УДК 531.36

© 1996 г. С.П. Сосницкий

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ПРИТЯГИВАЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Исследуется движение системы материальных точек в отрицательно однородном силовом поле. Устанавливается неустойчивость по Ляпунову лагранжевых конфигураций (ЛК) системы, которым соответствуют постоянные расстояния между точками. Доказательство неустойчивости основано на представлении лагранжиана рассматриваемой задачи в форме, позволяющей вычислить действие по Гамильтону, как функцию фазовых переменных, в явном виде. Обсуждаются вопросы орбитальной неустойчивости ЛК.

1. Рассмотрим систему n притягивающихся материальных точек, лагранжиан которой имеет вид

$$L = T + U = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{r}_i^2 + \lambda\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{|r_{ij}|^k}, \quad r_{ij} = r_j - r_i \tag{1.1}$$

Здесь m_i – массы точек, $r_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ – их радиус-векторы, отнесенные к инерциальной системе отсчета с началом в центре масс m_i, положительные постоянные λ, k отражают характер притяжения, всюду $i, j = 1, 2, ..., n$. В частности, если постоянная λ равна гравитационной постоянной $G > 0$, а $k = 1$, то приходим к ньютоновой задаче притягивающихся точек.

Известно [1–3], что обнаруженные Лагранжем в ньютоновой задаче конфигурации материальных точек $|r_{ij}| = r_{0ij}(t)$, соответствующие периодическим движениям системы, имеют место и в более общем случае лагранжиана (1.1). Аналогично обстоит дело и с интегралами движения. Ниже будут существенно использоваться интеграл энергии

$$T - U = h = \text{const} \tag{1.2}$$

и векторный интеграл момента количеств движения

$$\sum_i m_i r_i \times \dot{r}_i = C \tag{1.3}$$

Ограничимся рассмотрением плоской лагранжевой конфигурации (ЛК) n материальных точек

$$|r_{ij}| = r_{0ij} = \text{const} \tag{1.4}$$

полагая без ограничения общности задачи, что точки расположены в плоскости xy. Используя аналогично принятому ранее подходу ([3], с. 439) вращающуюся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω систему координат, лагранжиан (1.1) преобразуем к виду

$$L = T_2 + T_1 + T_0 + U \tag{1.5}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{r}_i^2, \quad T_1 = \omega\sum_i m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i), \quad T_0 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

Здесь для удобства оставлены прежние обозначения компонент векторов r_i и $\dot{r}_i$.

Интеграл энергии в результате данного преобразования примет форму

$$T_2 - T_0 - U = h' = \text{const} \tag{1.6}$$

а проекция момента количеств движения на ось z запишется в виде

$$\omega^{-1}(T_1 + 2T_0) = C_z' \tag{1.7}$$

Далее интегралу (1.7) удобнее придать форму

$$T_1 + 2T_0 = \omega C_z' = c \tag{1.8}$$

Смысл применения вращающейся системы координат состоит в том, что ЛК (1.4) (периодическое движение исходной системы) переходит в множество критических точек

$$\dot{r}_i = 0, \quad r_i = r_{0i}, \quad z_i = 0 \tag{1.9}$$

лагранжиана L в виде (1.5). Критические точки (1.9) соответствуют положению равновесия системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \tag{1.10}$$

что упрощает исследование устойчивости решения (1.4).

Лемма. Лагранжиан (1.5) допускает представление в виде

$$L = \frac{2}{2-k}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} r_i\right)^{\bullet} - \frac{2+k}{2-k}(c+h'), \ \ k \neq 2 \tag{1.11}$$

Доказательство. Используя равенство

$$L = \sum_i p_i \dot{r}_i - H, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \tag{1.12}$$

где H – соответствующий лагранжиану (1.5) гамильтониан, преобразуем (1.12) к форме

$$L = \left(\sum_i p_i r_i\right)^{\bullet} - \sum_i r_i \frac{\partial L}{\partial r_i} - H \tag{1.13}$$

Поскольку

$$-\sum_i r_i \frac{\partial L}{\partial r_i} = -T_1 - 2T_0 + kU = -T_1 - 2T_0 + \frac{k}{2}U + \frac{k}{2}(T_2 - T_0 - h') =$$

$$= -c + \frac{k}{2}(T_2 + T_1 + T_0 + U) - kT_0 - \frac{k}{2}T_1 - \frac{k}{2}h' \tag{1.14}$$

то равенство (1.13) можно представить в виде

$$L = \left(\sum_i p_i r_i\right)^{\bullet} - \frac{1}{2}(2+k)(c+h') + \frac{k}{2}L \tag{1.15}$$

откуда получаем (1.11).

Если $k = 2$, то представление (1.11) не имеет места, зато на основании (1.15) в этом случае получаем

$$\left(\sum_i p_i r_i\right)^{\bullet} = \frac{2+k}{2}(c+h') \tag{1.16}$$

Из (1.16) следуют два интеграла движения (ср. с [1], с. 294), дополнительные к десяти имеющимся.

Равенство (1.11) является ключевым при исследовании устойчивости решения (1.4) и, в частности, позволяет получить явное выражение функции действия по Гамильтону для системы с лагранжианом (1.5) (ср. с [4]):

$$S = \frac{2}{2-k}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} r_i \Big|_0^t - \frac{2+k}{2-k}(c+h')t, \quad k \neq 2$$

2. Поскольку (1.9) – положение равновесия системы (1.5), (1.10), представим величины r_i в виде

$$r_i = r_{0i} + u_i \tag{2.1}$$

где $u_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)^T$ соответствует малому возмущению вектора r_{0i}.

На основании (2.1) $\dot{r}_i = \dot{u}_i$. Поэтому в окрестности положения равновесия лагранжиан L согласно (1.5), (2.1) принимает вид

$$L = (T_0 + U)\big|_{r=r_0} + \dot{\alpha}(\xi,\eta) + T_2^* + T_1^* + T_0^* + U^* \tag{2.2}$$

$$\alpha(\xi,\eta) = \omega\sum_i m_i(x_{0i}\eta_i - y_{0i}\xi_i), \quad T_2^* = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{u}_i^2$$

$$T_1^* = \omega\sum_i m_i(\xi_i\dot{\eta}_i - \eta_i\dot{\xi}_i), \quad T_0^* = \frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2)$$

$$U^* = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j}\bigg|_{r=r_0} u_i u_j + O(\|u\|^3), \quad r = (r_1,\dots,r_n)^T, \quad u = (u_1,\dots,u_n)^T$$

С учетом (2.2) равенство (1.11) представим в форме

$$L^* = \frac{d}{dt}\Sigma_0 - \frac{2+k}{2-k}(c+h') - (T_0 + U)\big|_{r_i=r_{0i}}, \quad k \neq 2 \tag{2.3}$$

$$\Sigma_0 = \frac{2}{2-k}\sum_i p_i r_i - \alpha(\xi,\eta), \quad L^* = T_2^* + T_1^* + T_0^* + U^* \tag{2.4}$$

Замечая, что на основании (1.14)

$$2T_0\big|_{r_i=r_{0i}} = kU\big|_{r_i=r_{0i}}$$

и, кроме того, согласно (1.6), (1.8)

$$h' = -(T_0 + U)\big|_{r_i=r_{0i}} - T_0^* - U^* + T_2^*, \quad c = 2T_0\big|_{r_i=r_{0i}} + \Delta(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta})$$

$$\Delta(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta}) = \dot{\alpha}(\xi,\eta) + 2\omega^2\sum_i m_i(x_{0i}\xi_i + y_{0i}\eta_i) + T_1^* + 2T_0^*$$

равенство (2.3) преобразуем к виду

$$L^* = \frac{d}{dt}\Sigma_0 - \frac{2+k}{2-k}(c^* + h^*), \quad k \neq 2 \tag{2.5}$$

$$h^* = h' + (T_0 + U)\big|_{r_i=r_{0i}} = T_2^* - T_0^* - U^* \tag{2.6}$$

$$c^* = c - 2T_0\big|_{r_i=r_{0i}} = \Delta(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta}) \tag{2.7}$$

Теорема 1. Плоская ЛК (1.4) системы (1.1) неустойчива по Ляпунову.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $k = 2$, то неустойчивость следует из равенства (1.16). Поэтому ниже будем считать, что $k \neq 2$.

Предположим, что решение (1.4) устойчиво по Ляпунову. Тогда устойчивым по Ляпунову будет и положение равновесия $\dot{u} = u = 0$ $(u = (u_1, \ldots, u_n)^T,\ u_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)^T)$ уравнений возмущенного движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial u_i} = 0 \tag{2.8}$$

Воспользуемся аналогом равенства (1.13) для уравнений (2.8):

$$L^* = \left(\sum_i \upsilon_i u_i\right)^\bullet - \sum_i u_i \frac{\partial L^*}{\partial u_i} - H^*, \quad \upsilon_i = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{u}_i} \tag{2.9}$$

где гамильтониан H^* соответствует лагранжиану L^*.

С учетом (2.5), дифференцируя (2.9), имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\Sigma_0 = \left(\sum_i \upsilon_i u_i\right)^{\bullet\bullet} - \left(\sum_i u_i \frac{\partial L^*}{\partial u_i}\right)^\bullet \tag{2.10}$$

Интегрируя равенство (2.10), получаем

$$\frac{d}{d\tau}\Sigma\bigg|_{\tau=t} - \left\{\frac{d}{d\tau}\Sigma + \sum_i u_i \frac{\partial L^*}{\partial u_i}\right\}\bigg|_{\tau=0} = -\sum_i u_i \frac{\partial L^*}{\partial u_i}\bigg|_{\tau=t} \tag{2.11}$$

$$\Sigma = \sum_i \left(\frac{2}{2-k} p_i r_i - \upsilon_i u_i\right) - \alpha(\xi, \eta)$$

Поскольку согласно (2.1)

$$\sum_i p_i r_i = \sum_i \left[\upsilon_i u_i + m_i(x_{0i}\dot{\xi}_i + y_{0i}\dot{\eta}_i)\right]$$

то выражению в фигурных скобках в левой части равенства (2.11) можно придать вид

$$\{\ldots\}|_{\tau=0} = -\left\{\dot{\alpha}(\xi, \eta) - \sum_i \left[\frac{k}{2-k}(\upsilon_i u_i)^\bullet + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{2-k} m_i(x_{0i}\ddot{\xi}_i + y_{0i}\ddot{\eta}_i)\right] - \sum_i u_i \frac{\partial L^*}{\partial u_i}\right\}\bigg|_{\tau=0} \tag{2.12}$$

Учитывая, что в соответствии с уравнениями возмущенного движения (2.8)

$$m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial(T_0^* + U^*)}{\partial \xi_i} + 2\omega m_i \dot{\eta}_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial(T_0^* + U^*)}{\partial \eta_i} - 2\omega m_i \dot{\xi}_i \tag{2.13}$$

на основании (2.9), (2.11) – (2.13) получаем

$$\frac{d}{dt}\Sigma + \beta(\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})\bigg|_{t=0} = -\sum_i u_i \frac{\partial L^*}{\partial u_i} \tag{2.14}$$

$$\beta = -\frac{2+k}{2-k}\dot{\alpha} - \frac{2}{2-k}\sum_i \left[x_{0i}\frac{\partial(T_0^* + U^*)}{\partial \xi_i} + y_{0i}\frac{\partial(T_0^* + U^*)}{\partial \eta_i}\right] -$$

$$-\frac{k}{2-k}(L^* + H^*) - \frac{2}{2-k}\sum_i u_i \frac{\partial L^*}{\partial u_i} \tag{2.15}$$

Функция β не является интегралом движения системы (2.8), что уже видно из выражения

$$\ddot{\alpha}(\xi,\eta)=\omega\sum_i\left[x_{0i}\frac{\partial(T_0^*+U^*)}{\partial\eta_i}-y_{0i}\frac{\partial(T_0^*+U^*)}{\partial\xi_i}-2\omega m_i(x_{0i}\dot{\xi}_i+y_{0i}\dot{\eta}_i)\right]$$

Таким образом, почти все ее траектории пересекают множества уровня функции β.

Согласно предположению об устойчивости положения равновесия $\dot{u}=u=0$ почти все фазовые траектории системы (2.8), проходящие через достаточно малую его окрестность, на основании теоремы Пуанкаре [5] обладают свойством возвращаемости (устойчивы по Пуассону). Поэтому, рассматривая их замыкания, всегда можно выделить в сколь угодно малой окрестности точки $\dot{u}=u=0$ устойчивое по Пуассону инвариантное транзитивное множество Γ с инвариантной нормированной мерой μ^* на нем [5–7]. Учитывая, что β не является интегралом движения системы (2.8), выбор Γ можно осуществить таким образом, что Γ не принадлежит множеству уровня функции β.

В соответствии с теоремой Биркгофа – Хинчина [5, 6] имеем

$$\left\langle\sum_i u_i\frac{\partial L^*}{\partial u_i}(\Gamma)\right\rangle=\lim_{t\to\infty}\int_0^t\sum_i u_i\frac{\partial L^*}{\partial u_i}(\Gamma)d\tau=\varkappa=\text{const} \tag{2.16}$$

где постоянная $\varkappa$ не зависит от положения начальной точки на Γ, исключая множество точек меры нуль (по отношению к μ^*).

С другой стороны, на основании (2.14) получаем

$$\left\langle\sum_i u_i\frac{\partial L^*}{\partial u_i}(\Gamma)\right\rangle=-\beta|_{t=0} \tag{2.17}$$

Стало быть, среднее согласно (2.17) определяется начальным положением изображающей точки на Γ. При этом мере таких начальных положений (по отношению к μ^*), если учесть, что Γ не принадлежит множеству уровня функции β, отлична от нуля. Приходим к противоречию. Последнее позволяет сделать вывод, что предположение об устойчивости равновесия $\dot{u}=u=0$ и тем самым решения (1.4) неверно. Теорема 1 доказана.

Следствие. Стационарные треугольные решения Лагранжа ($|r_{ij}|=r_0=\text{const}$) задачи трех тел неустойчивы по Ляпунову.

Замечания. 1°. Переход от равенства (2.10) к равенству (2.14) можно интерпретировать как процедуру интегрирования входящих в (2.10) величин вдоль векторного поля, определяемого уравнениями возмущенного движения. Таким образом, в рамках предложенного подхода прослеживается связь со вторым методом Ляпунова, в котором при исследовании устойчивости используется оператор дифференцирования вдоль векторного поля.

2°. Предложенная схема доказательства неустойчивости ЛК (1.4) остается справедливой и в случае плоской задачи ($z=0$), когда возмущения принадлежат плоскости конфигурации.

3. Ограничимся ниже рассмотрением плоской задачи притягивающихся материальных точек ($z=0$), предполагая тем самым, что возмущения стационарной ЛК (1.4) принадлежат плоскости конфигурации.

Поскольку система (1.1) допускает существование интеграла центра масс, то в соответствии с выбором системы отсчета без ограничения общности примем

$$\sum_i m_i r_i=0 \tag{3.1}$$

и как следствие [8, 9] получаем

$$\sum_i m_i r_i^2=M^{-1}\sum_{i<j}m_i m_j|r_{ij}|^2,\quad M=\sum_i m_i \tag{3.2}$$

С учетом (3.1), (3.2) имеем

$$T_0 = \frac{1}{2}\omega^2 M^{-1} \sum_{i<j} m_i m_j |r_{ij}|^2$$

Исходя из существования решения (1.4), запишем

$$|r_{ij}| = r_{0ij} + x_{ij}, \quad i<j \tag{3.3}$$

где x_{ij} соответствуют малым возмущениям решения (1.4). Тогда в окрестности точки $|r_{ij}| = r_{0ij}$ получаем

$$T_0 + U = \sum_{i<j}\left(\frac{1}{2}\omega^2 M^{-1} r_{0ij}^2 + \lambda r_{0ij}^{-k}\right) m_i m_j + \sum_{i<j}(\omega^2 M^{-1} r_{0ij} - \lambda k r_{0ij}^{-k-1}) m_i m_j x_{ij} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i<j}\left[\omega^2 M^{-1} + \lambda k(k+1) r_{0ij}^{-k-2}\right] m_i m_j x_{ij}^2 + O\left(\sum_{i<j} \|x_{ij}\|^3\right) \tag{3.4}$$

В частности, как видно из (3.4), в случае задачи 3 тел, когда $r_{0ij} = r_0 = \text{const}$, $\lambda = G$, $k = 1$, выбор ω согласно равенству $\omega^2 = MGr_0^{-3}$ обеспечивает отсутствие линейных членов относительно x_{ij} в правой части равенства (3.4). Таким образом, в данном случае критическим точкам функции $T_0 + U$ в конфигурационном пространстве соответствуют ее критические точки в пространстве взаимных расстояний. В общей ситуации, что уже видно на примере задачи 4 тел ([3], с. 428), это не так.

Наряду с (3.3), учитывая (2.1), имеем равенство

$$|r_{ij}| = \sqrt{\left[(r_{0j} - r_{0i}) + (u_j - u_i)\right]^2}$$

и, таким образом, возмущения x_{ij} стационарных взаимных расстояний $|r_{ij}| = r_{0ij}$ всегда можно выразить как функции возмущений u_i, u_j векторов r_{0i}, r_{0j}, которые соответствуют ЛК (1.4). Связь между x_{ij} и u_i, u_j позволяет поставить вопрос: при каких условиях неустойчивость по Ляпунову решения (1.4) влечет орбитальную неустойчивость последнего?

Теорема 2. Пусть существуют:

1) уходящее решение $u^*(t) = (u_1, \ldots, u_n)^T$ уравнений возмущенного движения (2.8), которое сколь угодно близко проходит от начала $\dot{u} = u = 0$;

2) последовательность $\{t_s\} \subset J^+ = [0, a[$ (J^+ – максимальный правый интервал)

$$\lim_{s\to\infty} t_s = a \quad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

такие, что функция $T_0^*(u^*(t_s)) + U^*(u^*(t_s))$ строго возрастает, если $s \to \infty$, $u^*(t_s) \in s_\varepsilon = \{u \in R^n,\ \|u\| < \varepsilon\}$. Тогда плоская ЛК (1.4) орбитально неустойчива.

Доказательство. На основании равенств (2.2), (3.4) имеем

$$\sum_{i<j}\left(\omega^2 M^{-1} r_{0ij} - \lambda k r_{0ij}^{-k-1}\right) m_i m_j x_{ij} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i<j}\left[\omega^2 M^{-1} + \lambda k(k+1) r_{0ij}^{-k-2}\right] m_i m_j x_{ij}^2 + O\left(\sum_{i<j} \|x_{ij}\|^3\right) = T_0^* + U^* \tag{3.5}$$

Возрастание $T_0^* + U^*$ согласно условиям теоремы 2 на уходящем решении $u^*(t_s), t_s \in \{t_s\} \subset J^+$ влечет аналогичное свойство левой части равенства (3.5). Поскольку в невозмущенном движении $|r_{ij}| = r_{0ij} = \text{const}$, а $x_{ij}(t_s) = |r_{ij}(t_s)| - r_{0ij}$, то возрастание левой части равенства (3.5) в некоторой окрестности $s_\delta(\delta = \delta(\varepsilon))$ стационарной ЛК (1.4) эквивалентно выходу возмущенного движения из s_δ, независимо от того, как близко находилось оно от ЛК (1.4) в начальный момент времени. Полученное свойство возмущенного движения не удовлетворяет определению орбитальной устойчивости (см., например, [10], с. 478) установившегося движения (1.4). Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если характеристическое уравнение, соответствующее уравнениям в вариациях системы (2.8), содержит корни с действительными частями, не равными нулю, то плоская ЛК (1.4) орбитально неустойчива.

Доказательство. В условиях следствия уравнения возмущенного движения (2.8) допускают существование решений, асимптотически притягивающихся к точке $\dot{u} = u = 0$ при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$ (см. [11], с. 104). Стало быть, учитывая интеграл энергии уравнений возмущенного движения (2.6) и замечая, что асимптотические решения принадлежат множеству нулевого уровня его значений, приходим к заключению, что условия теоремы 2 удовлетворяются.

В частности, в задаче трех тел характеристическое уравнение, соответствующее уравнениям в вариациях, приводится к виду ([10], с. 586)

$$(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^4 + \omega^2\lambda^2 + k\omega^4) = 0$$

$$k = \frac{27}{4}(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)(m_1 + m_2 + m_3)^{-2}$$

и, таким образом, стационарные треугольные решения Лагранжа орбитально неустойчивы при выполнении неравенства

$$27(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) > (m_1 + m_2 + m_3)^2$$

Следствие 2. Если существует решение уравнений возмущенного движения (2.8), асимптотически стремящееся к точке $\dot{u} = u = 0$ при $t \to \infty$ $(t \to -\infty)$, то плоская ЛК (1.4) орбитально неустойчива.

Следствия 1, 2 позволяют утверждать, что теорема 2 конструктивна.

Замечания. 1°. Величина $T_0^* + U^*$ как функция u во многих случаях, например в задаче трех тел, является вырожденной ($\operatorname{grad}(T_0^* + U^*)$ может обращаться в нуль, когда $\|u\| \neq 0$). Поэтому из неустойчивости положения равновесия $\dot{u} = u = 0$ по Ляпунову еще не следует существование уходящего решения $u^*(t)$, на котором функция $T_0^* + U^*$ возрастает. Таким образом, без дополнительных ограничений равенство (3.5) не позволяет установить эквивалентность между неустойчивостью по Ляпунову ЛК (1.4) и ее орбитальной неустойчивостью.

2°. Уравнения возмущенного движения (2.8) относятся к классу консервативных систем с гироскопическими силами, когда последние соизмеримы с потенциальными силами. Поэтому нахождение функции действия по Гамильтону в явном виде в данном случае в отличие от [4] не позволяет столь же просто воспользоваться ею для исследования устойчивости. Вместе с тем применение функции действия как некоторого аналога вспомогательной функции Ляпунова и в этой ситуации оказывается конструктивным. Отметим, что известные критерии неустойчивости равновесия (см., например, обзор [12]) в основном относятся к случаю, когда обусловливающие неустойчивость равновесия потенциальные силы превалируют над гироскопическими. При рассмотрении противоположного случая, когда гироскопические силы превалируют над потенциальными [13], предполагалась специальная структура потенциальной энергии, которой функция $T_0^* + U^*$ не охватывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 523 с.
2. *Соколов Ю.Д.* Особые траектории системы свободных материальных точек. Киев: Изд-во АН УССР. 1951. 127 с.
3. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 560 с.

4. *Сосницкий С.П.* О действии по Гамильтону как функции фазовых переменных // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 144–150.
5. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 550 с.
6. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 383 с.
7. *Kryloff N., Bogoliouboff N.* La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire // Ann. math. 2 sér. 1937. V. 38. N 1. P. 65–113.
8. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
9. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
10. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
11. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.:ОНТИ, 1935. 386 с.
12. *Румянцев В.В., Сосницкий С.П.* О неустойчивости равновесия голономных консервативных систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 144–166.
13. *Болотин С.В., Негрини П.* Асимптотические траектории гироскопических систем // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1993. № 6. С. 66–75.

Поступила в редакцию
24.III.1995

Киев