УДК 531.36

© 1996 г. Л.Б. Ряшко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННЫХ ОРБИТАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

В связи с исследованием орбитальной устойчивости нелинейных стохастических систем рассматриваются две формы систем первого приближения (с шумами первого и второго типа). Для систем первого приближения вводится понятие Р-устойчивости. Необходимым и достаточным условием Р-устойчивости является существование периодического решения у матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Для этого критерия предлагается эквивалентная форма, позволяющая свести вопрос об устойчивости стохастической системы к задаче отыскания спектрального радиуса некоторого положительного оператора. При этом оценки спектрального радиуса снизу дают необходимые, а сверху – достаточные условия устойчивости. Возможности построения конструктивных оценок демонстрируются на примере системы с одним шумом второго типа. Для двумерной системы (спектральный радиус находится в явном виде) дается параметрический критерий устойчивости, являющийся стохастическим аналогом известного признака Пуанкаре.

Рассмотрим автономную систему

$$dx = f(x)dt \tag{0.1}$$

где x – n-мерный вектор, $x = \xi(t)$ – T-периодическое решение системы (0.1), отличное от точки покоя ($f(\xi(t)) \neq 0$), и γ – фазовая траектория этого решения (орбита). Необходимые и достаточные условия экспоненциально орбитальной устойчивости (теорема Андронова–Витта и ее аналоги [1–3]), выраженные через характеристические показатели системы первого приближения для возмущенного движения

$$dy = F(t)ydt, \quad F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)) \tag{0.2}$$

относятся к первому методу Ляпунова.

Основным методом исследования устойчивости стохастических систем (см. [4–5]) является второй метод Ляпунова. Для исследования орбитальной устойчивости системы (0.1) были предложены [6] функции Ляпунова (ФЛ) специальной конструкции – орбитальные функции Ляпунова (ОФЛ). Краткое описание ОФЛ дается в разд. 1. Метод ОФЛ был использован [7] при анализе устойчивости детерминированной орбиты γ к воздействию случайных возмущений системы стохастических уравнений Ито

$$dx = f(x)dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(x)dw_r(t) \tag{0.3}$$

Здесь $w_r(t)$ $(r = 1,...,m)$ – независимые стандартные винеровские процессы, $\sigma_r(x)$ – достаточно гладкие вектор-функции соответствующей размерности. Для того чтобы $x = \xi(t)$ оставалось решением системы (0.3), предполагается

$$\sigma_r|_\gamma = 0 \tag{0.4}$$

В исследованиях по устойчивости точки покоя в качестве ФЛ для нелинейной системы традиционно берется ФЛ соответствующей системы первого приближения. Отметим, что в [7] построение ОФЛ проводилось без привлечения систем первого приближения. Данная работа посвящена введению для нелинейной системы (0.3) конструкций систем первого приближения и исследованию их устойчивости.

Системы первого приближения вводятся (разд. 2) в связи с аппроксимацией производящего дифференциального оператора системы (0.3) на классе ОФЛ (разд. 1) и имеют две формы (шумы первого и второго типа). Системы с шумами второго типа устроены проще, чем системы с шумами первого типа [8]. Вместе с тем система даже с одним шумом второго типа позволяет охватить такие важные случаи, как уравнение n-го порядка (разд. 2), а также общую двумерную систему (разд. 6).

Кроме того, специально подобранный один шум второго типа может служить мажорантой для набора из m произвольных шумов первого типа (разд. 5).

Системы первого приближения образуют некоторый класс. Этот класс составляют линейные стохастические дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами (2.1), (2.2), имеющие характерную особенность – детерминированное периодическое решение с соответствующим вырождением мультипликативных помех (2.3), (2.4). Для систем данного класса в разд. 3 вводится понятие Р-устойчивости. Необходимым и достаточным условием Р-устойчивости (теорема 1) является существование Р-положительно определенного Т-периодического решения у соответствующего матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Решение этого уравнения может быть найдено методами установления (см. теорему 2) и итераций (разд. 4). Результаты разд. 2 и 3 придают критерию устойчивости теоремы 1 из [7] традиционную форму теоремы об устойчивости по первому приближению.

Решать вопрос об устойчивости, напрямую исследуя разрешимость матричного уравнения Ляпунова, часто бывает неудобно, особенно в случаях, близких к критическим. Для систем с постоянными коэффициентами на основе спектральной теории положительных операторов были получены [8], [9] достаточно простые и эффективные критерии устойчивости. В разд. 4 аналогичный подход распространяется на исследование устойчивости рассматриваемых здесь систем с периодическими коэффициентами. Теорема 3 сводит вопрос об устойчивости стохастической системы к задаче отыскания спектрального радиуса ρ некоторого положительного оператора и проверке неравенства $\rho < 1$. При этом оценки для ρ снизу позволяют получать необходимые, а сверху – достаточные условия устойчивости. Возможности построения конструктивных оценок демонстрируются в разд. 5 на примере системы с одним шумом второго типа.

В разд. 6 для случая $n = 2$ (система на плоскости) спектральный радиус найден в явном виде. Это позволило получить параметрический критерий устойчивости, являющийся стохастическим аналогом известного признака Пуанкаре.

1. Орбитальные функции Ляпунова. Достаточно гладкая функция является ОФЛ в некоторой окрестности U орбиты γ, если

$$v|_{\gamma} = 0, \quad v|_{U/\gamma} > 0 \tag{1.1}$$

При доказательстве теоремы об устойчивости по первому приближению для случая точки покоя в качестве ФЛ берут квадратичные формы. Аналогичную роль при рассмотрении орбитальной устойчивости играют [6] функции вида

$$v(x) = \Delta^T(x)\Phi(\gamma(x))\Delta(x) \tag{1.2}$$

Здесь $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка траектории γ, $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – вектор отклонения точки x от орбиты γ, $\Phi(\cdot)$ – функция, определенная на кривой γ, значения которой $\Phi(x)$ при каждом $x \in \gamma$ есть симметрическая $(n \times n)$-матрица и

$$\Phi(x)r(x) = 0 \tag{1.3}$$

где $r(x)$ – вектор, касательный к кривой γ в точке x. Функцию (1.2) естественно назвать орбитальной квадратичной формой. Отметим, что всякая ОФЛ имеет своим первым приближением подходящую орбитальную квадратичную форму.

Функции $\Phi(\cdot)$ при помощи решения $x = \xi(t)$ системы (0.1), задающего естественную параметризацию кривой γ, свяжем с элементами V пространства Σ. Пространство Σ составляют Т-периодические симметрические $(n \times n)$-матрицы $V(t)$, определенные и достаточно гладкие на R^1, для которых при любом $t \in R^1$ справедливо равенство

$$V(t)f(\xi(t)) = 0 \tag{1.4}$$

Всякая функция $\Phi(\cdot)$ определяет Т-периодическую матрицу $V(t) = \Phi(\xi(t))$ и наоборот, каждая матрица $V(t) \in \Sigma$, посредством обратной к $x = \xi(t)$ функции $t = t(x)$, задает на γ функцию $\Phi(x) = V(t(x))$. При этом равенства (1.3), (1.4) легко следуют друг из друга.

Как видим, орбитальная квадратичная форма $\upsilon(x)$ в достаточно малой окрестности U однозначно определяется соотношением

$$\upsilon(x) = \Delta^T(x)V(t(\gamma(x)))\Delta(x) \tag{1.5}$$

по решению $\xi(t)$ и матрице $V \in \Sigma$.

Положительная определенность (1.1) функции (1.5) связана со свойством Р-положительной определенности матрицы $V(t)$. Рассмотрим матрицу $P_y = I - yy^T / (y^T y)$. Матрица P_y задает оператор проектирования на подпространство, ортогональное вектору y. Введем Т-периодическую матрицу $P(t) = P_{y(t)}$.

Определение 1 [6]. Т-периодическую симметрическую матрицу $V(t)$ будем называть $P(t)$ – положительно определенной в момент t, если для любого вектора z, такого, что $P(t)z \neq 0$, справедливо неравенство $z^T V(t) z > 0$. Матрицу $V(t)$, являющуюся $P(t)$ – положительно определенной при любом $t \in R^1$, будем называть P – положительно определенной.

В пространстве Σ рассмотрим конус матриц $K = \{V \in \Sigma | V(t)$ – неотрицательно определенная при любом $t \in R^1\}$ и множество K_P, где $K_P = \{V \in \Sigma | V(t)$ – Р-положительно определенная$\}$

2. Системы первого приближения. Рассмотрим стохастические системы

$$dz = F(t)zdt + \sum S_r(t)zdw_r \tag{2.1}$$

$$dz = F(t)zdt + \sum \sqrt{(z, Q_r(t)z)}d\eta_r \tag{2.2}$$

где z – n-мерный вектор, $w_r(t)$ $(r = 1, ..., m)$ – независимые в совокупности стандартные винеровские процессы, $\eta_r(t)$ $(r = 1, ..., m)$ – n-мерные винеровские процессы с параметрами

$$Ed\eta_r(t) = 0, \qquad Ed\eta_r(t)d\eta_r^T(t) = G_r(t)dt$$

Параметры в (2.1), (2.2) – $(n \times n)$-матрицы $F(t)$, $S_r(t)$, $Q_r(t)$, $G_r(t)$ – Т-периодические функции Q_r, G_r – симметрические и неотрицательно определенные. Суммирование всегда ведется от $r = 1$ до $r = m$.

При этом предполагается, что некоторая Т-периодическая вектор-функция $y(t)$ есть детерминированное решение систем (2.1), (2.2) и

$$S_r(t)y(t) = 0 \tag{2.3}$$

$$Q_r(t)y(t) = 0 \tag{2.4}$$

Будем называть [8] шумы системы (2.1) шумами первого типа, а шумы системы (2.2) – шумами второго типа.

Системы (2.1), (2.3) и (2.2), (2.4) возникают в качестве систем первого приближения при аппроксимации производящего дифференциального оператора L нелинейной системы (0.3).

Оператор L задается [5] равенством

$$Lv(x) = \left(f(x), \ \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(\sigma_r(x), \ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \sigma_r(x) \right)$$

Аппроксимация Lv, где $v(x)$ – ОФЛ, в окрестности орбиты γ имеет вид [7]

$$Lv(x) \doteq \Delta^T(x) W(t(x)) \Delta(x) \tag{2.5}$$

Здесь $W(t) = \mathcal{L}_1[V(t)]$, где

$$\mathcal{L}_1[V] = V' + F^T V + VF + \sum S_r^T V S_r \tag{2.6}$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\xi(t)), \quad F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S_r(t) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(\xi(t))$$

При этом оператор $\mathcal{L}_1$, действующий в пространстве Σ, связан с производящим дифференциальным оператором

$$L_1 v(t,z) = \frac{\partial v(t,z)}{\partial t} + \left(F(t)z, \ \frac{\partial v(t,z)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(S_r(t)z, \ \frac{\partial^2 v(t,z)}{\partial z^2} S_r(t)z \right)$$

линейной системы (2.1) соотношением

$$L_1(z^T V(t) z) = z^T (\mathcal{L}_1[V(t)]) z = z^T W(t) z \tag{2.7}$$

Соотношения (2.5)–(2.7) и определяют роль системы (2.1), как системы первого приближения в решении вопроса об устойчивости нелинейной системы (0.3). Здесь матрица $V(t)$ одновременно задает как ФЛ $v(t,z) = z^T V(t) z$ системы (2.1), так и ОФЛ (1.5) системы (0.3). Как видим, при исследовании орбитальной устойчивости взаимосвязь между функциями Ляпунова нелинейной системы и соответствующей системы первого приближения устроена несколько сложнее, чем в случае точки покоя.

Известно, что функция $y(t) = f(\xi(t))$ есть решение системы (0.2). Дифференцируя тождество $\sigma_r(\xi(t)) \equiv 0$ (см. (0.4)) по t, получим тождество

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(\xi(t)) f(\xi(t)) \equiv 0$$

означающее, что для матриц S_r системы (2.1) выполняется (2.3). Таким образом, система первого приближения (2.1) обладает специфическим свойством – имеет детерминированное решение $y(t)$.

Пусть в системе (0.3) коэффициенты диффузии имеют вид

$$\sigma_r(x) = \beta_r(x) \varphi_r(x) \tag{2.8}$$

где $\beta_r(x)$ – скалярные функции: $\beta_r|_\gamma = 0$, $\varphi_r(x)$ – вектор-функции размерности n. Функция $\beta_r(x)$ задает интенсивность r-го шума, а $\varphi_r(x)$ "распределяет" его воздействие по уравнениям системы. Для таких коэффициентов диффузии параметры S_r системы первого приближения (2.1) имеют вид

$$S_r(t) = p_r(t) q_r(t), \quad p_r(t) = \varphi_r(\xi(t)), \quad q_r(t) = \frac{\partial \beta_r}{\partial x}(\xi(t))$$

Вместе с тем в качестве системы первого приближения здесь может быть выбрана и система (2.2).

Действительно, при (2.8) матрица $W(t)$ в (2.5) может быть записана в форме

$W(t)=\mathcal{L}_2[V(t)]$, где

$$\mathcal{L}_2[V]=V'+F^TV+VF+\sum\mathrm{tr}(VG_r)Q_r \tag{2.9}$$

$$G_r(t)=p_r(t)p_r^T(t),\quad Q_r(t)=q_r(t)q_r^T(t) \tag{2.10}$$

причем оператор $\mathcal{L}_2$ связан соотношением

$$\mathcal{L}_2(z^TV(t)z)=z^T(\mathcal{L}_2[V(t)])z$$

с производящим дифференциальным оператором L_2 системы (2.2). Параметры шумов системы (2.2) связаны с коэффициентами (2.8) системы (0.3) соотношениями (2.10). При этом можно положить $\eta_r(t)=w_r(t)q_r(t)$. Дифференцируя тождество $\beta_r(\xi(t))=0$ по t, получим тождество $q_r^T(t)y(t)=0$, означающее, что для матриц $Q_r(t)$ системы (2.2) выполняется (2.4). Таким образом, наряду с системой вида (2.1), содержащей шумы первого типа, в качестве системы первого приближения можно брать систему с шумами второго типа (2.2).

Во многих важных случаях форма шумов второго типа для систем первого приближения более естественна (см. замечание 2 и пример из разд. 6). Шумы второго типа устроены проще шумов первого типа. Это, например, позволяет, используя один шум второго типа в качестве мажоранты сразу для нескольких шумов первого типа, получить простые достаточные условия устойчивости системы с шумами первого типа (см. замечание 6).

Замечание 1. Пусть в системе (2.2) $G_r=G$ ($r=1,\ldots,m$). Тогда оператор $\mathcal{L}_2$ имеет вид

$$\mathcal{L}_2[V]=V'+F^TV+VF+\mathrm{tr}(VG)Q,\quad Q=\sum Q_r$$

и может быть реализован с помощью следующей системы, содержащей всего один шум:

$$dz=F(t)zdt+\sqrt{(z,Q(t)z)}d\eta(t) \tag{2.11}$$

где $\eta(t)$ – n-мерный винеровский процесс с параметрами

$$Ed\eta(t)=0,\quad Ed\eta(t)d\eta^T(t)\doteq G(t)dt$$

Замечание 2. Рассмотрим уравнение n-го порядка

$$x^{(n)}=g(x,x',\ldots,x^{(n-1)})+\sum\beta_r(x,x',\ldots,x^{(n-1)})w_r'(t)$$

с T-периодическим решением $x=\xi(t)$: $\beta_r(\xi(t),\ldots,\xi^{(n-1)}(t))=0$. Записывая это уравнение в форме системы (0.3), получим

$$x_1=x,\quad x_2=x',\ldots,x_n=x^{(n-1)}$$

$$f_1=x_2,\ldots,f_{n-1}=x_n,\quad f_n=g(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\sigma_r=\beta_r(x_1,\ldots,x_n)\varphi,\quad \varphi=(0,\ldots,0,1)^T$$

Системой первого приближения в классе систем с шумами первого типа здесь будет

$$dz=F(t)zdt+\sum\varphi q_r^Txdw_r$$

где

$$F(t)=\begin{Vmatrix} 0 & 1\ 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0\ 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0\ 0 & \ldots & 1\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n}\end{Vmatrix},\quad q_r^T(t)=\left(\frac{\partial\beta_r}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\beta_r}{\partial x_n}\right)$$

вычислены вдоль решения $\xi(t)$, а в классе систем с шумами второго типа (см. замечание 1) – система с одним шумом (2.11), где $Q=\sum q_rq_r^T$, $\eta(t)=w(t)\varphi$, $w(t)$ – скалярный стандартный винеровский процесс.

3. Р-устойчивость линейных систем. Для систем вида (2.1), (2.3) и (2.2), (2.4) исследуем устойчивость тривиального решения $z = 0$. Из-за наличия у этих систем Т-периодического решения $y(t) = f(\xi(t))$ точка покоя $z = 0$ не может быть экспоненциально устойчивой в традиционном смысле. Здесь рассматривается более слабый аналог такой устойчивости, определяемый с помощью проектора $P(t) = P_{y(t)}$ из разд. 1.

Определение 2. Тривиальное решение $z = 0$ системы (2.1) будем называть экспоненциально Р-устойчивым в среднем квадратичном, если существуют такие $\alpha > 0$, $L > 0$, что

$$E\| P(t)z(t)\|^2 \leqslant Le^{-\alpha t}E\| P(0)z_0\|^2 \tag{3.1}$$

при любых начальных условиях $z(0) = z_0$ решения $z(t)$ системы (2.1). При этом для краткости систему (2.1) будем называть Р-устойчивой.

Во избежание недоразумений отметим, что в литературе [5] используется близкий термин "экспоненциальная р-устойчивость" (р – прописная), связанный с поведением моментов р-й степени.

Теорема 1. Пусть система (2.1) является Р-устойчивой. Тогда

а) при любой матрице $C \in K$ уравнение

$$\mathcal{L}_1[V] = V' + F^T V + VF + \sum S_r^T VS_r = -C(t) \tag{3.2}$$

имеет в K единственное решение – матрицу $V \in K$,

б) если $C \in K_P$, то $V \in K_P$.

Пусть для некоторой матрицы $C \in K_P$ уравнение (3.2) имеет решение $V \in K_P$. Тогда система (2.1) является Р-устойчивой.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функцию $v(t,z) = z^T V(t)z$, задаваемую некоторой симметрической матрицей $V(t)$. Для $z(t)$ – решения системы (2.1) – из формулы Ито и (2.7) получаем

$$\frac{d}{dt}[Ev(t,z(t))] = EL_1v(t,z(t)) = E[z^T(t)(\mathcal{L}_1[V(t)])z(t)] \tag{3.3}$$

Если $V(t)$ – решение уравнения (3.2), а $z(\tau) = z$, где z – произвольный детерминированный вектор, то после интегрирования соотношения (3.3) имеем

$$E[z^T(t)V(t)z(t)] - z^T V(\tau)z = -\chi(\tau,t) \tag{3.4}$$

$$\chi(\tau,t) = \int\limits_{\tau}^{t} E[z^T(s)C(s)z(s)]ds$$

Пусть $V(s, t)$, где $s \in [\tau, t]$, – решение уравнения $\mathcal{L}_1[V(s)] = C(s)$ с условием $V(t, t) = 0$. Тогда из (3.4) следует равенство

$$\chi(\tau,t) = z^T V(\tau,t)z \tag{3.5}$$

Для любой матрицы $C \in K$ интеграл в (3.5) монотонно возрастает по t и, благодаря (3.1), при $t \to +\infty$, сходится. Это означает, что функция $V(\tau, t)$ по t – монотонно возрастающая и имеет некоторый предел

$$V(\tau) = \lim_{t\to+\infty} V(\tau,t)$$

Для предельной функции $V(\tau)$ из (3.5) следует равенство

$$\chi(\tau,\infty) = z^T V(\tau)z \tag{3.6}$$

Функция $V(\tau)$ является решением уравнения (3.2). Поскольку матрица C – неотрицательно определенная, то и V будет также неотрицательно определенной матрицей. Пусть $z_1(s)$ – решение уравнения (2.1) с условием $z_1(\tau+T)=z$. Благодаря T-периодичности коэффициентов уравнения (2.1) и матрицы C, справедливо равенство

$$\chi(\tau,\infty)=\int\limits_{\tau+T}^{\infty} E[z_1^T(s)C(s)z_1(s)]ds$$

из которого следует, что $V(\tau) = V(\tau + T)$. Как видим, предельная функция $V(\tau)$ является T-периодической. Подставив в (3.6) $z(s) = f(\xi(s))$, $z = f(\xi(\tau))$, с учетом $C(s)f(\xi(s)) = 0$, сразу получим, что $V(\tau)f(\xi(\tau)) = 0$. Таким образом, матрица $V \in K$ и является решением (3.2).

Докажем его единственность. Пусть $V_1 \in K$ и $V_2 \in K$ – два решения уравнения (3.2). Разность $\Delta = V_1 - V_2$ удовлетворяет однородному уравнению $\mathcal{L}_1[\Delta]=0$. Тогда из (3.4) следует, что

$$E[z^T(t)\Delta(t)z(t)]=z^T\Delta(\tau)z \tag{3.7}$$

Левая часть (3.7), благодаря P-устойчивости системы (2.1) и ограниченности $\Delta(t) = P(t)\Delta(t)P(t)$, при $t \to \infty$, стремится к нулю. Переходя в (3.7) к пределу, получим равенство $z^T\Delta(\tau)z=0$, из которого следует $\Delta(\tau) = 0$. Доказательство утверждения а завершено.

Пусть теперь $C \in K_P$, тогда для любого z, такого, что $P(\tau)z \neq 0$, выполняется неравенство $z^TC(\tau)z > 0$, откуда следует неравенство

$$\chi(\tau,\infty) > 0$$

означающее, что $z^TV(\tau)z > 0$. Таким образом, доказано, что $V \in K_P$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть матрицы $V \in K_P$ и $C \in K_P$ связаны соотношением (3.2). Тогда из (3.3) для произвольного решения $z(t)$ системы (2.1) следует тождество

$$\frac{d}{dt}E[z^T(t)V(t)z(t)]=-E[z^T(t)C(t)z(t)] \tag{3.8}$$

Поскольку $V, C \in K_P$, то найдутся $k_i > 0$ (i = 1, 2, 3), такие, что

$$k_1V(t)\leqslant C(t) \tag{3.9}$$

$$k_2P(t)\leqslant V(t)\leqslant k_3P(t) \tag{3.10}$$

Из (3.8) и (3.9) следует неравенство

$$E[z^T(t)V(t)z(t)]\leqslant e^{-k_1t}E[z^T(0)V(0)z(0)] \tag{3.11}$$

а из (3.10) и (3.11) – неравенство

$$E\|P(t)z(t)\|^2\leqslant \frac{k_3}{k_2}e^{-k_1t}E\|P(0)z(0)\|^2$$

означающее P-устойчивость системы (2.1).

Данный результат есть периодический и "P-проекционный" вариант теоремы 3.2 гл. 6 из [5].

Решение $V(t)$ уравнения (3.2) может быть найдено методом установления. Рассмотрим на $[0, T]$ последовательность функций $V_n(t)$, сформированных следующим образом: $V_1(t)$ – решение уравнения (3.2) с условием $V_1(t) = B$, где B – произвольная симметрическая $(n\times n)$-матрица, для которой $Bf(\xi(0)) = 0$. Остальные функции находятся рекуррентно: $V_{n+1}(t)$ – решение уравнения (3.2) с условием $V_{n+1}(t) = V_n(0)$.

Теорема 2. Пусть система (2.1) является P-устойчивой. Тогда решение $V(t) \in K$ уравнения (3.2) при $C \in K$ есть предел последовательности $V_n(t)$: $V(t)=\lim_{n\to\infty} V_n(t)$.

Доказательство. Пусть $V(\tau, t)$ – решение уравнения (3.2) с условием $V(t, t) = B(t)$, где $B(t) = P(t)BP(t)$. Из (3.4) следует, что

$$z^T V(\tau,t)z = \chi(\tau,t) + E[z^T(t)B(t)z(t)] \tag{3.12}$$

Аналогичное равенство для $V(\tau)$ – единственного в K решения уравнения (3.2) – отличается от (3.12) заменой $B(t)$ на $V(t)$.

Благодаря Р-устойчивости системы (2.1) получим, что $V(\tau, t) - V(\tau) \to 0$ при $t \to \infty$ для любого z. Следовательно, $V(\tau) = \lim_{t\to\infty} V(\tau,t)$.

Теперь утверждение теоремы 2 следует из очевидных соотношений

$$V_n(t) = V(t, nT), \quad B(nT) = B$$

Метод установления, как видно из доказательства теоремы 2, сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{-\alpha T}$, где α – показатель экспоненциального убывания в (3.1).

Замечание 3. Результаты, полученные здесь для систем с шумами первого типа, справедливы и для систем с шумами второго типа. При этом следует систему (2.1), (2.3) и уравнение (3.2) в определении 2 и теоремах 1, 2 заменить соответственно на систему (2.2), (2.4) и уравнение

$$\mathcal{L}_2[V] = V' + F^T V + VF + \sum \operatorname{tr}(VG_r)Q_r = -C \tag{3.13}$$

4. Спектральный критерий Р-устойчивости. Уравнения (3.2), (3.13) запишем в единой форме

$$\mathcal{L}[V] = -C, \quad \mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{S} \tag{4.1}$$

где $\mathcal{A}$ – дифференциальный оператор, связанный с детерминированной частью системы (2.1), (2.2) соотношением

$$\mathcal{A}[V] = V' + F^T V + VF \tag{4.2}$$

а $\mathcal{S}$ – оператор, связанный с соответствующими стохастическими частями этих систем. При этом для (2.1) имеем

$$\mathcal{S}[V] = \mathcal{S}_1[V] = \sum S_r^T V S_r \tag{4.3}$$

а для (2.2)

$$\mathcal{S}[V] = \mathcal{S}_2[V] = \sum \operatorname{tr}(VG_r)Q_r \tag{4.4}$$

В этих обозначениях

$$\mathcal{L}_l = \mathcal{A} + \mathcal{S}_l, \quad l = 1,2$$

Необходимым условием Р-устойчивости систем (2.1), (2.2) является Р-устойчивость детерминированной системы (0.2). В предположении Р-устойчивости системы (0.2) из теоремы 1 (утверждение а) и того, что конус K – воспроизводящий в пространстве Σ, следует, что у оператора $\mathcal{A}$ на Σ существует обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$, причем $\mathcal{A}^{-1}$ – отрицательный. Заметим, что оператор $\mathcal{S}$ в обоих случаях (4.3) и (4.4) является положительным.

Применив к обеим частям уравнения (4.1) оператор $\mathcal{A}^{-1}$, получим соотношение

$$V - \mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}[C], \quad \mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S} \tag{4.5}$$

Таким образом, для систем (2.1) и (2.2) введены положительные операторы $\mathcal{P}_l = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}_l$. Имеются [8, 9] аналогичные конструкции для случая стохастических систем с постоянными коэффициентами. Привлечение спектральной теории положительных операторов позволило получить достаточно конструктивные критерии устойчивости. В данной работе подобный подход распространяется на системы с периодическими коэффициентами.

Теорема 3. Для того чтобы система (2.1) ((2.2)) была Р-устойчива, необходимо и достаточно, чтобы

а) система (0.2) была Р-устойчива,

б) выполнялось неравенство

$$\rho(\mathcal{P}) < 1 \tag{4.6}$$

где $\rho(\mathcal{P})$ – спектральный радиус оператора $\mathcal{P}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (2.1) ((2.2)) Р-устойчива. Тогда будет Р-устойчива система (0.2), что обеспечивает существование оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Описанным выше способом, из соотношения (4.1) при некоторых $V \in K_P$, $C \in K_P$ (см. теорему 1) можно получить соотношение (4.5), из которого при учете $-\mathcal{A}^{-1}[C] \in K_P$ следует, что $V - \mathcal{P}[V] \in K_P$. Оператор $\mathcal{P}$, как произведение двух положительных операторов $-\mathcal{A}^{-1}$ и $\mathcal{S}$, также является положительным. Воспользовавшись теперь теоремой 16.7 из [10], сразу получим неравенство (4.6).

Достаточность. Р-устойчивость системы (0.2), как уже отмечалось, обеспечивает существование оператора $\mathcal{A}^{-1}$, а вместе с ним и оператора $\mathcal{P}$. В условиях (4.6) у оператора $\mathcal{B}$, определяемого равенством $\mathcal{B}[V] = V - \mathcal{P}[V]$, существует обратный, причем $\mathcal{B}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}^k$, т.е. $\mathcal{B}^{-1}$ – положительный. Это означает, что для $C \in K_P$ матрица $V = \mathcal{B}^{-1}[-\mathcal{A}^{-1}[C]] \in K_P$ и является решением уравнения (4.5). Отсюда в силу эквивалентности (4.5) и (4.1) следует, что $V \in K_P$ удовлетворяет уравнению (4.1). Следовательно (см. теорему 1) система (2.1) ((2.2)) будет Р-устойчива.

Замечание 4. Для системы

$$dz = F(t)zdt + \varepsilon\sum S_r(t)zdw_r \tag{4.7}$$

где постоянная $\varepsilon > 0$ задает интенсивность помех, величина $\rho(\mathcal{P})$ определяет критическое значение $\varepsilon^* = \sqrt{1/\rho(\mathcal{P})}$ параметра ε, по достижению которого система (4.7) перестает быть Р-устойчивой. В случае $\rho(\mathcal{P}) = 0$ система (4.7) будет Р-устойчивой при любом ε.

Замечание 5. Из доказательства теоремы 3 следует, что матрица $V(t)$ – решение уравнения (4.1) – является пределом монотонно возрастающей последовательности матриц $V_n(t)$: $V_0(t) = -\mathcal{A}^{-1}[C]$, $V_n = \sum_{k=0}^{n}\mathcal{P}^k[V_0]$. При этом матрицы V_n находятся итерациями $V_{n+1} = \mathcal{P}[V_n] + V_0$. В условиях, когда решение детерминированного уравнения Ляпунова (отыскание значений оператора $\mathcal{A}^{-1}$) находится достаточно просто, а стохастическая система имеет определенный запас устойчивости (спектральный радиус оператора $\mathcal{P}$ отделен от единицы), метод итераций является эффективным алгоритмом решения уравнения (4.1).

Теорема 3 сводит вопрос об устойчивости стохастической системы к задаче отыскания спектрального радиуса ρ оператора $\mathcal{P}$ и проверке условия $\rho < 1$. При этом оценки спектрального радиуса снизу позволяют получить необходимые, а сверху – достаточные условия устойчивости.

5. Оценки спектрального радиуса оператора $\mathcal{P}$ для системы с одним шумом второго типа. Рассмотрим систему

$$dz = F(t)zdt + \sqrt{(z, Q(t)z)}d\eta \tag{5.1}$$

где $\eta(t)$ – n-мерный винеровский процесс с параметрами $Ed\eta(t) = 0$, $Ed\eta(t)d\eta^T(t) = G(t)dt$, $G \in K$, $Q \in K_P$. Предполагается, что ее детерминированная часть (система

(0.2)) – Р-устойчива, т.е. существует $\mathcal{A}^{-1}$. Оператор $\mathcal{S}$ для (5.1) имеет вид

$$\mathcal{S}[V] = \mathrm{tr}(VG)Q \tag{5.2}$$

У положительного оператора $\mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$ спектральный радиус ρ является (см. теорему 11.5 из [10]) собственным значением с собственным вектором $V \in K$. Соотношение $\mathcal{P}[V] = \rho V$ при учете (5.2) можно записать в виде

$$-\mathcal{A}^{-1}[\mu(t)Q(t)] = \rho V(t), \quad \mu(t) = \mathrm{tr}(V(t)G(t)) \geqslant 0 \tag{5.3}$$

где $\mu(t)$ – Т-периодическая функция. Из (5.3) следует, что

$$\mathcal{B}[\mu] = \rho\mu \tag{5.4}$$

где $\mathcal{B}[\delta] = -\mathrm{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\delta(t)Q(t)]G(t))$ – положительный оператор на конусе неотрицательных Т-периодических скалярных функций $\delta(t)$.

Здесь $\mu(t)$ – собственная функция оператора $\mathcal{B}$, при этом $\rho(\mathcal{B}) = \rho(\mathcal{P}) = \rho$. Простая структура оператора $\mathcal{S}$ в случае одного шума второго типа (см. (5.2)) позволила перейти от оператора $\mathcal{P}$ к оператору $\mathcal{B}$, снизив тем самым размерность решаемой задачи.

Пусть (условие нормировки) $\int\mu(t)dt = 1$ (здесь и всюду далее, если не оговорено противное, интегрирование ведется от $t = 0$ до $t = T$). Тогда из (5.4) следует, что

$$\rho = \int\mathcal{B}[\mu]dt = -\langle\mathcal{A}^{-1}[\mu Q], PGP\rangle \tag{5.5}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в пространстве Σ, определяемое равенством

$$\langle V, W\rangle = \int\mathrm{tr}(VW)dt$$

Переходя в (5.5) к сопряженному оператору, получим

$$\rho = \int\mu\,\mathrm{tr}(QD)dt = -\langle\mu Q, (\mathcal{A}^*)^{-1}[PGP]\rangle \tag{5.6}$$

где $D(t)$ – Т-периодическое решение уравнения

$$\mathcal{A}^*[D] = -D' + FD + DF^T = -PGP \tag{5.7}$$

Из (5.6) следуют простые оценки для ρ:

$$\min_{[0,T]}\mathrm{tr}(QD) \leqslant \rho \leqslant \max_{[0,T]}\mathrm{tr}(QD) \tag{5.8}$$

Отметим, что (5.7) – уравнение для вторых моментов $Ez(t)z^T(t)$ системы

$$dz = F(t)zdt + P(t)d\eta \tag{5.9}$$

получаемой из (5.1) заменой мультипликативного шума на соответствующий аддитивный. При этом независимо от выбора начальных данных матрица вторых моментов системы (5.9) сходится к Т-периодической матрице $D(t)$, задающей как сам спектральный радиус (5.6), так и оценки (5.8).

Рассмотрим другой способ оценки спектрального радиуса. Пусть $W(t) = -\mathcal{A}^{-1}[Q] \in K_P$ – решение уравнения

$$W' + F^TW + WF = -Q \tag{5.10}$$

Пусть $q_1(t) > 0$, $q_2(t) > 0$ – Т-периодические функции, связанные с матрицами $Q(t)$ и $W(t)$ неравенствами

$$q_1(t)W(t) \leqslant Q(t) \leqslant q_2(t)W(t) \tag{5.11}$$

Такие функции всегда существуют. Они использовались [11] для получения оценок характеристических показателей.

Рассмотрим функции

$$\alpha(\rho,t)=\mathrm{tr}(W(t)G(t))-\rho$$

$$\varphi_1(\rho,t)=q_1(t)\alpha^+(\rho,t)+q_2(t)\alpha^-(\rho,t) \tag{5.12}$$

$$\varphi_2(\rho,t)=q_2(t)\alpha^+(\rho,t)+q_1(t)\alpha^-(\rho,t)$$

$$\alpha^{\pm}=(\alpha\pm|\alpha|)/2,\quad I_l(\rho)=\int\varphi_l(\rho,t)dt,\quad l=1,2$$

Функции $I_l(\rho)$ непрерывны и на концах отрезка $[m, M]$, где $m=\min_{[0,T]}\mathrm{tr}(W(t)G(t))$, $M=\max_{[0,T]}\mathrm{tr}(W(t)G(t))$, имеют разные знаки. Пусть ρ_l – корень функции $I_l(\rho)$.

Теорема 4. Пусть детерминированная система (0.2) является P-устойчивой и выполняются неравенства (5.11). Тогда для спектрального радиуса $\rho(\mathcal{P})$ справедливы оценки

$$\rho_1\leqslant\rho(\mathcal{P})\leqslant\rho_2 \tag{5.13}$$

В случае, когда q_1 и q_2 в (5.11) – постоянные, справедливы оценки

$$\frac{q_1}{q_2}J\leqslant\rho(\mathcal{P})\leqslant\frac{q_2}{q_1}J,\qquad J=\frac{1}{T}\int\mathrm{tr}(WG)dt \tag{5.14}$$

Доказательство. Функции

$$\mu_l(t)=\exp\left(-\frac{1}{\rho_l}\int_0^t\varphi_1(\rho_1,t)dt\right)>0$$

являются Т-периодическими решениями уравнений

$$\rho_l\mu_l'+\mu_l\varphi_l(\rho_l,t)=0 \tag{5.15}$$

Из неравенства (5.11) для функций $\varphi_l(\rho, t)$ следует соотношение

$$\varphi_1(\rho,t)W(t)\leqslant\alpha(\rho,t)Q(t)\leqslant\varphi_2(\rho,t)W(t) \tag{5.16}$$

Из (5.15), (5.16) следуют неравенства, которые при учете равенств (5.12) эквивалентны неравенствам

$$\rho_1\mathcal{A}[V_1]+\mathcal{S}[V_1]\geqslant 0,\qquad \rho_2\mathcal{A}[V_2]+\mathcal{S}[V_2]\leqslant 0 \tag{5.17}$$

где $V_l(t)=\mu_l(t)W(t)$. В свою очередь неравенства (5.17) эквивалентны неравенствам

$$\mathcal{P}[V_1]\geqslant\rho_1V_1,\qquad \mathcal{P}[V_2]\leqslant\rho_2V_2$$

из которых (см. теоремы 16.1, 16.2 из [10]) следует неравенство (5.13).

Рассмотрим случай, когда в неравенстве (5.11) $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – постоянные, т.е. справедливо неравенство

$$q_1W(t)\leqslant Q(t)\leqslant q_2W(t) \tag{5.18}$$

Представим функции φ_l из (5.12) в виде

$$\varphi_1(\rho,t)=q_1\alpha(\rho,t)+(q_2-q_1)\alpha^-(\rho,t),\qquad \varphi_2(\rho,t)=q_2\alpha(\rho,t)+(q_1-q_2)\alpha^-(\rho,t)$$

Из неравенств

$$(q_2-q_1)\alpha^-(\rho,t)\geqslant-(q_2-q_1)\rho,\qquad (q_1-q_2)\alpha^-(\rho,t)\leqslant-(q_1-q_2)\rho$$

следуют неравенства

$$\varphi_1(\rho,t)\geqslant q_1\,\mathrm{tr}(WG)-q_2\rho=\varphi_1^*,\qquad \varphi_2(\rho,t)\leqslant q_2\,\mathrm{tr}(WG)-q_1\rho=\varphi_2^*$$

из которых следуют неравенства (см. (5.12))

$$I_1^*(\rho)\leqslant I_1(\rho),\qquad I_2^*(\rho)\geqslant I_2(\rho),\qquad I_l^*(\rho)=\int\varphi_l^*(\rho,t)dt \tag{5.19}$$

Корни ρ_l^* функций $I_l^*(\rho)$

$$\rho_1^* = \frac{q_1}{q_2} J, \quad \rho_2^* = \frac{q_2}{q_1} J$$

благодаря неравенствам (5.19), связаны с корнями ρ_l функций $I_l(\rho)$ неравенствами

$$\rho_1^* \leqslant \rho_1, \quad \rho_2 \leqslant \rho_2^*$$

Таким образом, при учете (5.13), получаем (5.14).

Замечание 6. Система (5.1) с одним шумом второго типа может быть использована в качестве мажоранты для системы (2.1), содержащей несколько шумов второго типа. Действительно, из неравенства $S_r^T V S_r \leqslant \operatorname{tr}(V S_r S_r^T) P$, справедливого при любой матрице $V \in K$, следует неравенство

$$\mathcal{S}_1[V] = \sum S_r^T V S_r \leqslant \operatorname{tr}(VG)P = \mathcal{S}_2[V], \quad G = \sum S_r S_r^T$$

Операторы $\mathcal{P}_l = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}_l$ связаны неравенством $\mathcal{P}_1 \leqslant \mathcal{P}_2$, из которого следует, что $\rho(\mathcal{P}_1) \leqslant \rho(\mathcal{P}_2)$. Таким образом, Р-устойчивость системы (5.1) с $Q = P$, $\eta = \sum S_r w_r$ является достаточным условием Р-устойчивости системы (2.1).

6. Пример. Рассмотрим систему (2.1) при $n = 2$. В этом случае матрица проектирования имеет ранг, равный единице, и может быть записана в форме $P(t) = v(t)v^T(t)$, где $v(t)$ – нормированный вектор ортогональный при любом t вектору $y(t) = f(\xi(t))$. Из условий (2.3) следует, что матрицы S_r представимы в виде $S_r = b_r v^T$, где $b_r = S_r v$. Благодаря такой структуре S_r, m шумов первого типа системы (2.1) можно заменить одним шумом второго типа. В результате от системы (2.1) перейдем к эквивалентной системе

$$dz = F(t)zdt + \sqrt{z^T P z}\, d\eta, \quad \eta(t) = \sum b_r w_r(t) \tag{6.1}$$

Матрица V, играющая роль собственного вектора оператора $\mathcal{P}$ системы (6.1), также имеет ранг, равный единице, и представима в виде $V(t) = \mu(t)P(t)$, где $\mu(t)$ – T-периодическая скалярная функция. Соотношение $\mathcal{P}[V] = \rho V$ (здесь ρ – спектральный радиус оператора $\mathcal{P}$) приводит к следующему уравнению для $\mu(t)$:

$$\rho[\mu' P + \mu P' + \mu(F^T P + PF)] + \operatorname{tr}(GP)P = 0 \tag{6.2}$$

$$G = \sum b_r b_r^T = \sum S_r S_r^T$$

После умножения равенства (6.2) слева на v^T и справа на v с учетом равенств $v^T P v = (v^T v)^2 = 1$, $v^T P' v = (v^T v)' = 0$ получим уравнение

$$\rho(\mu' + \alpha(t)\mu) + \beta(t)\mu = 0 \tag{6.3}$$

где

$$\alpha(t) = v^T (F^T + F) v, \quad \beta(t) = v^T G v \tag{6.4}$$

Разделив равенство (6.3) на $\mu \neq 0$ и проинтегрировав по отрезку $[0, T]$, получим

$$\rho = -\int \beta(t)dt \left[\int \alpha(t)dt\right]^{-1}$$

– единственное собственное значение оператора $\mathcal{P}$. Неравенство

$$\int \alpha(t)dt < 0 \tag{6.5}$$

является необходимым и достаточным условием Р-устойчивости детерминированной части системы (6.1). Благодаря равенству

$$\int \alpha(t)dt = 2\int \operatorname{tr} F dt$$

условие (6.5) эквивалентно известному [2] неравенству (признак Пуанкаре)

$$\lambda = T^{-1} \int \operatorname{tr} F dt < 0$$

Здесь λ – характеристический показатель системы $dz = F(t)zdt$. Отметим, что, благодаря вырожденности S_r

$$\beta(t) = \mathrm{tr}\left(\sum S_r(t) S_r^T(t)\right)$$

Таким образом, неравенство $\rho < 1$ (необходимое и достаточное условие P-устойчивости системы (2.1)) можно записать в следующей форме:

$$\int \mathrm{tr}(2F(t) + \sum S_r(t) S_r^T(t))dt < 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // ЖЭТФ. 1933. Т. 2. Вып. 5. С. 373–374.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
4. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 809–823.
5. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
6. *Мильштейн Г.Н.* Устойчивость и стабилизация периодических движений автономных систем // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 744–749.
7. *Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б.* Устойчивость и стабилизация орбит автономных систем при случайных возмущениях // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 951–958.
8. *Ряшко Л.Б.* Стабилизация линейных стохастических систем с возмущениями, зависящими от состояния и управления // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 612–620.
9. *Левит М.В., Якубович В.А.* Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа белый шум // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 142–148.
10. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985. 255 с.
11. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
26.I.1995