

УДК 531.36:62-50

© 1996 г. Ю.Г. Булычев, А.А. Манин

СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ НА ОСНОВЕ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ

Рассматривается задача управления стохастической системой в соответствии с критерием минимума функционала обобщенной работы [1]. Предлагается метод решения этой задачи, основанный на применении алгоритма оптимального управления с прогнозирующей моделью [1] и метода опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [2-4]. При этом синтез управляющих воздействий осуществляется в аналитическом виде.

1. Общая постановка задачи. Существуют две формулировки метода аналитического конструирования: Летова-Калмана [5] и А.А. Красовского [1]. Рассмотрим формулировку, данную А.А. Красовским применительно к стохастической системе

$$\dot{y} + f(y, t) = \varphi(y, t)u + \psi(y, t)n_1 \tag{1.1}$$

$$y(t, y_0) = y_0, \quad y \in Y \subset R^1, \quad t \in [t_0, t_M]$$

где функции $f(y, t)$, $\varphi(y, t)$, $\psi(y, t)$ обеспечивают выполнение условия существования и единственности решения уравнения (1.1). При этом $f(y, t)$ удовлетворяет условию Липшица по y с постоянной Липшица L , $n_1(t) \in R^1$ – белый гауссовский шум с математическим ожиданием $M\langle n_1 \rangle = 0$ и дисперсией $M\langle n_1(t^*)n_1(t^{**}) \rangle = S_1(t^*)\delta(t^* - t^{**})$, $S_1(t)$ – спектральная плотность шума, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция; $u(t) \in U \subset R^1$ – управляющее воздействие, минимизирующее математическое ожидание заданного функционала обобщенной работы [1]:

$$M\langle J \rangle = M\langle V_3[y(t_M, y_0)] + \int_{t_0}^{t_M} Q[y(t, y_0), t]dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_M} \frac{u^2 + u_{0p}^2}{k^2} dt \rangle \tag{1.2}$$

$V_3(\cdot)$, $Q(\cdot)$ – заданные положительно-определенные функции, u_{0p} – оптимальное управление системой (1.1).

Рассмотрим применение метода прогнозирующей модели [1] для отыскания оптимальных в смысле минимума функционала обобщенной работы (1.2) управлений скалярным объектом (1.1). Обобщение на многомерный случай будет дано ниже.

Пусть уравнение наблюдения имеет вид

$$z = h(y, t) + n_2 \tag{1.3}$$

где функция $h(y, t)$ полагается непрерывной по совокупности аргументов; $n_2(t) \in R^1$ – помеха наблюдения, являющаяся белым гауссовским шумом с математическим ожиданием $M\langle n_2 \rangle = 0$ и дисперсией $M\langle n_2(t^*)n_2(t^{**}) \rangle = S_2(t^*)\delta(t^* - t^{**})$.

Согласно принципу разделения [1] для наблюдения (1.3) при достаточной точности оценивания состояния системы (1.1) по критерию минимума среднеквадратической

ошибки оптимальными в смысле минимума функционала (1.2) являются управления

$$u(t, y_0) = -k^2 \varphi(\bar{y}, t) \partial V(\bar{y}, t) / \partial \bar{y} |_{y=\bar{y}(t, y_0)} \quad (1.4)$$

причем функция $V(y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial V / \partial t + f(y, t) \partial V / \partial y = -Q(y, t)$$

при граничном условии $V(y, t_M) = V_3(y)$.

Согласно алгоритму оптимального управления с прогнозирующей моделью [1] интервал оптимизации $[t_0, t_M]$ разбивается на достаточно короткие циклы $\Delta t_{m+1} = t_{m+1} - t_m$ ($m = \overline{0, M-1}$), при этом для каждого фиксированного $t = t_m$ должно выполняться равенство

$$x_m = \bar{y}_m, \quad m = \overline{0, M-1} \quad (1.5)$$

которое задает начальные условия t_m, x_m , необходимые для решения уравнения свободного движения

$$\dot{x} + f(x, t) = 0, \quad x \in X \subset R^1, \quad t \in [t_m, t_M] \quad (1.6)$$

где $x(t, x_m) = \xi(t, t_m, x_m)$ – решение уравнения (1.6), соответствующее начальным условиям t_m, x_m ; \bar{y}_m – оценка состояния системы (1.1), выданная системой контроля по результатам наблюдения в момент времени $t = t_m$.

С учетом (1.4), (1.5) на m -м шаге имеем оценку

$$\bar{u}_{m+1} = -k^2 \varphi(\bar{y}_m, t_m) \partial V(x, t) / \partial x |_{\substack{x=\bar{y}_m \\ t=t_m}}, \quad \bar{u}_{m+1} = \bar{u}(t, \bar{y}_m) \quad (1.7)$$

При этом функция $V(x, t)$ задается в виде [1]

$$V[x(t, \bar{y}_m), t] = V_3[x(t_M, \bar{y}_m)] + \int_t^{t_M} Q[x(t, \bar{y}_m), t] dt, \quad t \in [t_m, t_M] \quad (1.8)$$

Как видно из (1.7), для нахождения оптимального управления \bar{u}_{m+1} на m -м шаге ($m \in \overline{0, M-1}$) с использованием прогнозирующей модели необходимо вычислить значение частной производной $\partial V / \partial x$ в точке $x = \bar{y}_m, t = t_m$. На практике данная задача решается численно, что требует многочисленных "прогонок" модели (1.6) в течение каждого цикла Δt_{m+1} [1].

Для построения приближенного решения уравнения свободного движения (1.6) может быть использован метод опорных интегральных кривых (ОИК) решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [2–4]. Его достоинством по сравнению с традиционными методами является возможность представления исходного уравнения в виде массива данных, на основе которого может быть получено приближенное решение уравнения в аналитическом виде с заданной точностью, т.е.

$$|x(t, x_m) - \tilde{x}(t, x_m)| \leq \varepsilon_0, \quad x_m \in X, \quad t \in [t_m, t_M] \quad (1.9)$$

где $\tilde{x}(t, x_m)$ – приближенное решение уравнения (1.6), построенное в соответствии с методом ОИК и соответствующее начальным условиям x_m, t_m ; ε_0 – максимально допустимая погрешность интегрирования уравнения (1.6). Очевидно, что при использовании данного метода выражение для субоптимального управления (1.7) может быть получено в аналитическом виде.

В соответствии с методом ОИК [2] помимо сетки t_m ($m = \overline{0, M}$) введем в рассмотрение сетку $t_{(k)}$ ($k = \overline{0, K}$), полагая, что $[t_0, t_M] \subseteq [t_{(0)}, t_{(K)}]$. В частном случае узлы t_m и $t_{(k)}$ могут совпадать. Кроме того, для переменной $x_{(0)} = x(t_{(0)})$ введем сетку $x_{(0)i}$ ($i =$

$= \overline{0, I}$), что по аналогии с [3] позволяет ввести совокупность частных решений $x(t, x_{(0)} = x_{(0)i})$ уравнения (1.6), которые соответствуют набору различных начальных условий $x_{(0)i}$ ($i = \overline{0, I}$):

$$x(t, x_{(0)} = x_{(0)i}) = \xi(t, t_{(0)}, x_{(0)i}), \quad x(t_{(0)}, x_{(0)} = x_{(0)i}) = x_{(0)i} \quad (x_{(0)i} - x_{(0),i-1} = \Delta x_{(0)i}) \quad (1.10)$$

Данную совокупность по аналогии с [2] будем называть семейством ОИК, которое для множества узлов $t_{(k)}$ ($k = \overline{0, K}$) и $x_{(0)i}$ ($i = \overline{0, I}$) задается набором фиксированных значений

$$x(t_{(k)}, x_{(0)} = x_{(0)i}) = \xi(t_{(k)}, t_{(0)}, x_{(0)i}) = x_{(k)i} \quad (1.11)$$

Считаем также, что применительно к (1.6) могут быть получены массивы данных $X^{(M)} = \{X_0^{(M)}, \dots, X_I^{(M)}\}$ и $Y^{[N]} = \{Y_0^{[N]}, \dots, Y_K^{[N]}\}$, где $X_i^{(M)} = \{x_{(k)i}^{(j)}, k = \overline{0, K}, j = \overline{0, M_k - 1}\}$ ($i = \overline{0, I}$), $Y_k^{[N]} = \{x_{(k)i}^{[l]}, i = \overline{0, I}, l = \overline{0, N_i - 1}\}$ ($k = \overline{0, K}$). При этом

$$x_{(k)i}^{(j)} = \left. \frac{\partial^j x(t, x_{(0)})}{\partial t^j} \right|_{t=t_{(k)}}, \quad x_{(k)i}^{[l]} = \left. \frac{\partial^l x(t, x_{(0)})}{\partial x_{(0)}^l} \right|_{t=t_{(k)}, x_{(0)}=x_{(0)i}}$$

Требуется на основе алгоритма оптимального управления с прогнозирующей моделью (1.1)–(1.8) и метода ОИК решения задачи Коши [2–4] разработать новый подход к расчету приближенных (субоптимальных) управлений \tilde{u}_{m+1} ($m = \overline{0, M-1}$), позволяющий формировать аналитическое выражение для управляющего воздействия на этапе предварительного синтеза и обеспечивающий за счет оптимального выбора узлов интерполяции в методе ОИК выполнение условия

$$|\bar{u}_{m+1} - \tilde{u}_{m+1}| \leq \varepsilon_1, \quad m = \overline{0, M-1} \quad (1.12)$$

где \bar{u}_{m+1} – точное (оптимальное) в смысле минимума функционала (1.2) управление системой (1.1), ε_1 – максимально допустимая погрешность вычисления управляющих воздействий.

2. Построение решения уравнения свободного движения. Построение решения на основе $x_{(k)i}^{(j)}$. Точное решение задачи Коши для уравнения (1.6) в области $X \times [t_0, t_M]$ для начальных условий $x_{(0)}$ и $t_{(0)}$ представим в виде

$$x(t, x_{(0)}) = \xi(t, t_{(0)}, x_{(0)}), \quad x(t_{(0)}, x_{(0)}) = x_{(0)}, \quad x_{(0)} \in X_{(0)} \subset X \quad (2.1)$$

Для построения аналитического решения уравнения (1.6) в соответствии с постановкой задачи будем полагать известными величины $x_{(k)i}^{(j)}$, которые можно рассчитать путем численно-аналитических операций. Так, первая $x_{(k)i}^{(1)}$ и вторая $x_{(k)i}^{(2)}$ производные по времени могут быть рассчитаны по формулам

$$x_{(k)i}^{(1)} = f(x_{(k)i}, t_{(k)}), \quad x_{(k)i}^{(2)} = \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_{(k)i}, t=t_{(k)}} + \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{x=x_{(k)i}, t=t_{(k)}}$$

При приближенном решении (1.6) по аналогии с [4] проведем интерполяцию выборки числовых данных $x_{(q)i}^{(p)}$ ($q = \overline{0, K}, p = \overline{0, M_q - 1}$), соответствующих i -й ОИК ($i \in \overline{0, I}$):

$$\tilde{x}(t, x_{(0)i}, X_i^{(M)}) = \sum_{q,p} \alpha_{qi}^{(p)}(X_i^{(M)}) \gamma_{qp}(t) \quad (2.2)$$

При этом

$$\tilde{x}(t_{(k)}, x_{(0)i}, X_i^{(M)}) = \sum_{q,p} \alpha_{qi}^{(p)}(X_i^{(M)}) \gamma_{qp}^{(j)}(t_{(k)}) = x_{(q)i}^{(j)} \quad (2.3)$$

$$\bar{\gamma}_{qp}^{(j)}(t_{(k)}) = d^j \gamma_{qp}(t) / dt^j |_{t=t_{(k)}}, \quad j = \overline{0, M_k - 1}, \quad k = \overline{0, K}$$

Коэффициенты $\alpha_{qi}^{(p)}(X_i^{(M)})$ находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.3).

Для фиксированных $k \in \overline{0, K}$ и $j \in \overline{0, M_k - 1}$ поставим в соответствие узлам сетки $x_{(0)i}$ ($i = \overline{0, I}$) набор значений $\alpha_{ki}^{(j)}(X_i^{(M)})$ и проведем их интерполяцию

$$\alpha_k^{(j)}(X^{(M)}) = \sum_r \beta_{kr}^{(j)}(X^{(M)}) \mu_r(x_{(0)}) \quad (2.4)$$

(суммирование от $r = 0$ до $r = I$). При этом

$$\sum_r \beta_{kr}^{(j)}(X^{(M)}) \mu_r(x_{(0)i}) = \alpha_{ki}^{(j)}(X_i^{(M)}) \quad (2.5)$$

Коэффициенты $\beta_{kr}^{(j)}(X^{(M)})$ находятся из решения системы уравнений (2.5).

Таким образом, с учетом (2.2)–(2.5) приближенное решение $\tilde{x}(t, x_{(0)}, X^{(M)})$ может быть представлено в виде

$$\tilde{x}(t, x_{(0)}, X^{(M)}) = \sum_{q,p} \alpha_q^{(p)}(x_{(0)}, X^{(M)}) \gamma_{qp}(t) = \sum_{q,p,r} \beta_{qr}^{(p)}(X^{(M)}) \mu_r(x_{(0)}) \gamma_{qp}(t) \quad (2.6)$$

При этом

$$\sum_{q,p,r} \beta_{qr}^{(p)}(X^{(M)}) \mu_r(x_{(0)i}) \gamma_{qp}^{(j)}(t_{(k)}) = x_{(k)i}^{(j)}$$

Если при построении ОИК (2.2) используется интерполяционная формула Эрмита, то естественно положить $\gamma_{qp}(t) = H_{qp}(t)$, $\alpha_{qi}^{(p)}(X_i^{(M)}) = x_{(q)i}^{(p)}$. Тогда выражение (2.2) примет вид

$$\tilde{x}(t, x_{(0)i}, X_i^{(M)}) = \sum_{q,p} x_{(q)i}^{(p)} H_{qp}(t) = \sum_{q,p,d} x_{(q)i}^{(p)} \frac{1}{q!} \frac{1}{p!} \left[\frac{(t-t_{(q)})^{M_q}}{\Omega_K(t)} \right]^{(d)} \frac{\Omega_K(t)}{(t-t_{(q)})^{M_q-p-d}} \quad (2.7)$$

$$\Omega_K(t) = (t-t_{(0)})^{M_0} (t-t_{(1)})^{M_1} \dots (t-t_{(K)})^{M_K}$$

(суммирование по d от $d = 0$ до $d = M_q - p - 1$).

Используя при интерполяции (2.4) многочлен Лагранжа $L_r(x_{(0)})$ получим

$$\alpha_k^{(j)}(x_{(0)}, X^{(M)}) = \sum_r x_{(k)r}^{(j)} L_r(x_{(0)}) = \sum_r x_{(k)r}^{(j)} \frac{\omega_I(x_{(0)})}{(x_{(0)} - x_{(0)r}) \omega_I^{(1)}(x_{(0)}) |_{x_{(0)}=x_{(0)r}}} \quad (2.8)$$

$$\omega_I(x_{(0)}) = (x_{(0)} - x_{(0)0})(x_{(0)} - x_{(0)1}) \dots (x_{(0)} - x_{(0)I})$$

$$\omega_I^{(1)}(x_{(0)}) = d\omega_I(x_{(0)}) / dx_{(0)}$$

Таким образом, при учете (2.7) и (2.8) решение (2.6) запишем в виде

$$\tilde{x}(t, x_{(0)}, X^{(M)}) = \sum (x_{(0)}, t, X^{(M)}) \quad (2.9)$$

$$\sum (x, t, X^{(M)}) = \sum_{q,p,r} x_{(q)r}^{(p)} L_r(x) H_{qp}(t)$$

Построение решения на основе $x_{(k)i}^{[l]}$. В соответствии с постановкой задачи при построении решения уравнения (1.7) на основе массива $Y^{[M]}$ будем полагать известными величины $x_{(k)i}^{[l]}$, для вычисления которых можно воспользоваться численно-анали-

тическим подходом, основанным на применении метода последовательных приближений. Для этого продифференцируем требуемое число раз по $x_{(0)}$ следующее очевидное выражение (интегрирование по отрезку $[t_{(0)}, t]$):

$$x(t, x_{(0)}) = \int f(\tau, \xi(\tau, t_{(0)}, x_{(0)})) d\tau + x_{(0)}$$

Например, производная первого и второго порядков рассчитываются по формулам

$$x^{[1]}(t, x_{(0)}) = \int x^{[1]}(\tau, x_{(0)}) f^{[1]}(x, \tau) d\tau + 1$$

$$x^{[2]}(t, x_{(0)}) = \int \{ [x^{[1]}(\tau, x_{(0)})]^2 f^{[2]}(x, \tau) + x^{[2]}(\tau, x_{(0)}) f^{[1]}(x, \tau) \} d\tau$$

При учете массива данных (1.11) алгоритм вычисления $x_{(k)i}^{[1]}$ и $x_{(k)i}^{[2]}$ сводится к следующему:

$$x_n^{[1]}(t, x_{(0)i}) = \int x_{n-1}^{[1]}(\tau, x_{(0)i}) f^{[1]}(\tau, x(\tau, x_{(0)i})) d\tau + 1, \quad n = \overline{1, Q_1} \quad (2.10)$$

$$x_{(k)i}^{[1]} = x_{Q_1}^{[1]}(t_{(k)}, x_{(0)i})$$

$$x_n^{[2]}(t, x_{(0)i}) = \int \{ [x_{Q_1}^{[1]}(\tau, x_{(0)i})]^2 f^{[2]}(\tau, x(\tau, x_{(0)i})) + x_{n-1}^{[2]}(\tau, x_{(0)i}) f^{[1]}(\tau, x(\tau, x_{(0)i})) \} d\tau, \quad n = \overline{1, Q_2} \quad (2.11)$$

$$x_{(k)i}^{[2]} = x_{Q_2}^{[2]}(t_{(k)}, x_{(0)i})$$

Формулы (2.10), (2.11) представляют собой модификацию известного метода последовательных приближений применительно к случаю, когда имеются высокоточные данные о семействе ОИК. По аналогии с (2.10), (2.11) путем последовательного дифференцирования по $x_{(0)}$ можно получить соответствующие формулы для расчета производных $x_{(k)i}^{[l]}$ более высоких порядков.

Другой подход к вычислению $x_{(k)i}^{[l]}$ основан на применении теоремы Линделефа, согласно которой алгоритм вычисления, например $x_{(k)i}^{[1]}$, сводится к правилу

$$x_{(k)i}^{[1]} = \exp\left\{ \int f^{[1]}(\tau, x(\tau, x_{(0)})) d\tau \right\} \quad (2.12)$$

Проведем интерполяцию выборки числовых данных $x_{(k)p}^{[q]}$ ($p = \overline{0, I}$, $q = \overline{0, N_p - 1}$) для фиксированного $k \in \overline{0, K}$:

$$\tilde{x}(t_{(k)}, x_{(0)}, Y_k^{[N]}) = \sum_{p,q} \alpha_{kp}^{[q]}(Y_k^{[N]}) \mu_{pq}(x_{(0)}) \quad (2.13)$$

при этом

$$\tilde{x}^{[l]}(t_{(k)}, x_{(0)i}, Y_k^{[N]}) = \sum_{p,q} \alpha_{kp}^{[q]}(Y_k^{[N]}) \mu_{pq}^{[l]}(x_{(0)i}) = x_{(k)i}^{[l]} \quad (2.14)$$

где

$$\mu_{pq}^{[l]}(x_{(0)i}) = d^l \mu_{pq}(x_{(0)}) / d^l x_{(0)} |_{x_{(0)}=x_{(0)i}}, \quad l = \overline{0, N_i - 1}$$

Коэффициенты $\alpha_{kp}^{[q]}(Y_k^{[N]})$ находятся из решения системы уравнений (2.14).

Для фиксированных $i \in \overline{0, I}$ и $l \in \overline{0, N_i - 1}$ поставим в соответствие узлам сетки $t_{(k)}$ ($k = \overline{0, K}$) набор значений $\alpha_{ki}^{[l]}(Y_k^{[N]})$ и проведем их интерполяцию

$$\alpha_i^{[l]}(Y^{[N]}) = \sum_r \beta_{ri}^{[l]}(Y^{[N]}) \gamma_r(t) \quad (2.15)$$

Коэффициенты $\beta_{ri}^{[l]}(Y^{[N]})$ находятся из решения системы уравнений

$$\sum_r \beta_{ri}^{[l]}(Y^{[N]}) \gamma_r(t_{(k)}) = \alpha_{ki}^{[l]}(Y_k^{[N]}) \quad (2.16)$$

(суммирование по r от $r = 0$ до $r = K$).

Таким образом, с учетом (2.13)–(2.16) приближенное решение $\tilde{x}(t, x_{(0)}, Y^{[N]})$ запишем в виде

$$\tilde{x}(t, x_{(0)}, Y^{[N]}) = \sum_{q,p} \alpha_p^{[q]}(t, Y^{[N]}) \mu_{pq}(x_{(0)}) = \sum_{q,p,r} \beta_{rp}^{[q]}(Y^{[N]}) \mu_{pq}(x_{(0)}) \gamma_r(t) \quad (2.17)$$

при этом

$$\sum_{q,p,r} \beta_{rp}^{[q]}(Y^{[N]}) \mu_{pq}^{[l]}(x_{(0)i}) \gamma_r(t_{(k)}) = x_{(k)i}^{[l]} \quad (2.18)$$

При использовании для интерполяции (2.13) формулы Эрмита, а для интерполяции (2.15) многочлена Лагранжа ($\mu_{pq}(x_{(0)}) = H_{pq}(x_{(0)})$, $\alpha_{kp}^{[q]} = x_{(k)p}^{[q]}$, $\gamma_r(t) = L_r(t)$) приближенное решение (2.17) примет вид

$$\tilde{x}(t, x_{(0)}, Y^{[N]}) = \Sigma(x_{(0)}, t, Y^{[N]}) \quad (2.19)$$

$$\Sigma(x, t, Y^{[N]}) = \sum_{q,p,r} x_{(r)p}^{[q]} H_{pq}(x) L_r(t)$$

3. Синтез субоптимального управления. Предположим, что функции $V_3(x)$ и $Q(x, t)$ заданы в виде квадратичных форм, что широко используется на практике [1, 5]: $V_3(x) = vx^2/2$, $Q(x, t) = q(t)x^2/2$.

В этом случае при учете выражения (1.8) можно записать (интегрирование по отрезку $[t_m, t_M]$)

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{t=t_m} = v x(t_M, \bar{y}_m) + \int q(t) x(t, \bar{y}_m) dt \quad (3.1)$$

где $x(t, \bar{y}_m) = \xi(t, t_m, \bar{y}_m)$ – решение уравнения (1.6) при начальных условиях t_m, \bar{y}_m .

Принимая во внимание последнее соотношение и учитывая (1.7), приходим к управлению

$$\bar{u}_{m+1} = -k^2 \varphi(\bar{y}_m, t_m) \{v x(t_M, \bar{y}_m) + \int q(t) x(t, \bar{y}_m) dt\} \quad (3.2)$$

Подставляя в выражение (3.2) вместо точного $x(t, \bar{y}_m)$ приближенное решение $\tilde{x}(t, \bar{y}_m)$ вида (2.9), можно записать искомое выражение для субоптимального управления

$$\tilde{u}_{m+1} = -k^2 \varphi(\bar{y}_m, t_m) \{v \Sigma(\bar{y}_m, t_M, X^{(M)}) + \int q(t) \Sigma(\bar{y}_m, t, X^{(M)}) dt\} \quad (3.3)$$

При использовании приближенного решения $\tilde{x}(t, \bar{y}_m, Y^{[N]})$ выражение для управления отличается от (3.3) лишь тем, что вместо $\Sigma(\bar{y}_m, t, X^{(M)})$ в него необходимо подставить $\Sigma(\bar{y}_m, t, Y^{[N]})$ вида (2.19).

Таким образом, исходя из конкретного вида уравнения свободного движения (1.6) можно выбрать одно из двух решений задачи аналитического конструирования систем управления. При практическом применении полученных решений предпочтение должно отдаваться тому, которое при условии обеспечения заданной точности синтеза субоптимальных управлений требует меньшего объема априорных данных о семействе ОИК, т.е. решение о выборе способа построения управлений должно приниматься на основании проверки выполнения неравенств

$$\sum_q M_q \lesssim \sum_p N_p$$

Следует отметить, что для построения субоптимальных управлений типа (3.3) могут использоваться не только многочлены Лагранжа и Эрмита, но и другие интерполяционные структуры, которые могут быть более предпочтительны с точки зрения реализации на ЭВМ.

С учетом найденных управляющих воздействий вынужденное движение системы (1.1) на m -м шаге ($m \in \overline{0, M-1}$) осуществляется в соответствии с законом

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} + f(\tilde{y}, t) = \varphi(\tilde{y}, t)\tilde{u}_{m+1}$$

$$\tilde{y}(t_m, \bar{y}_m) = \bar{y}_m, \quad t \in [t_m, t_{m+1}]$$

4. Выбор узлов интерполяции. Рассмотрим решение данного вопроса применительно к случаю, когда для построения приближенного решения $\tilde{x}(t, x_{(0)}) = \tilde{x}(t, x_{(0)}, X^{(0)}) = \tilde{x}(t, x_{(0)}, Y^{(0)})$ уравнения (1.6) используется лишь массив чисел (1.11). Очевидно, что истинная интегральная кривая $x(t, x_{(0)i})$ отличается от приближенной $\tilde{x}(t, x_{(0)i})$ при $t = t_{(k)}$ на величину $\Delta x_{(k)i} = \tilde{x}(t_{(k)}, x_{(0)i}) - x(t_{(k)}, x_{(0)i})$ ($i \in \overline{0, I}$). С учетом (1.9) предположим, что $\tilde{x}(t, x_{(0)})$ является ε -приближенным по невязке решением, т.е. $|\tilde{x}(t_{(0)}, x_{(0)}) - x(t_{(0)}, x_{(0)})| \leq \varepsilon$, и при подстановке функции $\tilde{x}(t, x_{(0)})$ в (1.6)

$$\dot{\tilde{x}} + f(\tilde{x}, t) = \psi(t)$$

где невязка $\psi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\max_t |\psi(t)| \leq \varepsilon$$

Тогда для двух непрерывно-дифференцируемых решений $x(t, x_{(0)})$ и $\tilde{x}(t, x_{(0)})$ справедлива оценка [2]

$$\rho[(x(t, x_{(0)}), \tilde{x}(t, x_{(0)}))] = \varepsilon \exp[L(t - t_{(0)})] + \frac{\varepsilon}{L} \{\exp[L(t - t_{(0)})] - 1\} \leq$$

$$\leq \varepsilon \left\{ \exp[L(t_{(k)} - t_{(0)})] + \frac{1}{L} [\exp[L(t_{(k)} - t_{(0)})] - 1] \right\}$$

Известно, что погрешность двумерной интерполяции задается остаточным членом

$$x(t, x_{(0)}) - \tilde{x}(t, x_{(0)}) = \frac{\omega_K(t)}{(K+1)!} \frac{\partial^{K+1}}{\partial t^{K+1}} \xi(t^*, t_{(0)}, x_{(0)}) +$$

$$+ \frac{\omega_I(x_{(0)})}{(I+1)!} \frac{\partial^{I+1}}{\partial x_{(0)}^{I+1}} \xi(t, t_{(0)}, x_{(0)}^*) - \frac{\omega_K(t)}{(K+1)!} \frac{\omega_I(x_{(0)})}{(I+1)!} \frac{\partial^{K+I+2}}{\partial t^{K+1} \partial x_{(0)}^{I+1}} \xi(t^{**}, t_{(0)}, x_{(0)}^{**}) \quad (4.1)$$

где t^* , t^{**} и $x_{(0)}^*$, $x_{(0)}^{**}$ — некоторые характерные значения переменных t и $x_{(0)}$.

С учетом (4.1) при выборе семейства ОИК можно воспользоваться неравенством

$$|x(t, x_{(0)}) - \tilde{x}(t, x_{(0)})| \leq \frac{Q_{K+1}}{(K+1)!} \dot{\omega}_{K,1} + \frac{G_{I+1}}{(I+1)!} \dot{\omega}_{I,2} - \frac{D_{K+1, I+1}}{(K+1)!(I+1)!} \dot{\omega}_{K,1} \dot{\omega}_{I,2} \leq \varepsilon_0 \quad (4.2)$$

где

$$\dot{\omega}_{K,1} = \max_t |\omega_K(t)|, \quad \dot{\omega}_{I,2} = \max_{x_{(0)}} |\omega_I(x_{(0)})|$$

$$Q_{K+1} = \max_{t, x_{(0)}} \left| \frac{\partial^{K+1}}{\partial t^{K+1}} \xi(t, t_{(0)}, x_{(0)}) \right|$$

$$Q_{I+1} = \max_{t, x(0)} \left| \frac{\partial^{I+1}}{\partial t^{I+1}} \xi(t, t(0), x(0)) \right|$$

$$D_{K+1, I+1} = \max_{t, x(0)} \left| \frac{\partial^{K+I+2}}{\partial t^{K+1} \partial x^{I+1}} \xi(t, t(0), x(0)) \right|$$

Задаваясь значением ε_0 , можно численным путем подобрать такие K и I , при которых обеспечивается требуемая точность интегрирования уравнения (1.6). Шаги $\Delta x_{(0)i}$ и $\Delta t_{(k)}$ должны выбираться такими, чтобы минимизировать оценку погрешности двумерной интерполяции (4.1). Узлы интерполяции в этом случае должны совпадать с корнями многочлена Чебышева, т.е. при оценке сверху величин $\omega_k(t)$ и $\omega_l(x_{(0)})$ можно воспользоваться неравенствами

$$\max_t |\omega_k(t)| \leq \frac{(t_{(K)} - t_{(0)})^{K+1}}{2^{2K+1}} \quad (4.3)$$

$$\max_{x(0)} |\omega_l(x_{(0)})| \leq \frac{(x_{(0)I} - x_{(0)0})^{I+1}}{2^{2I+1}}$$

С учетом (4.3) вместо (4.2) можно воспользоваться оценкой

$$|x(t, x_{(0)}) - \tilde{x}(t, x_{(0)})| \leq \frac{(t_{(K)} - t_{(0)})^{K+1}}{2^{2K+1}} \frac{Q_{K+1}}{(K+1)!} + \frac{(x_{(0)I} - x_{(0)0})^{I+1}}{2^{2I+1}} \frac{G_{I+1}}{(I+1)!} -$$

$$\frac{(t_{(K)} - t_{(0)})^{K+1}}{2^{2K+1}} \frac{(x_{(0)I} - x_{(0)0})^{I+1}}{2^{2I+1}} \frac{D_{K+1, I+1}}{(K+1)!(I+1)!} \leq \varepsilon_0 \quad (4.4)$$

которая соответствует выбору узлов интерполяции по t и $x_{(0)}$ в соответствии с выражениями

$$t_{(k)} = \frac{1}{2} \left[(t_{(K)} - t_{(0)}) \cos \frac{2k+1}{2K+2} \pi + t_{(K)} + t_{(0)} \right], \quad k = \overline{0, K} \quad (4.5)$$

$$x_{(0)i} = \frac{1}{2} \left[(x_{(0)I} - x_{(0)0}) \cos \frac{2i+1}{2I+2} \pi + x_{(0)I} + x_{(0)0} \right], \quad i = \overline{0, I}$$

Рассматривая далее \bar{u}_{m+1} как точное (оптимальное), а \tilde{u}_{m+1} как приближенное (субоптимальное) управления, введем меру отклонения

$$|\bar{u}_{m+1} - \tilde{u}_{m+1}| = k^2 |\varphi(\bar{y}_m, t_m)| \left| \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{y}_m \\ t=t_m}} \quad (4.6)$$

где

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} = v \tilde{x}(t_M, \bar{y}_m) + \int q(t) \tilde{x}(t, \bar{y}_m) dt \quad (4.7)$$

Принимая во внимание (4.6) и (4.7), с учетом неравенства треугольника можно записать

$$|\bar{u}_{m+1} - \tilde{u}_{m+1}| \leq k^2 |\varphi(\bar{y}_m, t_m)| [v |x(t_M, \bar{y}_m) - \tilde{x}(t_M, \bar{y}_m)| + \int q(t) |x(t, \bar{y}_m) - \tilde{x}(t, \bar{y}_m)| dt] \quad (4.8)$$

С учетом (4.4) и (4.8) справедливо неравенство

$$|\bar{u}_{m+1} - \tilde{u}_{m+1}| \leq k^2 \Phi^* [v \varepsilon_0 + \bar{q}^*(t_M - t_m) \varepsilon_0] = \varepsilon_1 \quad (4.9)$$

где

$$\dot{q} = \max_t q(t), \quad \dot{\phi} = \max_{t,y} |\phi(y,t)|$$

Таким образом, задаваясь ϵ_1 , можно вычислить величину

$$\epsilon_0 = \epsilon_1 [k^2 \dot{\phi}(v + \dot{q})]^{-1} \quad (4.10)$$

определяющую в конечном итоге необходимую точность интегрирования уравнения (1.6) методом ОИК, при которой гарантируется построение управления заданного качества.

Предложенный подход применим и для многомерных объектов с векторным управлением, однако в этом случае используемая ЭВМ должна быть оснащена запоминающими устройствами достаточной емкости для хранения массивов данных, соответствующих системе дифференциальных уравнений свободного движения.

5. Пример. Рассмотрим задачу управления угловыми скоростями космического аппарата (КА) на основе примера, приведенного в [6]. При этом для сокращения выкладок будем полагать, что оценивание состояния КА осуществляется достаточно точно, теорема разделения выполняется, вследствие чего возможно решение задачи управления в детерминированной постановке [1].

Пусть движение КА с одной осью симметрии описывается уравнениями

$$\dot{y}_1 + Ay_2y_3 = u_1, \quad \dot{y}_2 - Ay_1y_2 = u_2, \quad \dot{y}_3 = u_3, \quad t \in [t_0, t_M] \quad (5.1)$$

где y_1, y_2, y_3 – угловые скорости ($y_j(t_0) = y_{j,0}$), A – приведенный момент инерции; $t_0 = 0$ [с], $t_M = 10$ [с]. Здесь и далее $j = 1, 2, 3$.

Требуется определить управление, переводящее объект (5.1) к моменту времени $t = t_M$ из состояния $y_j(t_0) = y_{j,0}$ в состояние $y_j(t_M)$, оптимальное в смысле минимума функционала

$$M(J) = M \left(\sum_j v_{jj} y_j^2(t_M) + \int \sum_j q_{jj} y_j^2(t) dt + \int \sum_j \frac{u_j^2 + u_{iоп}^2}{k_j^2} dt \right) \quad (5.2)$$

Здесь

$$V_3(y) = \sum_j v_{jj} y_j^2(t_M), \quad Q(y,t) = \sum_j q_{jj} y_j^2(t)$$

v_{jj}, q_{jj} – заданные коэффициенты.

Применительно к (5.1) по аналогии с (1.6) запишем систему уравнений свободного движения

$$\dot{x}_1 + Ax_2x_3 = 0, \quad \dot{x}_2 - Ax_1x_2 = 0, \quad \dot{x}_3 = 0 \quad (5.3)$$

Задаваясь предельно допустимой ошибкой вычисления управляющих воздействий $\epsilon_{1,j} = 0,5$ [%] рассчитаем в соответствии с (4.10) требуемую точность интегрирования системы (5.3) методом ОИК:

$$\epsilon_{0,j} = \epsilon_{1,j} (v_{jj} + q_{jj})^{-1} \quad (5.4)$$

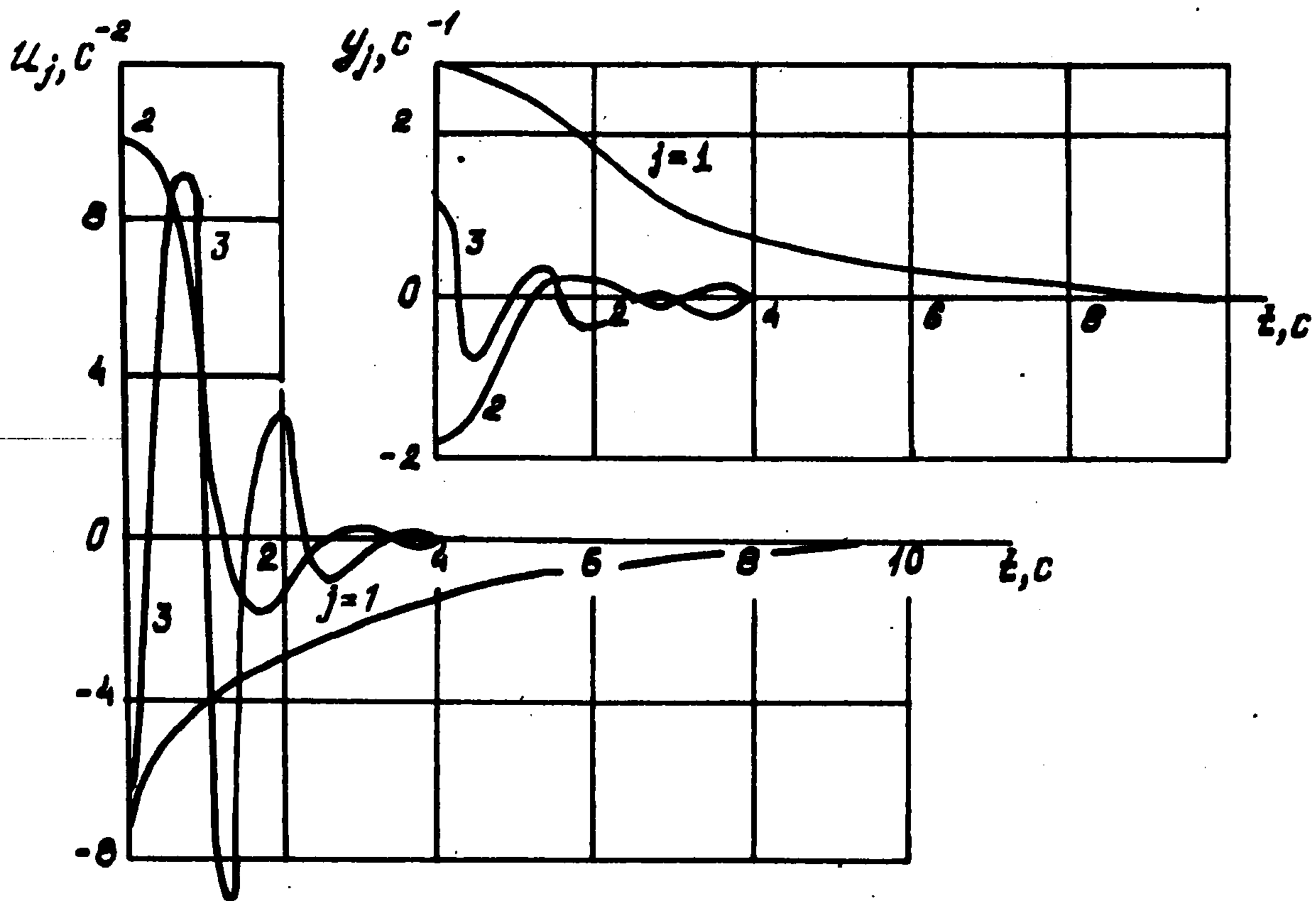
На основе (5.4) имеем $\epsilon_{0,1} = 0,3$ [%], $\epsilon_{0,2} = 0,1$ [%], $\epsilon_{0,3} = 0,1$ [%]. Зададим также область изменения начальных условий

$$b_1 \leq x_{1,0} \leq d_1, \quad b_2 \leq x_{2,0} \leq d_2, \quad b_3 \leq x_{3,0} \leq d_3 \quad (5.5)$$

где

$$b_1 = 0 [c^{-1}], \quad d_1 = 2,6 [c^{-1}], \quad b_2 = -2 [c^{-1}]$$

$$d_2 = 0 [c^{-1}], \quad b_3 = 0 [c^{-1}], \quad d_3 = 1,4 [c^{-1}]$$



Полагая $t_{(0)} = t_0$, $t_{(K)} = t_M$, по аналогии с (4.5) выберем шаги $\Delta x_{j, (0)i} = x_{j, (0)i} - x_{j, (0)i-1}$ и $\Delta t_{(k)} = t_{(k)} - t_{(k-1)}$ таким образом, чтобы узлы интерполяции совпадали с корнями многочлена Чебышева:

$$x_{j, (0)i} = \frac{d_j + b_j}{2} - \frac{d_j - b_j}{2} \cos\left(\frac{2i-1}{2I} \pi\right), \quad i = \overline{0, I} \quad (5.6)$$

$$t_{(k)} = \frac{t_{(K)} + t_{(0)}}{2} - \frac{t_{(K)} - t_{(0)}}{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2K} \pi\right), \quad k = \overline{0, K} \quad (5.7)$$

С учетом (4.4) и значений $\epsilon_{0, j}$ подберем K и I , обеспечивающие необходимую точность вычислений. По результатам расчетов имеем $I = 2$, $K = 3$. Вычислив в соответствии с (5.6) и (5.7) оптимальные узлы интерполяции, построим семейство, состоящее из 54 ОИК с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка. С учетом построенных ОИК на основании (5.3) рассчитаем величины $x_{1, (k)i}^{(1)} = -Ax_{2, (k)i} x_{3, (k)i}$, $x_{2, (k)i}^{(1)} = Ax_{1, (k)i} x_{3, (k)i}$, $x_{3, (k)i}^{(1)} = 0$.

Таким образом, получен массив чисел $x_{j, (k)i}^{(p)}$, ($k = \overline{0, 3}$, $i = \overline{0, 2}$, $p \in \{0, 1\}$), позволяющий с учетом (2.7)–(2.9) представить приближенное решение системы (5.3) в виде

$$\bar{x}_j(t, x_{(0)}, X^{(M)}) = \sum_{q=0}^3 \sum_{p=0}^1 \sum_{r=0}^2 x_{j, (q)r}^{(p)} L_r(x_{j, (0)}) H_{qp}(t) \quad (5.8)$$

При учете (5.8) выражение для искомого субоптимального управления запишем в виде

$$\bar{u}_{j, m+1} = -k_j^2 \left\{ 2 \sum_{l=1}^3 v_{ll} \bar{x}_l(t_M, \bar{y}_m, X^{(M)}) + 2 \int_{t_0}^{t_M} \sum_{l=1}^3 q_{ll} \bar{x}_l(t, \bar{y}_m, X^{(M)}) dt \right\} \quad (5.9)$$

Таким образом, выполнены вычислительные процедуры, относящиеся к этапу предварительного синтеза, и получено аналитическое выражение для субоптимального управления. Задаваясь исходными данными $y_{1, 0} = 2,5$ [с⁻¹]; $y_{2, 0} = -1,7$ [с⁻¹]; $y_{3, 0} = 1,2$ [с⁻¹]; $v_{11} = q_{11} = 0,9493$; $v_{22} = q_{22} = 2,3$; $v_{33} = q_{33} = 2,1$; $k_j = 1$ рассчитаем при $\Delta t_m = 0,5$ [с] субоптимальное управление и соответствующую ему фазовую траекторию объекта (5.1). Для сравнительного анализа полученных результатов был также проведен расчет управляющего воздействия и траектории в соответствии с традиционным алгоритмом с прогнозирующей моделью при тех же начальных условиях. Анализ результатов показал, что

относительная погрешность вычисления управляющих воздействий с использованием предложенного подхода не превысила 10^{-4} , что объясняется близостью приближенного решения (5.8) к решению, полученному численным методом.

На фигуре показаны графики вычисленного на основе (5.9) субоптимального управления и соответствующей ему фазовой траектории объекта (5.1).

6. Заключение. При использовании алгоритма оптимального управления с прогнозирующей моделью на основе разностных шаблонов [1] необходимо на каждом шаге "прогонять" модель с целью построения и численного дифференцирования функции $V(x, t)$ по переменной x . Число таких "прогонок" при простейшей двухточечной схеме вычисления производной для многомерного объекта составляет $S + 1$, где S – размерность вектора управлений [1]. При r -точечном разностном шаблоне число "прогонок" составляет $(r - 1)S + 1$ [1], что на практике приводит к колоссальным вычислительным затратам.

Применение разработанного в статье метода позволяет избежать необходимости многократных "прогонок", так как решение уравнения свободного движения, а следовательно, и искомые управления находятся в аналитическом виде, и для их вычисления необходимо лишь подставлять на каждом шаге в выражение (3.3) начальные условия, выданные системой контроля.

Таким образом, разработанный выше метод может широко использоваться в задачах анализа и синтеза субоптимальных систем управления объектами, описываемыми нелинейными дифференциальными уравнениями, что типично для современных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977. 271 с.
2. Булычев Ю.Г. Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 10. С. 1482–1490.
3. Булычев Ю.Г. Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 9. С. 1305–1319.
4. Булычев Ю.Г. Численно-аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений с использованием обобщенной интерполяции // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 4. С. 520–532.
5. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
6. Детистов В.А., Таран В.Н. Терминальное управление угловыми скоростями КА на основе прогнозирующей модели // Косм. исследования. 1993. Т. 31. Вып. 6. С. 104–107.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
10.II.1994