированного приведенного коэффициента давления  $c_p = \bar{c}_{p0} / \ln 2$  по формулам (2.14) (сплошные линии) и (2.15) (штриховые линии). Такая нормировка обусловлена тем, что в первом случае, отвечающем давлению на кромке в области конического течения при  $M \operatorname{tg} \beta > 1$ ,  $\bar{c}_{p0} = \ln 2$  при  $\beta \rightarrow \pi/2$  и  $M \rightarrow 0$ .

Номера кривых соответствуют значениям  $10 \times M_n$ .

Штрихпунктирная кривая *A*, ограничивающая сплошные кривые слева, является образом кривой *I* на фиг. 2 ( $M \operatorname{tg} \beta = 1$ ).

Штрихпунктирная кривая *B* разграничивает области с дозвуковой ( $M < 1$ , справа от кривой) и сверхзвуковой скоростью движения тела. При  $M_n > \sqrt{2}/2$  (см. фиг. 2, область 3) в окрестности передней кромки реализуются две области конического течения, рассмотренные выше. На этих режимах движения, согласно расчету, давление на кромке в окрестности носика тела выше давления в окрестности свободной поверхности жидкости (фиг. 3, сравнить ординаты штриховых и сплошных кривых 8 и 9 при одинаковых величинах угла  $\beta$ ).

Следует, однако, отметить, что решение, построенное при  $M > 1$  в области конического течения у носика тела, становится непригодным при  $M \rightarrow 1$ . На это указывает логарифмическая особенность в формуле (2.15) (см. также штриховые кривые на фиг. 3). Хотя тело, входящее в жидкость, по условию тонкое, но углы отклонения потока конечны, и при  $M \gtrsim 1$  волна должна отсоединиться от носика тела. Это свидетельствует о том, что акустическая модель перестает быть справедливой в указанном предельном случае.

Аналогичная ситуация имеет место и в решении для конической области течения в окрестности свободной поверхности жидкости. Хотя теория и дает конечные значения давления на передней кромке при  $M \operatorname{tg} \beta \gtrsim 1$  (2.14) (фиг. 3, сплошные кривые в окрестности штрихпунктирной кривой *A*), акустическая модель здесь также непригодна. Другими словами, и в первом, и во втором случаях при заданном  $\epsilon$  существуют предельные размеры областей конического течения, ограниченных сферической и коническими волнами (фиг. 2, области 2–4), допускающие использование построенных решений. Кроме того, решение для конической области течения при  $M \operatorname{tg} \beta > 1$  не может быть распространено на всю переднюю кромку от сферической волны до свободной поверхности (фиг. 2, области 2 и 3). При  $s \rightarrow 0$  (2.2.) ( $s = O(e^{-1/\epsilon})$ ) точки на передней кромке попадают в окрестность линии пересечения поверхности тела со свободной поверхностью жидкости, где решение должно строиться с учетом возмущения формы свободной поверхности.

В заключение заметим, что развитая методика построения равномерно пригодного решения для задачи входа тонкого пространственного тела в жидкость (разд. 1) предполагает необходимую гладкость передних кромок. В частности, при наличии излома передней кромки методика непригодна. Так, на дозвуковом режиме входа пространственного тела в жидкость (фиг. 2 область 1) [5] характеристики линейного (внешнего) решения задачи имеют логарифмическую особенность в носике тела при стремлении к нему точки поля возмущенного течения по любому направлению. Это указывает на то, что областью неоднородности внешнего решения здесь будет не "трубка", как на передней кромке, а "сфера" с характерным размером  $r = O(e^{-1/\epsilon})$ . Поэтому внутренние переменные в этом случае необходимо вводить по всем трем декартовым координатам  $x, y, z$  (1.4), (1.8), что приведет к внутренней задаче для трехмерного уравнения Лапласа с соответствующими краевыми условиями на поверхности пространственного тела в окрестности носика.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Wagner H.* Über Stoss – und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // ZAMM. 1932. В. 12. № 4. S. 193–215.
2. *Сагомоян А.Я.* Проникание узкого клина в сжимаемую жидкость // Вестн МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1956. № 2. С. 13–18.
3. *Багдоев А.Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1961. 276 с.

4. Гонор А.Л., Поручиков В.Б. Проникание тел звездообразной формы в сжимаемую жидкость // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 405–412.
5. Остапенко Н.А. Проникание тонкого циклически-симметричного пространственного тела в упругое полупространство // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 808–818.
6. Гонор А.Л. Аналитическое решение нелинейной задачи погружения тонкого клина в сжимаемую жидкость // Механика. Современные проблемы. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 41–49.
7. Гонор А.Л. Асимптотическое нелинейное решение задачи входа тонкого тела в сжимаемую жидкость // Изв. АН. МЖТ. 1993. № 4. С. 49–57.
8. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
9. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.

Москва

Поступила в редакцию  
1.IX.1994