УДК 531.36:62–50

© 1996 г. Г.В. Папаков, А.М. Тарасьев, А.А. Успенский

ЧИСЛЕННЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

Рассматривается задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка, левая часть которого однородна по вектору производных, причем производная по времени входит аддитивно, а граничные условия заданы на правом конце интервала времени. К подобной задаче сводится решение дифференциальной игры на фиксированном интервале времени с терминальным функционалом. Традиционный сеточный метод построения решения краевой задачи неприменим, поскольку обобщенное решение, вообще говоря, негладкое. Предлагается математический аппарат, основанный на методах решения игровых задач. Итоговая вычислительная схема, обоснование которой содержится в трех теоремах, основана на прямоугольной сетке по пространственной переменной и разбиении интервала времени. В отличие от классического подхода, в вычислительной схеме используются не конечные разности, а субдифференциалы выпуклых оболочек функций, аппроксимирующих функцию цены.

Существуют различные по форме, но эквивалентные по существу определения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби [1–4]. Определения вводятся на основе замены уравнения парой (дифференциальных) неравенств. Данная работа выполнена на базе конструкций теории позиционных дифференциальных игр [5, 6], разработанной Н.Н. Красовским и его сотрудниками и объединивший методы решения широкого круга проблем – от теорем существования до создания численных алгоритмов. Следует отметить, что исследованиям последних лет, проводимых в рамках других подходов (см., например, [7–10]), предшествовали работы многих авторов в 50–60-х годах.

Работа продолжает исследования [1–6, 11–18][1].

1. Постановка задачи. Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)+h(t,x,\nabla w(t,x))=0 \quad \left(\nabla w(t,x)=\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}(t,x),\ldots,\frac{\partial w}{\partial x_n}(t,x)\right)\right) \tag{1.1}$$

$$w(\vartheta,x)=\sigma(x),\quad t\in[0,\vartheta),\quad x\in R^n$$

Здесь $h(t, x, s)$ – гамильтониан.

Исследование проблемы приближенного построения обобщенного (минимаксного, вязкостного) решения задачи (1.1) ведется в контексте дифференциальной игры (ДИ)

$$\dot x=f(t,x,u,v)\equiv f^1(t,x,u)+f^2(t,x,v) \tag{1.2}$$

$$t\in[0,\vartheta],\quad u\in P\subset R^p,\quad v\in Q\subset R^q$$

Здесь x – n-мерный фазовый вектор системы, u и v – векторы управляющих

[1] См. также *Ушаков В.Н.* К теории минимаксных дифференциальных игр. Часть I. Свердловск. 1980. 187 с. – Деп. в ВИНИТИ 16.10.80, № 4425–80.

воздействий первого и второго игроков соответственно, P и Q – компакты. Гамильтониан динамической системы имеет вид

$$h(t,x,s)=\min_{u\in P}\langle s,f^1(t,x,u)\rangle+\max_{v\in Q}\langle s,f^2(t,x,v)\rangle$$

$\langle s,f\rangle$ – скалярное произведение векторов s и f.

Правая часть системы (1.2) удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решения. В качестве показателя качества ДИ рассматривается терминальный функционал

$$\gamma(x(\cdot))=\sigma(x(\vartheta)) \qquad (1.3)$$

Здесь $\sigma(\cdot)$: $R^n\Rightarrow R$ – функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица. Функционал γ ставит в соответствие реализовавшемуся движению $x(\cdot)=\{x(t),\ 0\leqslant t\leqslant\vartheta\}$ системы (1.2) число $\sigma(x(\vartheta))$ – значение платы ДИ.

При указанных ограничениях на правую часть системы (1.2) существует функция цены $(t,x)\Rightarrow w(t,x)$: $[0,\vartheta]\times R^n\Rightarrow R$ ДИ (1.2), (1.3), совпадающая с обобщенным решением задачи (1.1). Функция цены – единственная функция при заданной плате (1.3), которая удовлетворяет одновременно свойствам u- и v-стабильности. Свойство u-стабильности (v-стабильности) означает слабую инвариантность надграфика (подграфика) функции цены относительно некоторого семейства дифференциальных включений – семейства характеристических включений для (1.1). Построение слабо инвариантных множеств может быть осуществлено при помощи оператора стабильного поглощения (ОСП) [14]. Здесь отметим, что существует определенный произвол в выборе семейства характеристических включений, что используется ниже при формировании ОСП.

Приводимая в работе конструкция предполагает построение сужения функции w на ограниченное множество $D\subset[0,\vartheta]\times R^n$. В качестве этого множества выбирается стабильный мост в конфликтной задаче сближения, описываемой уравнением (1.2), с множеством

$$\hat M=O(\hat x,\hat r)=\{x\in R^n:\ \|x-\hat x\|\leqslant\hat r\}$$

– шаром радиуса $\hat r$ и с центром в некоторой произвольно взятой точке $\hat x$. Здесь $\hat r$ – достаточно большое положительное число.

Определение 1. Многозначное отображение

$$t\Rightarrow D(t)\subset R^n,\qquad t\in[0,\vartheta]$$

называется стабильным мостом в задаче (1.2), (1.3), если $D(\vartheta)\subset\hat M$, а его график $\{(t,x)\in R\times R^n:\ t\in[0,\vartheta],\ x\in D(t)\}$ замкнут и слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$\dot x\in F(t,x,s)\quad \text{при любом}\quad s\in S_n$$

$$F(t,x,s)=\{f\in F:\langle s,f\rangle\geqslant h(t,x,s)\},\qquad F=\{f\in R^n:\|f\|\leqslant K\}$$

Здесь $S_n=\{s\in R^n:\ \|s\|=1\}$ – единичная сфера, постоянная K выбрана из условия

$$K>2\sup_{(t,x,u,v)\in\hat D\times P\times Q}\|f(t,x,u,v)\| \qquad (1.4)$$

где $\hat D$ – ограниченное множество из $[0,\vartheta]\times R^n$, содержащее в себе D.

Отметим, что при указанных ограничениях на правую часть уравнения (1.2) семейство многозначных отображений

$$\{(t,x)\Rightarrow F(t,x,s):\ s\in S_n\} \qquad (1.5)$$

порождающее множество D, удовлетворяет следующим условиям.

$\hat{A}$ 1. Для любых $(t, x, s) \in \hat{D} \times S_n$ множество $F(t, x, s)$ выпукло, замкнуто и удовлетворяет вложению $F(t, x, s) \subset F$.

$\hat{A}$ 2. Для любых $(t, x, s) \in \hat{D} \times S_n$ справедливо соотношение

$$\max_{q\in S_n} \min_{f\in F(t,x,q)} \langle s, f \rangle = h(t,x,s).$$

$\hat{A}$ 3. Для отображения $(t, x, s) \Rightarrow F(t, x, s)$ существует функция $\delta \Rightarrow \hat{\omega}(\delta)$: $R \Rightarrow$ $\Rightarrow R(\hat{\omega}(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0)$, такая, что

$$\text{dist}(F(t_1,x,s), F(t_2,y,s)) \leq \hat{\omega}(|t_1 - t_2| + \|x - y\|)$$

при всех (t_1, x) и (t_2, y) из $\hat{D}$ и любом s из S_n. Здесь $\text{dist}(F_1, F_2)$ – хаусдорфово расстояние между множествами F_1 и F_2.

$\hat{A}$4. Существует число $\lambda_F \in [0, +\infty)$, такое, что для любых (t, x) и $(t, y) \in \hat{D}$ и любом $s \in S_n$

$$\text{dist}(F(t, x, s), F(t, y, s)) \leq \lambda_F \|x - y\|$$

Отметим еще один факт. Непрерывная функция $w(\cdot)$ является функцией цены для ДИ (1.2), (1.3) тогда и только тогда, когда множество $W = \text{epi } w$ ($W = \text{hypo } w$) является стабильным мостом в задаче сближения с целевым множеством $M = \text{epi } \sigma$ ($M = \text{hypo } \sigma$), решаемой игроком, распоряжающимся управлением u (управлением v), для расширенной системы

$$\dot{x} = f(t,x,u,v), \quad \dot{\chi} = 0 \tag{1.6}$$

Здесь epi σ и hypo σ – соответственно, надграфик и подграфик функции σ, $\chi \in R$.

Очевидно, что это утверждение остается в силе, когда рассматривается сужение функции w на стабильный мост D:

$$w(\cdot): D \Rightarrow R$$

В дальнейшем задачу построения надграфика сужения на D функции w будем называть задачей 1, а задачу о построении подграфика сужения функции w – задачей 2. Подходы к решению каждой из задач близки, поэтому описание построений проведем для одной из них – задачи 1.

2. Семейство форм оператора стабильного поглощения для расширенной системы. В этом разделе предлагаются корректные (с точки зрения согласованности с имеющимися в теории ДИ теоремами) формы ОСП для построения множества W – надграфика сужения на D функции цены ДИ (1.2), (1.3). Здесь вводится в рассмотрение совокупность семейств многозначных отображений и исследуются свойства семейств. Показывается, что каждый представитель совокупности индуцирует ОСП. Это позволяет выделить множество форм ОСП, каждая из которых решает задачу 1.

Введем ряд обозначений

$$z = (x, \chi), \quad x \in R^n, \quad \chi \in R$$

$$\bar{f}(t,z,u,v) = (f(t,x,u,v),0), \quad f(t,x,u,v) \in R^n, \quad 0 \in R$$

если $\Omega \subset R^n \times R$, то pr Ω – обозначение для ортогональной проекции Ω на R^n.

Рассмотрим ДИ для расширенной динамической системы (1.6):

$$\dot{z} = \bar{f}(t,z,u,v), \quad z \in R^{n+1}, \quad t \in [0,\vartheta], \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{2.1}$$

В качестве целевого множества примем

$$M = \text{epi } \sigma_{D(\vartheta)} \tag{2.2}$$

– надграфик сужения функции платы на множество $D(\vartheta)$.

Стабильный мост W для задачи сближения (1.2)–(1.3) доставляет решение задачи 1.

Гамильтониан системы (2.1) зададим равенством

$$H(t,z,l)=\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle l,\hat{f}(t,z,u,v)\rangle,\qquad l\in R^{n+1}$$

Символом S_{n+1} обозначим множество векторов $\{l\in R^{n+1}:\|l\|=1\}$.

Построим прямое произведение множеств F и отрезка $[-c,c]$:

$$F^c=F\times[-c,c],\qquad c\in[0,+\infty)$$

В пространстве переменных (t,z) выделим область D^*, априори содержащую W: $D^*=\hat{D}\times R$.

Введем в рассмотрение совокупность семейств многозначных отображений, отвечающих значениям параметра $c\in[0,+\infty)$:

$$\{(t,z)\Rightarrow F^c(t,z,l): l\in S_{n+1}\}\qquad (2.3)$$

$$(t,z)\in D^*,\quad F^c(t,z,l)=\{\bar{f}\in F^c:\langle l,\bar{f}\rangle\geqslant H(t,z,l)\}$$

Условия $\hat{A}1$–$\hat{A}4$ для семейства отображений (15) влекут наличие аналогичных им условий для любого семейства отображений из совокупности (2.3). Имеют место следующие условия A1–A4.

A1. Для любого $c\geqslant 0$ и любых $(t,z,l)\in D^*\times S_{n+1}$ множество $F^c(t,z,l)$ выпукло, замкнуто и удовлетворяет вложению $F^c(t,z,l)\subset F^c$.

A2. Для любого $c\geqslant 0$ и любых $(t,z,l)\in D^*\times S_{n+1}$ справедливо соотношение

$$\max_{q\in S_{n+1}}\min_{\bar{f}\in F^c(t,z,q)}\langle l,\bar{f}\rangle=H(t,z,l)=h(t,\operatorname{pr}z,\operatorname{pr}l)$$

A3. При любом $c\geqslant 0$ для отображения $(t,z,l)\Rightarrow F^c(t,z,l)$ найдется постоянная $\nu(c)$, такая, что

$$\operatorname{dist}(F^c(t_1,z,l),F^c(t_2,z',l))\leqslant\nu(c)\hat{\omega}(|t_1-t_2|+\|\operatorname{pr}z-\operatorname{pr}z'\|)$$

при всех (t_1,z) и (t_2,z') из D^* и любом l из S_{n+1}.

A4. Для любого $c\geqslant 0$ существует постоянная $\lambda=\lambda(c)\in(0,+\infty)$, такая, что для любых (t,z) и $(t,z')\in D^*$ и любом $l\in S_{n+1}$

$$\operatorname{dist}(F^c(t,z,l),F^c(t,z',l))\leqslant\lambda\|\operatorname{pr}z-\operatorname{pr}z'\|$$

Известно [17], что любое семейство отображений, удовлетворяющее условиям A1–A4, индуцируют ОСП для соответствующей задачи сближения. В рассматриваемом случае такие семейства отображений образуют совокупность и выделяются в рамках этой совокупности значением неотрицательного параметра c.

Определение 2. Оператором стабильного поглощения

$$\pi^c(t_*,t^*,\cdot)\,(0\leqslant t_*<t^*\leqslant\vartheta)$$

для задачи (2.1), (2.2) назовем отображение

$$B\Rightarrow\pi^c(t_*,t^*,B):2^{R^{n+1}}\Rightarrow 2^{R^{n+1}}$$

заданное соотношением

$$\pi^c(t_*,t^*,B)=\{z_*\in R^{n+1}: B\cap Z^c(t^*;t_*,z_*,l)\neq\emptyset\quad\text{при всех } l\in S_{n+1})\}$$

Здесь $Z^c(t^*;t_*,z_*,l)$ – множество всех тех точек из R^{n+1}, в которые в момент t^*

приходят решения $z(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*, z(t_*) = z_*)$ дифференциального включения

$$\dot{z} \in F^c(t,z,l), \quad l \in S_{n+1}$$

Определение 3. Множество $W \subset D^*$ назовем стабильным мостом в задаче 1 сближения с замкнутой целью $M \subset R^{n+1}$, если выполняются условия

1) $W(\vartheta) \subset M$;

2) $W(t_*) \subset \pi^c(t_*, t^*, W(t^*))$ при всех t_*, t^* $(0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$.

Таким образом, описано семейство $\{\pi^c(\cdot), c \in [0, +\infty)\}$, форм ОСП, каждая из которых может быть привлечена для конструирования epi w_D.

3. Аппроксимации оператора стабильного поглощения для расширенной системы. Следуя принятому ранее подходу [12], введем в рассмотрение понятие аппроксимирующей формы оператора стабильного поглощения для задачи 1.

Определение 4. Аппроксимирующей формой оператора стабильного поглощения для задачи 1 $\tilde{\pi}^c(t_*, t^*, \cdot)$ $(c \geqslant 0;\ 0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ назовем отображение $B \Rightarrow \tilde{\pi}^c(t_*, t^*, B)$: $2^{R^{n+1}} \Rightarrow 2^{R^{n+1}}$, заданное соотношением

$$\tilde{\pi}^c(t_*,t^*,B) = \{z_* \in R^{n+1} : B \cap \tilde{Z}_1^c(t^*; t_*, z_*) \neq \emptyset$$

при всех $l \in S_{n+1}\}$. Здесь $\tilde{Z}_1^c(t^*; t_*, z_*) = z_* + (t^* - t_*)F^c(t_*, z_*, l)$.

Пусть $\Gamma = \{0, t_1, ..., t_N = \vartheta\}$ – разбиение отрезка $[0, \vartheta]$.

Приведем определение системы множеств, аппроксимирующей максимальный стабильный мост W в задаче 1.

Определение 5. Аппроксимирующей системой множеств в задаче 1 назовем совокупность множеств $\{\tilde{W}^c(t_i) \subset R^{n+1}: t_i \in \Gamma\}$, такую, что

$$\tilde{W}^c(t_N) = M_{\varepsilon(N,c)}$$

$$\tilde{W}^c(t_i) = \tilde{\pi}^c(t_i, t_{i+1},\ \tilde{W}^c(t_{i+1})), \quad i = N-1, \dots, 0$$

Здесь $c \geqslant 0$, B_ε – замкнутая ε-окрестность множества B, где

$$B_\varepsilon = \{b \in R^{n+1}:\ \min_{a \in B} \rho(a,b) \leqslant \varepsilon\}$$

$$\rho(a,b) = \max\{|\,a_i - b_i\,|: \quad i = 1, \dots, n+1\}$$

Число $\varepsilon(N, c)$ находится из рекуррентных соотношений

$$\varepsilon(i+1,c) = \Delta_i \nu(c) \hat{\omega}(\Delta_i(1+K)) + (1+\lambda\,\Delta_i)\varepsilon(i,c)$$

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i, \quad \varepsilon(0,c) = 0$$

Здесь, K – постоянная из условия (1.4), $\hat{\omega}(\cdot)$ – функция из условия $\hat{A}3$, $\lambda = \lambda(c)$ – постоянная из условия A4, постоянная $\nu(c)$ – из условия A3.

Введем понятие предела аппроксимирующей системы множеств.

Рассмотрим последовательность $\{\Gamma_j: j = 1, 2, ...\}$ разбиений отрезка $[0, \vartheta]$, диаметры $\Delta_j = \max_i |\, t_{i+1} - t_i \,|$ $(i = 1, ..., N(j) - 1)$ которых стремятся к нулю при $j \to +\infty$.

Определение 6. Обозначим символом $\tilde{W}^c$ множество точек $(t_*, z_*) \in D^*$, для которых существует последовательность

$$\{(t_j, z_j):\ t_j = t_j(t_*) \in [0, \vartheta], \quad z_j \in \tilde{W}^c(t_j), \quad \lim_{j \to +\infty} z_j = z_*\}$$

Здесь

$$t_j(t_*)=\begin{cases}\min\limits_{(t_i\in\Gamma_j,\ t_i>t_*)} t_i, & t_*<\vartheta\\ t_*, & t_*=\vartheta\end{cases}$$

Множество $\tilde{W}^c$ будем называть пределом аппроксимирующей системы множеств $\{\tilde{W}_j^c(t_i): t_i\in\Gamma_j\}$ при $j\to+\infty$.

Теорема 1. Если отображение $(t,z,l)\Rightarrow F^c(t,z,l)$ $(c\geqslant 0)$ $((t,z,l)\in D^*\times S_{n+1})$ удовлетворяет условиям A1–A4, то множество $\tilde{W}^c$ совпадает с максимальным стабильным мостом W для задачи 1.

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству сходимости конструкций из работы [12].

4. Операторы шага. Укажем свойства аппроксимирующих форм ОСП на шаге разбиения временного интервала. Прежде чем их описать, выделим ряд обстоятельств. Построение функции цены ДИ осуществляется на основе сеточных процедур. В рассматриваемом случае сеточные процедуры предполагают умение находить с приемлемой точностью приращения вида $\delta w(t,x)=w(t+\Delta,x)-w(t,x)$, где $t\in[0,\vartheta)$, $\Delta>0$, $t+\Delta\in[0,\vartheta]$, $x\in D(t)\cap D(t+\Delta)$.

Отметим, что не каждая форма π^c $(c\in[0,+\infty))$ ОСП применима для этой цели. Так, форма π^c ОСП при $c=0$ "распространяет" свое действие вдоль уровней решений. Это означает, что с помощью π^0, представление о функции цены ДИ формируется через конструирование ее множеств уровня, для чего требуется решать относительно y уравнения вида $w(t+\Delta,x)-w(t,y)=0$, где $w(t+\Delta,x)=\mathrm{const}$. Ниже, в частности, показывается, что при достаточно больших значениях параметра c, оценивающих скорость изменения функции цены, отвечающие им аппроксимирующие формы ОСП позволяют приближенно вычислять приращения вида $\delta w(t,x)$. При этом формы оператора действуют эквивалентным образом и допускают использование локально-выпуклых оболочек.

Введем в рассмотрение коническое множество в пространстве переменных t, x:

$$\overline{D}=\{(t,x)\in[0,\vartheta]\times R^n:\ t\in[t_0,\vartheta],\ \ x\in(\hat{x}+(t-t_0)F\}$$

$$t_0=\max\{0,\vartheta-\hat{r}/K\}.$$

Из построений следует, что

1) множество $\overline{D}$ сильно инвариантно относительно включения $\dot{x}\in F$, следовательно, $\overline{D}\subset D$;

2) сечение $\overline{D}(t)$ множества $\overline{D}$ в каждый момент t есть шар с центром в точке $\hat{x}$ и радиусом $r=r(t)=\hat{r}-(\vartheta-t)K$.

Описываемые ниже конструкции, связанные с изучением свойств семейства форм $\{\pi^c(\cdot),\ c\geqslant 0\}$ ОСП, рассматриваются "над" множеством $\overline{D}$.

Определение 7. Пусть $t\in[t_0,\vartheta)$, число $\Delta>0$ и $(t+\Delta)\in[t_0,\vartheta]$, параметр $c\geqslant 0$. Оператором шага $\pi_\Delta^c(\cdot)$ назовем отображение $2^{R^{n+1}}\Rightarrow 2^{R^{n+1}}$, заданные соотношениями

$$\pi_\Delta^c(B)=\{z_*\in R^{n+1}:\ B\cap\tilde{Z}^c(t+\Delta;\ t,z_*,l)\neq 0\quad \forall l\in S_{n+1}\}$$

Здесь $B\subset R^{n+1}$, $\tilde{Z}^c(t+\Delta;t,z_*,l)=z_*+\Delta F^c(t,z_*,l)$.

Приступим к характеризации свойств операторов шага π_Δ^c. Всюду ниже выбор чисел t и Δ подчинен условию $t+\Delta\leqslant\vartheta$.

Будем говорить, что множество $\Omega\subset R^{n+1}$ устойчиво вверх [19], если включение $(x,\mu_*)\in\Omega$ влечет включение $(x,\mu^*)\in\Omega$, где $\mu^*>\mu_*$.

Свойство 1. Пусть параметр $c \in [0, +\infty)$, функция φ определена и ограничена на множестве $\overline{D}(t + \Delta)$. Тогда множество $\pi_\Delta^c(\text{epi}\ \varphi)$ не пусто и устойчиво вверх.

Устойчивые вверх множества порождают функции, которые определяются через операцию inf на соответствующем числовом множестве:

$$\psi_\Delta^c(x) = \inf\{\chi: (x, \chi) \in \pi_\Delta^c(\text{epi}\,\varphi), \quad x \in \overline{D}(t)\}, \qquad c \geqslant 0$$

Таким образом, операторы вида π_Δ^c переводят надграфики функций во множества, которые можно трактовать как надграфики некоторых функций.

Свойство 2. Пусть параметр $c \geqslant 0$, функция φ определена и непрерывна на множестве $\overline{D}(t + \Delta)$. Тогда для любой точки $x \in \overline{D}(t)$ найдется точка $y \in O(x, K\Delta)$, такая, что

$$\varphi(y) = \psi_\Delta^c(x).$$

Свойство 3. Пусть параметр $c \geqslant 0$, функция φ: $\overline{D}(t + \Delta) \Rightarrow R$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda = \lambda(\overline{D}(t + \Delta))$. Тогда для любой точки $x \in \overline{D}(t)$ выполняется оценка

$$|\psi_\Delta^c(x) - \varphi(y)| \leqslant 2\lambda K\Delta \qquad \forall\, y \in O(x, K\Delta)$$

Сформулируем условия, при которых операторы шага из совокупности $\{\pi_\Delta^c,\ c \geqslant 0\}$ действуют эквивалентным образом. При этом будем полагать, что операторы действуют эквивалентно, если совпадают порождаемые ими функции.

Напомним определение выпуклой оболочки функции [20].

Определение 8. Пусть φ – функция, определенная на множестве $\overline{D}(t + \Delta)$ из R^n. Рассмотрим сужение $\varphi_{O(x,\,K\Delta)}$ функции φ на шар $O(x, K\Delta)$, $x \in \overline{D}(t)$. Обозначим co φ локально-выпуклую оболочку (ЛВО) функции $\varphi_{O(x,\,K\Delta)}$:

$$\text{co}\,\varphi(y) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi(y^{(i)}):\ \alpha_i \geqslant 0,\quad i = 1, \ldots, n+1;\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1,\quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i y^{(i)} = y,\quad y^{(i)} \in O(x, K\Delta)\right\}$$

Подчеркнем, что ЛВО функции φ определяют два параметра: точка $x \in \overline{D}(t)$ и число $K\Delta$ – радиус шара с центром в точке x. При обозначении ЛВО указание на эти параметры для краткости опущены.

Формулируемая ниже теорема использует известные результаты [12], вытекает из условий А1–А2, свойств 1–3, определения ЛВО и теорем об отделимости выпуклого анализа. Определим прежде функции $\overline{\psi}_\Delta^c(\cdot)$: $\overline{D}(t) \Rightarrow R$, $c \geqslant 0$:

$$\overline{\psi}_\Delta^c(x) = \inf\{\chi:\ (x, \chi) \in \pi_\Delta^c(\text{epi co}\,\varphi_{O(x,K\Delta)})\}$$

Теорема 2. Если φ: $\overline{D}(t + \Delta) \Rightarrow R$ – функция, удовлетворяющая условию Липшица с постоянной λ, $x \in \overline{D}(t)$, то для любого $c \geqslant 2\lambda K$, для любого достаточно малого числа $\Delta > 0$ имеет место цепочка равенств

$$\pi_\Delta^c(\text{epi}\ \varphi_{O(x,K\Delta)}) = \pi_\Delta^c(\text{epi co}\,\varphi) = \pi_\Delta^0(\text{epi co}\,\varphi)$$

Теорема, в частности, утверждает, что при любом $c \geqslant 2\lambda K$ имеют место равенства

$$\psi_\Delta^c(x) = \overline{\psi}_\Delta^c(x) = \overline{\psi}_\Delta^0(x), \quad x \in \overline{D}(t)$$

5. Формулы разностного исчисления. Этот раздел содержит перевод описания функций, конструируемых с помощью операторов шага на сечениях сильно инвариантного множества $\overline{D}$, с языка теоретико-множественного на язык аналитических формул. Итак, в условиях теоремы 2 функции $\psi_\Delta^c(\cdot)$: $\overline{D}(t) \Rightarrow R$ совпадают. При этом имеет место представление

$$\psi_\Delta^c(x) = \max_{s \in S_n} \min_{f \in F(t,x,s)} \operatorname{co}\varphi(x + \Delta f), \quad x \in \overline{D}(t), \quad c \geq 2\lambda K \tag{5.1}$$

Обоснование равенства (5.1) опирается на определения операторов шага, семейств отображений (1.5) и (2.3), а также на условие А2.

Укажем некоторые свойства максимина от ЛВО функции φ. Для этого определим множества

$$F_{\text{ext}}(t,x) = \left\{ f_{\text{ext}} \in F\colon \max_{s \in S_n} \min_{f \in F(t,x,s)} \operatorname{co}\varphi(x + \Delta f) = \operatorname{co}\varphi(x + \Delta f_{\text{ext}}) \right\}, \quad (t,x) \in \overline{D}$$

Выберем постоянную K_0 из условия

$$\max_{(t,u,v) \in [t_0,\vartheta] \times P \times Q} \| f(t,x,u,v) \| \leq K_0 < K/2$$

Свойство 4. Справедливо соотношение

$$F_{\text{ext}}(t,x) \cap O(0,K_0) \neq 0, \quad \forall (t,x) \in \overline{D} \tag{5.2}$$

Это соотношение указывает на то, что максимин от ЛВО функции φ реализуется внутри области определения ЛВО. Соотношение (5.2) позволяет получить еще одно эквивалентное представление для функций ψ_Δ^c при $c \geq 2\lambda K$, а также обосновать непрерывность по Липшицу максимина от ЛВО φ.

Свойство 5. Если функция $\varphi(\cdot)$: $\overline{D}(t + \Delta) \Rightarrow R$ удовлетворяют условиям теоремы 2, то для построения функций $\psi_\Delta^c(\cdot)$: $\overline{D}(t) \Rightarrow R$ при $c \geq 2\lambda K$ применима формула

$$\psi_\Delta^c(x) = \max_{y \in O(x, K_0\Delta)} \max_{s \in \partial \operatorname{co}\varphi(y)} \{\Delta h(t,x,s) + \langle s, x - y \rangle + \operatorname{co}\varphi(y)\}, \quad x \in \overline{D}(t) \tag{5.3}$$

где

$$\partial \operatorname{co}\varphi(y) = \{s \in R^n\colon \operatorname{co}\varphi(y^*) - \operatorname{co}\varphi(y) \geq \langle s, y^* - y \rangle$$

для любого y^* из $O(x, K\Delta)\}$ – субдифференциал ЛВО функции φ, определенный в точке y, где $y \in O(x, K_0\Delta)$.

Вывод формулы (5.3) осуществляется средствами выпуклого анализа, опирается на критерий минимума выпуклой функции при наличии выпуклых ограничений [19] и определение семейства (1.5). Отметим, что представление (5.3) может быть получено с помощью формул сдвижек (см., например, [16]).

Свойство 6. Пусть функция φ: $\overline{D}(t + \Delta) \Rightarrow R$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ_φ. Тогда для любого $c \geq 2\lambda_\varphi K$ функция ψ_Δ^c: $\overline{D}(t) \Rightarrow R$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda_\varphi(1 + \Delta\lambda_F(1 + 3K))$:

$$| \psi_\Delta^c(x) - \psi_\Delta^c(y) | \leq \lambda_\varphi(1 + \Delta\lambda_F(1 + 3K)) \| x - y \|$$

$x \in \overline{D}(t)$, $y \in \overline{D}(t)$, λ_F – постоянная из условия А4.

Рассмотрим функции, составленные при помощи операторов шага π_Δ^c, $c \geq 0$. Пусть $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = \vartheta\}$ – разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$, функция $\varphi(\cdot)$: $\overline{D}(\vartheta) \Rightarrow R$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ_φ. Сформируем отвечающие этому разбиению функции

$$\psi^c(\cdot): \bigcup_{i=1}^{N} (t_i, \overline{D}(t_i)) \Rightarrow R, \quad c \geqslant 0 \tag{5.4}$$

по рекуррентным формулам

$$\psi^c(\vartheta, x) = \sigma(x), \quad x \in \overline{D}(\vartheta)$$

$$\psi^c(t_i, x) = \inf\{\chi: (x, \chi) \in \pi^c_{\Delta_i}(\mathrm{epi}\, \psi^c(t_{i+1}, \cdot), \quad x \in \overline{D}(t_i)\}$$

$$(\Delta_i = t_{i+1} - t_i, \ i = N-1, \ N-2, \ldots, 0)$$

Определим также оператор последовательного максимина от ЛВО. Для этого используем следующие обозначения.

$$G_B(t, \Delta, \varphi)(x) = \max_{s \in S_n} \min_{f \in F(t,x,s)} \mathrm{co}\, \varphi(x + \Delta f), \quad x \in \overline{D}(t)$$

$\Phi(X)$ – множество всех функций, рассматриваемых на множестве X.

Определение 9. Пусть $\Gamma = \{t_0, t_1, ..., t_N = \vartheta\}$ – разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$, φ – произвольная функция, определенная на $\overline{D}(\vartheta)$. Оператором последовательного максимина (ОПМ) назовем оператор $G(\Gamma, \varphi)$: $\Phi(\overline{D}(\vartheta)) \Rightarrow \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{N} (t_i, \overline{D}(t_i)\right)$, $t_i \in \Gamma$, заданный соотношениями

$$G(t_N, \varphi)(x) = \varphi(x), \quad x \in \overline{D}(\vartheta), \quad G(t_i, \ldots t_N, \varphi)(x) =$$

$$= G_B(t_i, \Delta_i, G_B(t_{i+1}, \Delta_{i+1}, (\ldots G_B(t_{N-1}, \Delta_{N-1}, \varphi)\ldots)))(x), \quad x \in \overline{D}(t_i), \quad i = N-1, \ldots, 0 \tag{5.5}$$

Из свойств 4–6 следует

Лемма. Пусть функция φ: $\overline{D}(\vartheta) \Rightarrow R$ удовлетворяет условию Липшица с константой λ_φ. Тогда для любого разбиения Γ отрезка $[t_0, \vartheta]$ и любых значений параметра $c \geqslant 2\lambda_\varphi \exp(\lambda_F(3K + 1)(\vartheta - t_0))$ отвечающие этим значениям функции (5.4) равны между собой и совпадают с функцией, порождаемой ОПМ:

$$\psi^c(t_i, x) = G_B(t_i, \Delta_i, G_B(t_{i+1}, \Delta_{i+1}, (\ldots G_B(t_{N-1}, \Delta_{N-1}, \varphi)\ldots)))(x) \quad x \in \overline{D}(t_i), \quad t_i \in \Gamma$$

Из теорем 1, 2 и леммы вытекает утверждение о том, что ОПМ аппроксимирует решение задачи Коши (1.1)–(1.2).

Теорема 3. Пусть функция $\sigma(\cdot)$: $\overline{D}(\vartheta) \Rightarrow R$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ_σ, семейство многозначных отображений $\{(t, x) \Rightarrow F(t, x, s): s \in S_n\}$ удовлетворяет условиям $\hat{A}1$–$\hat{A}4$, $\Gamma = \{t_0, t_1, ..., t_N = \vartheta\}$ – разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$, такое, что $\mathrm{diam}\, \Gamma = \max_i \{| t_{i+1} - t_i | : i = 0, ..., N\} \to 0$ при $N \to +\infty$.

Тогда

$$| w(t_i, x) - G_B(t_i, \Delta_i, (\ldots G_B(t_{N-1}, \Delta_{N-1}, \sigma))\ldots)(x) | \to 0, \quad x \in \overline{D}(t_i), \quad t_i \in \Gamma$$

при $\mathrm{diam}\, \Gamma \to 0$.

Замечания 1°. Аналогичным образом при решении задачи 2 формируется оператор последовательного минимакса – оператор $G^*(\Gamma, \varphi)$: $\Phi(\overline{D}(\vartheta)) \Rightarrow \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{N} (t_i, \overline{D}(t_i))\right)$, $t_i \in \Gamma$, который задается соотношениями

$$G^*(t_N, \varphi)(x) = \varphi(x), \quad x \in \overline{D}(\vartheta)$$

$$G(t_i, \ldots, t_N, \varphi)(x) = G_H(t_i, \Delta_i, G_H(t_{i+1}, \Delta_{i+1}, (\ldots G_H(t_{N-1}, \Delta_{N-1}, \varphi)\ldots))(x)$$

$$x \in \overline{D}(t_i), \quad i = N-1, \ldots, 0$$

Здесь

$$G_H(t,\Delta,\varphi)(x) = \min_{s\in S_n} \max_{f\in F_*(t,x,s)} \operatorname{conc}\varphi(x+\Delta f), \quad x\in \overline{D}(t)$$

Семейство многозначных отображений $\{(t, x) \Rightarrow F_*(t, x, s)\colon s \in S_n\}$, где $F_*(t, x, s) = \{f \in F\colon \langle s, f\rangle \leqslant h(t, x, s)\}$, удовлетворяет условиям, аналогичным $\ddot{\mathrm{A}}1$–$\ddot{\mathrm{A}}4$. Локально-вогнутая оболочка $\operatorname{conc}\varphi(\cdot) = -\operatorname{co}(-\varphi(\cdot))$.

2°. При дополнительных предположениях (см. [17, 18]) показывается, что операторы G и G^* сходятся со скоростью, пропорциональной квадратному корню из диаметра diam Γ разбиения Γ.

6. Вычислительная схема. Примеры. Основу вычислительной схемы, реализованной для двумерного по пространственной переменной случая, составляет оператор $\overline{G}$ – конечно-разностный аналог оператора G, рассматриваемый на фиксированном равномерном разбиении $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = \vartheta\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ с шагом Δ. На множества $\overline{D}(t_i)$, $t_i \in \Gamma$, накладываются прямоугольные сетки $\overline{D}(t_i, \alpha, \beta)$ с шагом разбиения $\alpha > 0$ по переменной x_1 и шагом разбиения β по переменной x_2:

$$\overline{D}(t_i,\alpha,\beta) = \{x(k,d)\in \overline{D}(t_i)\subset R^2\colon\ x_1(k,d) = \hat{x}_1 + \alpha k$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \ldots;\ x_2(k,d) = \hat{x}_2 + \beta d,\quad d = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

Оператор

$$\overline{G}(\Gamma,\varphi)\colon\ \Phi(\overline{D}(\vartheta,\alpha,\beta)) \Rightarrow \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{N} (t_i, \overline{D}(t_i,\alpha,\beta))\right),\quad t_i\in\Gamma$$

задается соотношениями

$$\overline{G}(t_N,\varphi)(x) = \varphi(x),\quad x\in \overline{D}(\vartheta,\alpha,\beta)$$

$$\overline{G}(t_i,\ldots,t_N,\varphi)(x) = \overline{G}_B(t_i,\Delta,\overline{G}_B(t_{i+1},\Delta,(\ldots\overline{G}_B(t_{N-1},\Delta,\varphi))\ldots))(x)$$

$$\overline{G}_B(t_i,\Delta,\varphi)(x(k,d)) = \max_{y\in O(x(k,d),K_0\Delta)} \max_{s\in\partial\operatorname{co}\varphi(y)} \{\Delta h(t_i,x(k,d),s) + \langle s, x(k,d)-y\rangle +$$

$$+ \operatorname{co}\varphi(y)\},\quad x(k,d)\in \overline{D}(t_i,\alpha,\beta),\quad i = N-1,\ldots,0$$

Здесь $\overline{G}_B$ – кусочно-линейная аппроксимация оператора G_B. Для случая, когда гамильтониан кусочно-линейная функция, а функция φ определена на сетке, значение оператора $\overline{G}_B$ вычисляется как последовательный максимум:

$$\overline{G}_B(t_i,\Delta,\varphi)(x(k,d)) = \max_{x(j,m)} \max_{p} \max_{s} \{\Delta h_p(t_i,x(k,d),s) +$$

$$+ \langle s, x(k,d) - x(j,m)\rangle + \operatorname{co}\varphi(x(j,m))\}$$

Перебор здесь осуществляется по узлам $x(j, m) \in O(x(k, d), \Delta K_0)$; по номерам p, выделяющим функции склейки $h_p(t_i, x(k, d), s) = h(t_i, x(k, d), s)$, когда s принадлежит конусу линейности $L_p(t_i, x(k, d))$ гамильтониана по s; по субградиентам s из множеств линейности $L_p(t_i, x(k, d), x(j, m)) = L_p(t_i, x(k, d)) \cap \partial\operatorname{co}\varphi(x(j, m))$ оператора $\overline{G}_B$ по переменной s.

Наибольшая трудность при численном моделировании состоит в построении выпуклой оболочки функции, заданной в узлах прямоугольной сетки. Здесь привлекается алгоритм "заворачивания подарка" [21], переработанный для рассматриваемого случая. Реализация алгоритма предполагает построение разбиения множества точек графика таблично заданной функции на непересекающиеся множества, овыпукление которых элементарно (в данном случае, используется метод "обхода Грэхема"). Основной процедурой алгоритма является процедура построения овыпукления объединения двух непересекающихся выпуклых оболочек. Эта процедура состоит в отыскании опорного ребра и осуществлении шага "заворачивания подарка" – последовательного построения граней овыпукления двух выпуклых оболочек. В качестве структуры представления выпуклой оболочки используется реберный список с двойными связями, что позволяет достаточно просто конструировать субдифференциалы выпуклой оболочки. Построение пересечений субдифференциалов с конусами линейности гамильтониана осуществляется посредством решения системы линейных неравенств.

Пример 1 (Тестовый пример [13]). Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial w}{\partial t}+x_2\frac{\partial w}{\partial x_1}+\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right|-\left|\frac{\partial w}{\partial x_2}\right|=0$$

$$w(2,x)=\max\{|x_1|,|x_2|\},\quad t\in[0,2]$$

Численное моделирование осуществляется в точке $\hat{x}$ = (0, 0) в момент t = 0,58578. Точка $\hat{x}$ лежит на пересечении сингулярных линий функции $w(t,\cdot)$. Известно, что $w(t,\hat{x})$ = 0,58578. Ниже приведены параметры вычислительной схемы и отвечающие им приближенные значения w_a решения в точке $(t,\hat{x})$:

1) $\Delta=0{,}28,\quad \alpha=0{,}29,\quad \beta=0{,}14,\quad w_a=0{,}68$

2) $\Delta=0{,}14,\quad \alpha=0{,}29,\quad \beta=0{,}14,\quad w_a=0{,}66$

3) $\Delta=0{,}09,\quad \alpha=0{,}24,\quad \beta=0{,}09,\quad w_a=0{,}65$

Пример 2. Рассматривается математическая модель управления движением маятника в вязкой среде

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-\sin x_1-\upsilon x_2+\upsilon$$

Здесь $t\in$ [0; 0,75], "вязкость" $\upsilon\in$ [0, 1], управление $u\in$ [–1, 1], функция платы $\sigma(x)=$ $=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$.

Аналитическое решение задачи неизвестно. Сопоставление результатов ведется с результатами счета, полученными по другой методике [14] позволяющей строить аппроксимации множеств уровня решения. Ниже приведены точки $(t,\hat{x})$, в которых велся счет, параметры вычислительной схемы и отвечающие им приближенные значения w_a решения, а также приближенные значения $\overline{w}$, полученные посредством конструирования множеств уровня решения:

1) Точка $(t,\hat{x})$ = (0, 0,856, 0,755), для нее $\overline{w}$ = 1:

$\Delta=0{,}15\quad \alpha=0{,}2,\quad \beta=0{,}3,\quad w_a=1{,}05$

$\Delta=0{,}075,\quad \alpha=0{,}15,\quad \beta=0{,}15,\quad w_a=1{,}01$

2) Точка $(t,\hat{x})$ = (0, –1,05586, –0,36266), для нее $\overline{w}$ = 1:

$\Delta=0{,}15,\quad \alpha=0{,}2,\quad \beta=0{,}3,\quad w_a=1{,}04$

$\Delta=0{,}075,\quad \alpha=0{,}1,\quad \beta=0{,}15,\quad w_a=1{,}01$

Пример 3. Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sin x_2\frac{\partial w}{\partial x_1}-\exp(-x_1^2-x_2^2)\min\left\{0,\frac{\partial w}{\partial x_2}\right\}-\left|\frac{\partial w}{\partial x_2}\right|=0$$

$$w(0{,}5,x)=(x_1^2+x_2^2+0{,}81)^2-3{,}24x_1^2-1,\quad t\in[0;\ 0{,}5]$$

Точное решение неизвестно. Ниже, так же как для примера 2, приведены точки $(t,\hat{x})$, в которых велся счет, параметры вычислительной схемы и отвечающие им приближенные значения w_a решения, а также приближенные значения $\overline{w}$, полученные посредством конструирования множеств уровня решения:

1) Точка $(t,\hat{x})$ = (0, –0,551, –0,859), для нее $\overline{w}$ = 0:

$\Delta=0{,}05,\quad \alpha=0{,}05,\quad \beta=0{,}1,\quad w_a=0{,}09$

$\Delta=0{,}025,\quad \alpha=0{,}025,\quad \beta=0{,}1,\quad w_a=0{,}04$

$\Delta=0{,}02,\quad \alpha=0{,}02,\quad \beta=0{,}04,\quad w_a=0{,}03$

2) Точка $(t,\hat{x})$ = (0, 1,465, –0,82), для нее $\overline{w}$ = 0:

$\Delta = 0{,}05, \quad \alpha = 0{,}05, \quad \beta = 0{,}1, \quad w_a = 0{,}14$

$\Delta = 0{,}025, \quad \alpha = 0{,}025, \quad \beta = 0{,}05, \quad w_a = 0{,}09$

$\Delta = 0{,}02, \quad \alpha = 0{,}02, \quad \beta = 0{,}04, \quad w_a = 0$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–011–16032) и Международного научного фонда (NME000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин А.И., Субботина Н.Н.* Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 4. С. 862–865.
2. *Субботин А.И.* Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 293–297.
3. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. № 1. P. 1–42.
4. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
7. *Souganidis P.E.* Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // J. Different. Equat. 1985. V. 59. № 1. P. 1–43.
8. *Bardi M., Osher S.* The nonconvex multi-dimensional Riemann problem for Hamilton-Jacobi equations // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22. № 2. P. 344–351.
9. *Osher S., Shu C.-W.* High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations // SIAM J. Numer. Anal. 1991. V. 28. № 4. P. 907–922.
10. *Маслов В.П., Самборский С.Н.* Существование и единственность решений стационарных уравнений Гамильтона–Якоби и Беллмана. Новый подход // Докл. АН СССР. 1992. Т. 324. № 6. С. 1143–1148.
11. *Алексейчик М.И.* Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры // Мат. анализ и его приложения / Ростов-на-Дону: Ростов. ун-т, 1975. Т. 7. С. 191–199.
12. *Ушаков В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Тен. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
13. *Тарасьев А.М.* Об одной нерегулярной дифференциальной игре // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 682–684.
14. *Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.* Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 216–222.
15. *Taras'ev A.M., Uspenskii A.A., Ushakov V.N.* On construction of solving procedures in a linear control problem // IMACS. The Lyapunov functions method and applications. Basel: J.C. Baltzer AG, 1990. P. 111–115.
16. *Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Конечно-разностный метод построения функции оптимального гарантированного результата // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. 1991. М.: Наука, 1992. С. 166–172.
17. *Тарасьев А.М.* Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 22–36.
18. *Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Изв. РАН Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
19. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.
20. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
21. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. 478 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
16.V.1995