УДК 531.36:62–50

© 1996 г. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Костина, О.И. Костюкова

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ПОЗИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Описывается алгоритм работы стабилизатора динамических систем, основанного на использовании позиционных решений задачи оптимального управления со смешанным критерием качества.

В теории оптимального управления кроме абстрактных критериев общего вида существует ряд общепринятых критериев качества, имеющих четкий физический смысл [1]: быстродействие, интенсивность, расход топлива, минимум энергии и т.д. Позиционное решение специальных задач оптимального управления с этими критериями качества можно использовать [2–3] для создания стабилизаторов динамических систем.

В данной работе исследуется возможность использования позиционных решений одной задачи оптимального управления со смешанным критерием качества, составленным из двух упомянутых критериев качества частного типа.

Классическим примером задачи оптимального управления со смешанным критерием качества является задача Летова – Калмана об аналитическом конструировании оптимального регулятора. Хорошо известны приложения задачи Летова – Калмана к стабилизации динамических систем [4–6]. Успех всегда определялся возможностью построения позиционных решений.

1. Задача стабилизации и сопровождающая задача оптимального управления. Классическая постановка проблемы стабилизации динамических систем состоит в следующем. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) \in X_0 \tag{1.1}$$

где X_0 – некоторая окрестность начала координат, $\mathbf{x} \in R^n$. Требуется построить такую функцию $u = u(x)$, чтобы для любого $\mathbf{x}_0 \in X_0$ система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u(x), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

имела решение и была асимптотически устойчивой [4].

Предлагалось [7] использовать позиционные решения задач оптимального управления с некоторыми конкретными критериями качества для стабилизации динамических систем. Видимо, можно использовать и многие другие критерии качества.

Для стабилизации системы (1.1) будем использовать следующую задачу оптимального управления со смешанным критерием качества:

$$\alpha t^* + (1-\alpha) \max_{t \in T(t^*)} |u(t)| \to \min$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t^*) = 0, \quad |u(t)| \leq L \tag{1.2}$$

$$t \in T(t^*) = [0, t^*], \quad (\mathbf{x} \in R^n, \ u \in R, \ 0 < \alpha < 1)$$

в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T(t^*)$.

При $\alpha = 1$ задача (1.2) становится классической задачей оптимального быстродействия. Если же положить $\alpha = 0$, фиксировать $t^* > 0$ и считать L достаточно большим числом, то получим задачу о построении допустимого управления минимальной интенсивности.

Ограничимся такими начальными состояниями $\mathbf{x}_0$, для которых оптимальное программное управление $u^0(t)$, $t \in T(t^{*0})$, задачи (1.2) удовлетворяет неравенству $|u^0(t)| < L$, $t \in T(t^{*0})$.

Сформулируем сначала необходимое условие оптимальности программного управления. Пусть $u^0(t)$, $t \in T(t^{*0})$, – решение задачи (1.2). Тогда существует такой вектор $\mathbf{y} \in R^n$, что

$$\mathbf{y}'\mathbf{F}(t^{*0},0)\,\mathbf{x}_0 = (1-\alpha)\max_{t\in T(t^{*0})}|u^0(t)| = (1-\alpha)\rho^0$$

$$\mathbf{y}'\mathbf{b}u^0(t^{*0}-0) = -\alpha$$

и вдоль решения сопряженной системы

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{A}'\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi}(t^{*0}) = -\mathbf{y}$$

и управления $u^0(t)$, $t \in T(t^{*0})$, выполняется условие максимума

$$\boldsymbol{\psi}'(t)\mathbf{b}u^0(t) = \max_{|u|\le\rho^0}\boldsymbol{\psi}'(t)\mathbf{b}u, \quad t \in T(t^{*0}).$$

Замечания. 1°. Задачу (1.2) можно разбить на две задачи

$$f(t^*) = \alpha t^* + (1-\alpha)\rho(t^*) \to \min_{0<t^*} \tag{1.3}$$

$$\rho(t^*) = \min_{u(\cdot),\rho}\rho, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t^*) = 0 \tag{1.4}$$

$$|u(t)| \le \rho, \quad t \in T(t^*)$$

Вторая из них – линейная задача оптимального управления (задача построения допустимого управления минимальной интенсивности), первая – задача минимизации функции одной переменной.

2°. Функция $f(t^*)$, $t^* > 0$, обладает следующими свойствами: $f(t^*) \to \infty$ при $t^* \to +0$, $f(t^*) \to \infty$ при $t^* \to +\infty$. В общем случае функция $f(t^*)$, $t^* > 0$, негладкая и многоэкстремальная.

3°. Сформулированные выше необходимые условия оптимальности можно трактовать как необходимые условия минимума первого порядка функции $f(t^*)$, $t^* > 0$.

В дальнейшем для упрощения выкладок будем считать, что $\alpha = 0.5$.

2. Позиционное решение сопровождающей задачи оптимального управления и его реализация. По аналогии с изложенным ранее [7] для стабилизации системы (1.1) будем использовать позиционное решение задачи (1.2). С целью построения позиционного решения задачи (1.2) погрузим ее в семейство задач

$$t^* + \rho \to \min, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x}(t^*) = 0, \ |u(t)| \le \rho, \quad t \in [0, t^*] \tag{2.1}$$

зависящее от вектора $\mathbf{z} \in R^n$. Обозначим через $u(t|\mathbf{z})$, $t \in [0, t^*(\mathbf{z})]$, $\rho(\mathbf{z})$ программное решение задачи (2.1).

Согласно необходимым условиям оптимальности, существует такой вектор $\mathbf{y}(\mathbf{z}) \in R^n$ (вектор множителей Лагранжа), что

$$\mathbf{y}'(\mathbf{z})F(t^*(\mathbf{z}),0)\mathbf{z} = \rho(\mathbf{z}), \quad \mathbf{y}'(\mathbf{z})\mathbf{b}u(t^*(\mathbf{z})-0|\mathbf{z}) = -1$$

и вдоль решения $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}(t),\ t \in [0, t^*(\mathbf{z})] = T(\mathbf{z})$, сопряженной системы

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{A}'\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi}(t^*(\mathbf{z})) = -\mathbf{y}(\mathbf{z}) \tag{2.2}$$

выполняется условие максимума

$$\boldsymbol{\psi}'_{\mathbf{z}}(t)\mathbf{b}u(t|\mathbf{z}) = \max_{|u|<\rho(\mathbf{z})} \boldsymbol{\psi}'_{\mathbf{z}}(t)\mathbf{b}u, \quad t \in T(\mathbf{z}) \tag{2.3}$$

Заметим, что задача (2.1) может иметь несколько оптимальных программных решений:

$$u_i(t|\mathbf{z}), \quad t \in [0, t_i^*(\mathbf{z})]; \quad \rho_i(\mathbf{z}), \quad i = \overline{1,l}, \quad l \geqslant 1$$

$$t_i^*(\mathbf{z}) + \rho_i(\mathbf{z}) = t_{i+1}^*(\mathbf{z}) + \rho_{i+1}(\mathbf{z}), \quad \rho_i(\mathbf{z}) < \rho_{i+1}(\mathbf{z}), \quad i = \overline{1, l-1}$$

Условимся под решением задачи (2.1) подразумевать

$$u(t|\mathbf{z}) = u_1(t|\mathbf{z}), \quad t \in [0, t_1^*(\mathbf{z})], \quad \rho(\mathbf{z}) = \rho_1(\mathbf{z}), \quad t^*(\mathbf{z}) = t_1^*(\mathbf{z})$$

т.е. оптимальное управление минимальной интенсивности.

Определение. Функцию

$$u(\mathbf{z}) = u(+0|\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in Z \tag{2.4}$$

назовем (оптимальным) позиционным решением задачи (1.2). Здесь Z – множество всех $\mathbf{z} \in R^n$, для которых задача (2.1) имеет решение.

Предположим, что функция $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in Z$ построена. Замкнем ею исходную систему. В результате получим

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{z} \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\begin{gathered}
\{t_j(\mathbf{z}),\ j = \overline{1, p(\mathbf{z})}\} = \{t \in T(\mathbf{z}): \Delta_{\mathbf{z}}(t) = 0\} \\
t_j(\mathbf{z}) < t_{j+1}(\mathbf{z}), \quad j = \overline{1, p(\mathbf{z}) - 1}; \quad t_0(\mathbf{z}) = 0, \quad t_{p(\mathbf{z})+1}(z) = t^*(\mathbf{z}) \\
k_j(z) = \operatorname{sign} \Delta_{\mathbf{z}}(t), \quad t \in]t_j(\mathbf{z}), t_{j+1}(\mathbf{z})[, \quad j = \overline{0, p(\mathbf{z})} \\
\Delta_{\mathbf{z}}(t) = \boldsymbol{\psi}'_{\mathbf{z}}(t)\mathbf{b}, \quad t \in T(\mathbf{z})
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Из принципа максимума (2.3) следует, что

$$u(t|\mathbf{z}) = k_j(\mathbf{z})\rho(z), \quad t \in]t_j(\mathbf{z}), t_{j+1}(\mathbf{z})[, \quad j = \overline{0, p(\mathbf{z})}$$

и имеют место соотношения

$$\mathbf{F}(t^*(\mathbf{z}), 0)\mathbf{z} + \sum_{j=0}^{p(\mathbf{z})} k_j(\mathbf{z})\rho(\mathbf{z}) \int_{t_j(\mathbf{z})}^{t_{j+1}(\mathbf{z})} \mathbf{F}(t^*(\mathbf{z}), t)bdt = 0 \tag{2.7}$$

$$\mathbf{y}'(\mathbf{z})\mathbf{F}(t^*(\mathbf{z}),\ t_j(\mathbf{z}))b = 0, \quad j = \overline{1, p(\mathbf{z})}$$

$$\mathbf{y}'(\mathbf{z})\mathbf{F}(t^*(\mathbf{z}), 0)\mathbf{z} = \rho(\mathbf{z}), \quad \mathbf{y}'(\mathbf{z})\mathbf{b}k_{p(\mathbf{z})}(\mathbf{z})\rho(\mathbf{z}) = -1 \tag{2.8}$$

Ясно, что при любом $z \in Z$ верны соотношения

$$k_j(\mathbf{z}) = \mp 1, \quad j = \overline{0, p(\mathbf{z})}, \quad p(\mathbf{z}) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Рассмотрим систему (2.5). Предположим, что она имеет решение $\mathbf{x}_{\mathbf{z}}(\tau) = \mathbf{x}(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, и это решение такое, что функции $k_j(\tau) = k_j(\mathbf{x}(\tau))$, $j = \overline{0, p(\tau)}$, $p(\tau) = p(\mathbf{x}(\tau))$, $\tau \geqslant 0$, являются кусочно-постоянными.

Можно показать, что в этом случае для любого τ выполняется соотношение

$$d(t^*(\mathbf{x}(\tau+0))+\rho(\mathbf{x}\ (\tau+0)))\,/\,d\tau=-1 \tag{2.9}$$

Действительно, положим

$$p=p(s)=p(\mathbf{x}(s)),\quad k_j=k_j(s)=k_j(\mathbf{x}(s)),\quad j=\overline{0,p},\quad s\in T^+(\tau)$$

где $T^+(\tau)$ – достаточно малая правосторонняя окрестность точки τ. Тогда (2.7) принимает вид

$$F(t^*(\mathbf{x}(\tau)),0)\mathbf{x}(\tau)+\sum_{j=0}^{p}k_j\rho(\mathbf{x}(\tau))\int\limits_{t_j(\mathbf{x}(\tau))}^{t_{j+1}(\mathbf{x}(\tau))}F(t^*(\mathbf{x}(\tau)),t)b\,dt\equiv 0 \tag{2.10}$$

Из (2.10) получаем

$$-\frac{\mathbf{F}(t^*(\mathbf{x}(\tau)),0)\mathbf{x}(\tau)}{\rho(\mathbf{x}(\tau))}\,\frac{d\rho(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau}+\sum_{j=1}^{p}\rho(\mathbf{x}(\tau))(k_j-k_{j-1})\times$$

$$\times\mathbf{F}(t^*(\mathbf{x}(\tau)),\ t_j(\mathbf{x}(\tau)))b\,\frac{dt_j(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau}+k_p\rho(\mathbf{x}(\tau))\,\frac{dt^*(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau}+ \tag{2.11}$$

$$+\mathbf{F}(t^*(\mathbf{x}(\tau)),0)\mathbf{A}\mathbf{x}(\tau)+\mathbf{F}(t^*(\mathbf{x}(\tau)),0)bk_0\rho(\mathbf{x}(\tau))=0$$

С учетом (2.10) можно доказать, что

$$k_p\rho\mathbf{b}=\mathbf{F}(t^*,0)\mathbf{A}\mathbf{x}(\tau)+k_0\rho\mathbf{F}(t^*.0)b+\sum_{j=1}^{p}\rho(k_j-k_{j-1})\mathbf{F}(t^*,t_j)\mathbf{b} \tag{2.12}$$

$$(\rho=\rho(\mathbf{x}(\tau)),\quad t^*=t^*(\mathbf{x}(\tau)),\quad t_j=t_j(\mathbf{x}(\tau)),\quad j=\overline{1,p})$$

Умножим правую и левую части (2.12) на $\mathbf{y}'(\tau)$ и учтем (2.8). В результате получим

$$\mathbf{y}'(\tau)(\mathbf{F}(t^*,0)\mathbf{A}\mathbf{x}(\tau)+k_0\rho\mathbf{F}(t^*,0)b)=-1 \tag{2.13}$$

Умножим (2.11) на $\mathbf{y}'(\tau)$ и учтем (2.8), (2.13), что дает

$$-d\rho(\mathbf{x}(\tau))\,/\,d\tau-dt^*(\mathbf{x}(\tau))\,/\,d\tau-1=0$$

Из последнего соотношения следует (2.9).

Соотношение (2.9) верно для любого $\tau\geqslant 0$ и любого $\mathbf{z}\in Z$. Отсюда видно, что система (2.5) асимптотически устойчива. Действительно, если $\mathbf{x}(0)=\mathbf{z}$, то траектория $x(\tau)$, $\tau\geqslant 0$ системы (2.5) попадает в начало координат за время $\bar{t}^*$, не превосходящее величины $t^*(\mathbf{z})+\rho(\mathbf{z})$.

3. Алгоритм построения стабилизирующего управления. Определяющие уравнения. Проблема построения функции $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in Z$, сложна и практически не реализуема. Однако на практике при стабилизации системы (2.5) с заданным (произвольным) начальным состоянием $\mathbf{x}(0)=\mathbf{z}^*$ нет необходимости знать всю функцию $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in Z$. Действительно, пусть начальное состояние $\mathbf{z}^*$ задано. Оно породит траекторию $\mathbf{z}^*(t)$, $t\geqslant 0$, системы (2.5). Следовательно, в данном конкретном процессе стабилизации будет использоваться не вся обратная связь (2.4), а лишь ее реализация $u^*(\tau)=u(\mathbf{z}^*(\tau))$, $\tau\geqslant 0$, вдоль кривой $\mathbf{z}^*(\tau)$, $\tau\geqslant 0$. При этом нет необходимости знать значение управления $u^*(\tau)$ заранее (до начала процесса стабилизации). Оно понадобится только в текущий момент τ, когда система (2.5) окажется в состоянии $\mathbf{z}^*(\tau)$.

Эти обстоятельства позволяют разработать алгоритм построения в режиме реального времени функции $u^*(\tau)$, $\tau\geqslant 0$, для каждого конкретного процесса стабилизации состояния $\mathbf{x}(0)=\mathbf{z}^*$.

Опишем этот алгоритм. Построим программное управление $u(t|\mathbf{z}^*)$, $t \in T(\mathbf{z}^*)$, $t^*(\mathbf{z}^*)$, $\rho(\mathbf{z}^*)$ и соответствующий оптимальный вектор множителей Лагранжа $\mathbf{y}(\mathbf{z}^*) \in R^n$ для задачи (2.1) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*$.

Обозначим через $t_j(\mathbf{z}^*)$, $j = \overline{1, p(\mathbf{z}^*)}$; $\rho(\mathbf{z}^*)$, $k_j(\mathbf{z}^*), j = \overline{0, p(\mathbf{z}^*)}$, параметры (2.6). Положим $u^*(0) = u(+0|\mathbf{z}^*)$.

Предположим, что стабилизатор проработал на отрезке $[0, \tau_0]$, $\tau_0 \geqslant 0$. При этом построено стабилизирующее управление $u^*(t)$, $t \in [0, \tau_0[$ и соответствующая ему траектория $\mathbf{z}^*(t)$, $t \in [0, \tau_0]$, системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u^*(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}^*$, $t \in [0, \tau_0]$. Согласно (2.4), для построения управления $u^*(\tau)$ для $\tau \in T^+(\tau_0)$ нужно знать программные решения $u(t|\mathbf{z}^*(\tau))$, $t \in [0, t^*(z^*(\tau))]$ задач (2.1) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*(\tau)$, $\tau \in T^+(\tau_0)$.

Обозначим через

$$p(\tau),\ k_j(\tau),\ j = \overline{0, p(\tau)},\ t_j(\tau),\ j = \overline{1, p(\tau)},\ t^*(\tau),\ \rho(\tau) \tag{3.1}$$

параметры (2.6), построенные при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*(\tau)$.

Функцию

$$\Delta_\tau(t) = -\mathbf{y}'(\tau)\mathbf{F}(t^*(\tau), t)\mathbf{b},\ \ t \in T(\tau) = T(\mathbf{z}^*(\tau)), \tag{3.2}$$

будем называть оптимальным коуправлением задачи (2.1) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*(\tau)$.

Параметры (3.1) назовем определяющими элементами программного решения задачи (2.1) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*(\tau)$, поскольку, зная (3.1), можно легко построить оптимальное программное управление

$$u(t|\mathbf{z}^*(\tau)) = k_j(\tau)\rho(\tau),\ \ t \in [t_j(\tau), t_{j+1}(\tau)[,\ \ j = \overline{0, p(\tau)} \tag{3.3}$$

$$t_0(\tau) = 0,\ \ t_{p(\tau)+1}(\tau) = t^*(\tau)$$

и оптимальное коуправление $\Delta_\tau(t)$, $t \in T(\tau)$, (3.2), вдоль которого выполняется необходимое условие оптимальности (2.3).

В дальнейшем будем полагать, что, если при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*(\tau)$ в задаче (2.1) для решения (3.3) существует единственный вектор множителей Лагранжа $\mathbf{y}(\tau)$, то на соответствующем ему коуправлении выполняется соотношение: при любом $t_0 \in T(\tau)$ из равенств $\Delta_\tau(t_0) = \partial\Delta_\tau(t_0)/\partial t = 0$ следует неравенство

$$\partial^2\Delta_\tau(t_0) / \partial t^2 \neq 0 \tag{3.4}$$

Предположим вначале, что в момент τ_0 определяющие элементы таковы, что

1°. $t_1(\tau_0) > 0$;

2°. $\mathrm{rank}(\mathbf{F}(t^*(\tau_0), t_j(\tau_0))b,\ \ j = \overline{1, p(\tau_0)}) = n - 1$;

3°. $\partial\Delta_\tau(t) / \partial t|_{t=t_j(\tau_0)} \neq 0,\ \ j = \overline{1, p(\tau_0)}$.

Тогда можно показать, что определяющие элементы (3.1) при $\tau \in T^+(\tau_0)$ однозначно находятся из соотношений

$$\begin{aligned} &p(\tau) = p,\ \ k_j(\tau) = (-1)^j k,\ \ j = \overline{1, p} \\ &\Phi(\tau, k, t_j(\tau),\ j = \overline{1, p};\ t^*(\tau),\ \rho(\tau)) = 0 \\ &q(t^*(\tau), t_j(\tau),\ \mathbf{y}(\tau)) = 0,\ \ j = \overline{1, p} \\ &q_*(\tau, t^*(\tau),\ \mathbf{y}(\tau), \rho(\tau)) = 0,\ \ q_0(k, p, \mathbf{y}(\tau), \rho(\tau)) = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\Phi(\tau,k,t_j,j=\overline{1,p},t^*,\rho)=\mathbf{F}(t^*,0)\mathbf{z}^*(\tau)+$$

$$+\rho\sum_{j=0}^{p}(-1)^j k\int_{t_j}^{t_{j+1}}\mathbf{F}(t^*,t)\mathbf{b}dt,\ t_0=0,\ t_{p+1}=t^*;\ k=k_0(\tau_0),\ p=p(\tau_0)$$

$$q_*(\tau,t^*,\mathbf{y},\rho)=\mathbf{y}'\mathbf{F}(t^*,0)\mathbf{z}^*(\tau)-\rho,\ q(t^*,t,\mathbf{y})=\mathbf{y}'\mathbf{F}(t^*,t)\mathbf{b}$$

$$q_0(k,p,\mathbf{y},\rho)=\mathbf{y}'\mathbf{b}\rho(-1)^p k+1$$

и начальных условий

$$t_j(\tau_0+0)=t_j(\tau_0),\quad j=\overline{1,p(\tau_0)},\ \rho(\tau_0+0)=\rho(\tau_0),\ \mathbf{y}(\tau_0+0)=\mathbf{y}(\tau_0)$$

Действительно, подсчитаем матрицу Якоби уравнений (3.5):

$$\mathbf{G}=\left\|\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{G}_1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{D} & \mathbf{f} & \mathbf{G}'_2 \\ \mathbf{d}' & & \end{array}\right\|$$

$$\mathbf{G}_2=\mathbf{G}_2(\tau,t^*,t_j,j=\overline{1,p},\ \rho)=$$

$$=(\mathbf{F}(t^*,t_j)\mathbf{b},\ j=\overline{1,p};\ \mathbf{b}\rho(-1)^p;\mathbf{F}(t^*,\tau)\mathbf{z}^*(\tau))$$

$$\mathbf{G}_1=\mathbf{G}_1(\tau,t^*,t_j,j=\overline{1,p},\ \rho,k)=\mathbf{G}_2\,\mathrm{diag}(\rho\alpha_j,j=\overline{1,p};\ 1;\ -1/\rho)$$

$$\alpha_j=2(-1)^{j-1}k,\quad j=\overline{1,p}$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}(\tau,t^*,t_j,\ j=\overline{1,p},\ \mathbf{y})=\mathrm{diag}(-\partial\Delta_\tau(t_j)/\partial t,\ j=\overline{1,p};\ \mathbf{y}'\mathbf{b}(-1)^p)$$

$$\mathbf{f}=(\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{F}(t^*,t_j)\mathbf{b},\ j=\overline{1,p},0,\ \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{F}(t^*,\tau)\mathbf{z}^*(\tau))$$

$$\mathbf{d}'=(d_j=0,\ j=\overline{1,p};\ -1)$$

При выполнении условий 1°–3° верно неравенство

$$\det\mathbf{G}=\det\mathbf{G}(\tau_0,t^*(\tau_0),\ k,t_j(\tau_0),\ j=\overline{1,p},\ \rho(\tau_0),\ \mathbf{y}(\tau_0))\neq 0$$

Согласно теореме о неявных функциях, при $\tau\in T^*(\tau_0)$ существуют единственные непрерывные функции (3.1), вдоль которых тождественно выполняются соотношения (3.5).

Для $\tau\in T^+(\tau_0)$ стабилизирующее управление строится по правилу

$$u^*(\tau)=\rho(\tau)k(\tau_0),\quad \tau\in T^+(\tau_0) \tag{3.6}$$

Определяющие элементы (3.1) и стабилизирующее управление находим по правилам (3.5), (3.6) до тех пор, пока имеют место соотношения 1°–3°.

4. Алгоритм построения стабилизирующего управления. Случаи нарушения соотношений 1°– 3°. Соотношения 1°–3° могут нарушаться в результате того, что при некотором $\tau_1>\tau_0$ имеет место одна из ситуаций:

1) $t_1(\tau)\to 0$ при $\tau\to\tau_1-0$

2) $t_{j_0}(\tau)\to t_0,\quad t_{j_0+1}(\tau)\to t_0$ при $\tau\to\tau_1-0$

3) существует $t_0\,\overline{\in}\,\{t_j(\tau_1-0),\ \ j=\overline{1,p},\},\ \ \Delta_{\tau_1}(t_0)=0$

Предположим, что в момент τ_1 может реализоваться только одна из ситуаций 1–3 и на одном индексе.

Рассмотрим случай 1. Обозначим $s_j=t_{j+1}(\tau_1-0),\ j=\overline{1,\bar p},\ \bar p=p-1,\ \bar k=-k,$

$s^* = t^*(\tau_1 - 0)$, $\bar{\rho} = \rho(\tau_1 - 0)$. Если

$$\operatorname{rank}(\mathbf{F}(s^*, s_j)\mathbf{b},\ \ j = \overline{1, \bar{p}}) = n - 1 \tag{4.1}$$

то при $\tau \in T^+(\tau_1)$ определяющие элементы (3.1) и $u^*(\tau)$ находим из соотношений (3.5), (3.6), где знаки p, k заменены на $\bar{p}, \bar{k}$, и начальных условий

$$t_j(\tau_1 + 0) = s_j,\ \ j = \overline{1, \bar{p}};\ \ \rho(\tau_1 + 0) = \bar{\rho} \tag{4.2}$$

$$t^*(\tau_1 + 0) = s^*,\ \ \mathbf{y}(\tau_1 + 0) = \mathbf{y}(\tau_1 - 0)$$

Пусть условие (4.1) нарушается. В этом случае при $\tau \in T^+(\tau_1)$ имеем

$$t_j(\tau) = s_j - (\tau - \tau_1),\ \ j = \overline{1, \bar{p}}$$

$$\rho(\tau) = \bar{\rho},\ \ t^*(\tau) = s^* - (\tau - \tau_1) \tag{4.3}$$

Таким образом, для $\tau \in T^+(\tau_1)$ стабилизирующее управление $u^*(\tau)$ совпадает с программным оптимальным управлением $u(\tau - \tau_1 | \mathbf{z}^*(\tau_1)), \tau_1 \geqslant \tau$, задачи (2.1) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*(\tau_1)$

$$u^*(\tau) = u(\tau - \tau_1 | \mathbf{z}^*(\tau_1)),\ \ \tau \in T^+(\tau_1) \tag{4.4}$$

Стабилизатор на время "отключается". Вместо него в работу "включается" эстиматор, решающий при $\tau \in T^+(\tau_1)$ задачу

$$f_*(\tau) = \max_{y \in Y(\tau)} (\mathbf{y}'\mathbf{b}(-1)^{\bar{p}}\bar{k})$$

$$\mathbf{Y}(\tau) = \{\mathbf{y} \in R^n : \mathbf{y}'\mathbf{F}(s^*, \tau - \tau_1)\mathbf{z}^*(\tau) = \bar{\rho}$$

$$\mathbf{y}'\mathbf{F}(s^*, s_j)\mathbf{b} = 0,\ \ j = \overline{1, \bar{p}} \tag{4.5}$$

$$\mathbf{y}'\mathbf{F}(s^*, t)\mathbf{b}(-1)^j \bar{k} \leqslant 0,\ \ t \in [s_j, s_{j+1}],\ \ j = \overline{0, \bar{p}}\}$$

$$s_0 = \tau - \tau_1,\ \ s_{\bar{p}+1} = s^*$$

Можно показать, что задача (4.5) всегда имеет решение и, кроме того, $f_*(\tau_1) > -1$, $f_*(\tau) \leqslant 0$, $\tau \geqslant \tau_1$.

Обозначим через $y^*(\tau)$ оптимальный план задачи (4.5). Можно доказать, что

$$0 < \bar{\beta}(\tau) = \mathbf{y}'(\tau_1 - 0)\mathbf{F}(s^*, \tau - \tau_1)\mathbf{z}^*(\tau) \leqslant \bar{\rho},\ \ \tau \in [\tau_1, s^*[$$

Из последнего соотношения следует, что, если $f_*(\tau) > -1$, то вектор

$$\mathbf{y}(\tau) = \lambda(\tau)\mathbf{y}(\tau_1 - 0)\bar{\rho} / \bar{\beta}(\tau) + (1 - \lambda(\tau))\mathbf{y}^*(\tau)$$

где $0 \leqslant \lambda(\tau) = (1 + f_*(\tau)) / (\bar{\rho} / \bar{\beta}(\tau) + f_*(\tau)) \leqslant 1$, является вектором множителей Лагранжа в задаче (2.1) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*(\tau)$, и вдоль соответствующего ему решения сопряженной системы (2.2) и управления

$$u(t | z^*(\tau)) = (-1)^j \bar{\rho}\bar{k},\ \ t \in [t_j(\tau),\ t_{j+1}(\tau)[$$

$$j = \overline{0, \bar{p}};\ \ t_0(\tau) = 0,\ \ t_{\bar{p}+1}(\tau) = t^*(\tau)$$

выполняются необходимые условия оптимальности (2.3); $t_j(\tau)$ $(j = \overline{1, \bar{p}})$, $t^*(\tau)$ определены согласно (4.3)

Задача (4.5) представляет собой задачу линейного программирования с континуумом ограничений. Алгоритм ее решения в режиме реального времени аналогичен описанному ранее [8]. Работа алгоритма сводится к решению специальной системы нелинейных (определяющих) уравнений.

Действуем по правилам (4.3), (4.4) и решаем задачу (4.5) до тех пор, пока в некоторый момент $\tau_2 \geqslant \tau_1$ не реализуется одна из следующих ситуаций: а) $f_*(\tau_2) = 0$; б) $t_1(\tau_2) = s_1 - (\tau_2 - \tau_1) = 0$; в) $f_*(\tau_2) = -1$.

Рассмотрим случай *а*. Можно показать, что при $\tau \in [\tau_2, s^* + \tau_2]$ решение задачи (4.5) будет иметь вид $\mathbf{y}^*(\tau) = \mathbf{y}^*(\tau_2)\gamma(\tau), f_*(\tau) = 0,$ где $\gamma(\tau) = \overline{\rho} / \mathbf{y}'$ $(\tau_2)\mathbf{F}(s^*, \tau - -\tau_2)\mathbf{z}^*(\tau) > 1$. Следовательно, при $\tau > \tau_2$ нет необходимости решать задачу (4.5). При $\tau \in [\tau_2, s^* + \tau_2]$ стабилизирующее управление строится по правилу (4.4). При $\tau > s^* + \tau_2$ полагаем $u^*(\tau) \equiv 0, \tau > s^* + \tau_2$, поскольку, по построению, $\mathbf{z}^*(s^* + \tau_2) = \mathbf{0}$.

В случае *б* полагаем $\overline{s}_j = t_{j+1}(\tau_2),\ j = \overline{1, m},\ m = \overline{p} - 1, q = -\overline{k}, \overline{s}^* = t^*(\tau_2)$. Для $\tau \in T^+(\tau_2)$ действуем согласно правилам (4.3) – (4.5), где $s_j, j = \overline{1, \overline{p}}, \overline{k}, \tau_1$ заменены на $\overline{s}_j, j = \overline{1, m}, q, \tau_2$, до тех пор, пока при некотором $\tau_3 > \tau_2$ не реализуется одна из ситуаций типа а–в.

Рассмотрим случай *в*. Поскольку $f_*(\tau) > -1,\ \tau \in T^-(\tau_2), f_*(\tau_2) = -1$, то $df_*(\tau_2)/d\tau \leqslant 0$. Предположим, что $df_*(\tau_2) / d\tau < 0$.

Рассмотрим оптимальный план $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*(\tau_2)$ задачи (4.5). Обозначим

$$\{t_j, j = \overline{1, l}\} = \{t \in [\tau_2 - \tau_1, s^*] \setminus \{s_j, j = \overline{1, \overline{p}}\}:$$

$$\mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{F}(s^*, t)\mathbf{b} = 0\}$$

Согласно критерию оптимальности в задаче (4.5) [9], существуют такие числа $\overline{\mu}_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, l},\ \mu_j, j = \overline{1, \overline{p}}, \mu_0$, что

$$\sum_{j=1}^{l} \overline{\mu}_j \mathbf{F}(s^*, t_j)\mathbf{b}\gamma_j + \sum_{j=1}^{\overline{p}} \mu_j \mathbf{F}(s^*, s_j)\mathbf{b} + \mu_0 \mathbf{F}(s^*, \tau_2 - \tau_1)\mathbf{z}^*(\tau) = \mathbf{b}(-1)^{\overline{p}}\,\overline{k}$$

где $\gamma_j = (-1)^i \overline{k}$, если $t_j \in]s_i, s_{i+1}[$.

Предположим, что решение задачи (4.5) при $\tau = \tau_2$ невырожденное, т.е. $\overline{\mu}_j \neq 0,\ j = \overline{1, l},\ \operatorname{rank}(\mathbf{F}(s^*, t_j)\mathbf{b}, j = \overline{1, l}) = l$. Для упрощения дальнейших выкладок будем считать, что $(\tau_2 - \tau_1)\ \overline{\in}\ \{t_j, j = \overline{1, l}\}$.

В силу предположения (3.4) имеем

$$\mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{F}(s^*, s_j)\mathbf{A}\mathbf{b} \neq 0,\ j = \overline{1, \overline{p}},\ \ \mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{F}(s^*, t_j)\mathbf{A}^2\mathbf{b} \neq 0,\ j = \overline{1, l}$$

Положим $m = \overline{p} + 2l,\ \{\overline{s}_j, j = \overline{1, m}\} = \{s_j, j = \overline{1, \overline{p}},\ s_{1j} = t_j, s_{2j} = t_j, j = \overline{1, l}\}, \overline{s}_j \leqslant \overline{s}_{j+1}$, $j = \overline{1, m - 1}$; $q = \overline{k}$.

С учетом сделанных предположений можно показать, что при $\tau \in T^+(\tau_2)$ определяющие элементы (3.1) и стабилизирующее управление $u^*(\tau)$ находятся по правилам (3.5), (3.6), где p, k заменены на m, q, исходя из начальных условий:

$$t_j(\tau_2 + 0) = \overline{s}_j - (\tau_2 - \tau_1),\ \ j = \overline{1, m};\ \ \rho(\tau_2 + 0) = \overline{\rho}$$

$$t^*(\tau_2 + 0) = s^* - (\tau_2 - \tau_1),\ \ \mathbf{y}(\tau_2 + 0) = \mathbf{y}^*$$

Действуем по правилам (3.5), (3.6), пока не реализуется одна из ситуаций 1–3.

Рассмотрим ситуацию 2. Ясно, что $\dot{t}_{j_0+1}(\tau_1) - \dot{t}_{j_0}(\tau_1) \leqslant 0$. Предположим, что

$\dot{t}_{j_0+1}(\tau_1)-\dot{t}_{j_0}(\tau_1)<0$. Положим

$$s_j=t_j(\tau_1-0),\ j=\overline{1,j_0-1},\quad s_j=t_{j+2}(\tau_1+0),\quad j=\overline{j_0,\overline{p}},\quad \overline{p}=p-2$$

$$\overline{k}=k,\ s^*=t^*(\tau_1-0),\ \overline{\rho}=\rho(\tau_1-0)$$

Далее действуем по правилам случая 1.

Рассмотрим случай 3. Можно показать, что $t_0\neq 0$, $t_0\neq t^*(\tau_1)$. Следовательно, $t_0\in \operatorname{int} T(\tau_1)$. Пусть для определенности $t_0\in\ ]t_{j_*}(\tau_1),t_{j_*+1}(\tau_1)[$. Очевидно, что $d\mathbf{y}'(\tau_1)\mathbf{F}(t^*(\tau_1),t_0)\mathbf{b}(-1)^{j_*}k/d\tau\geqslant 0$. Будем полагать, что $d\mathbf{y}'(\tau_1)\mathbf{F}(t^*(\tau_1),$ $t_0)\mathbf{b}(-1)^{j_*}k/d\tau>0$.

Положим $s_j=t_j(\tau_1-0), j=\overline{1,j_*}, s_{j_*}=s_{j_*+1}=t_0$, $s_j=t_{j-2}(\tau_1-0)$, $j=\overline{j_*+2,\overline{p}}$; $\overline{p}=p+2$, $\overline{k}=k, \overline{\rho}=\rho(\tau_1-0)$, $s^*=t^*(\tau_1-0)$. Далее действуем по правилам случая 1. Заметим, что в данной ситуации соотношения (4.1) всегда будут иметь место.

Выше описан алгоритм построения функции $u^*(\tau)$, $\tau\geqslant 0$; в предположении, что при любом $\tau\geqslant 0$ решение задачи (2.1), $\mathbf{z}=\mathbf{z}^*(\tau)$, построенное по определяющим элементам (3.1), является единственным решением задачи (2.1). В этом случае функции $\rho(\tau)$, $t^*(\tau)$, $\tau\geqslant 0$, будут непрерывными.

В общем случае возможна ситуация, когда при некотором $\overline{\tau}$ в задаче (2.1) с $\mathbf{z}=\mathbf{z}^*(\overline{\tau})$ кроме решения

$$u(t|\mathbf{z}^*(\overline{\tau}))=\rho(-1)^jk,\quad t\in[t_j(\overline{\tau}),\ t_{j+1}(\overline{\tau})[$$
$$j=\overline{0,p},\quad t_0(\overline{\tau})=0,\quad t_{p+1}(\overline{\tau})=t^*(\overline{\tau}),\quad \rho(\overline{\tau})=\rho \tag{4.6}$$

соответствующего определяющим элементам, построенным по описанным выше правилам, появляется еще одно решение

$$u(t|\mathbf{z}^*(\overline{\tau}))=\rho^{(*)}(-1)^jk^{(*)},\quad t\in[t_j^{(*)}(\overline{\tau}),\ t_{j+1}^{(*)}(\overline{\tau})[$$
$$j=\overline{0,p^{(*)}};\quad t_0^{(*)}(\overline{\tau})=0,\quad t_{p^*+1}^{(*)}(\overline{\tau})=t^{(*)^*}(\overline{\tau}),\quad \rho^{(*)}(\overline{\tau})=\rho^{(*)} \tag{4.7}$$

с меньшим значением параметра $\rho^{(*)}$: $\rho^{(*)}<\rho$. (Можно показать, что другое решение со значением параметра $\rho^{(*)}>\rho$ возникнуть не может.)

В этом случае положим $s_j=t_j^{(*)}(\overline{\tau})$, $j=\overline{1,\overline{p}}$, $\overline{p}=p^{(*)}$, $s^*=t^{(*)^*}(\overline{\tau})$, $\overline{\rho}=\rho^{(*)}(\overline{\tau})$, $\overline{k}=k^{(*)}$. Далее действуем по правилам случая 1, заменяя τ_1 на $\overline{\tau}$. Заметим, что в точке $\tau=\overline{\tau}$ функции $t^*(\tau)$, $\rho(\tau)$ разрывны.

5. Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о стабилизации математического маятника в верхнем, неустойчивом положении равновесия моментом, приложенным к нему на оси подвеса. Этот момент вырабатывается исполнительным механизмом, который является интегрирующим звеном. Поведение исполнительного механизма, в свою очередь, регулируется некоторым управляющим воздействием u [4].

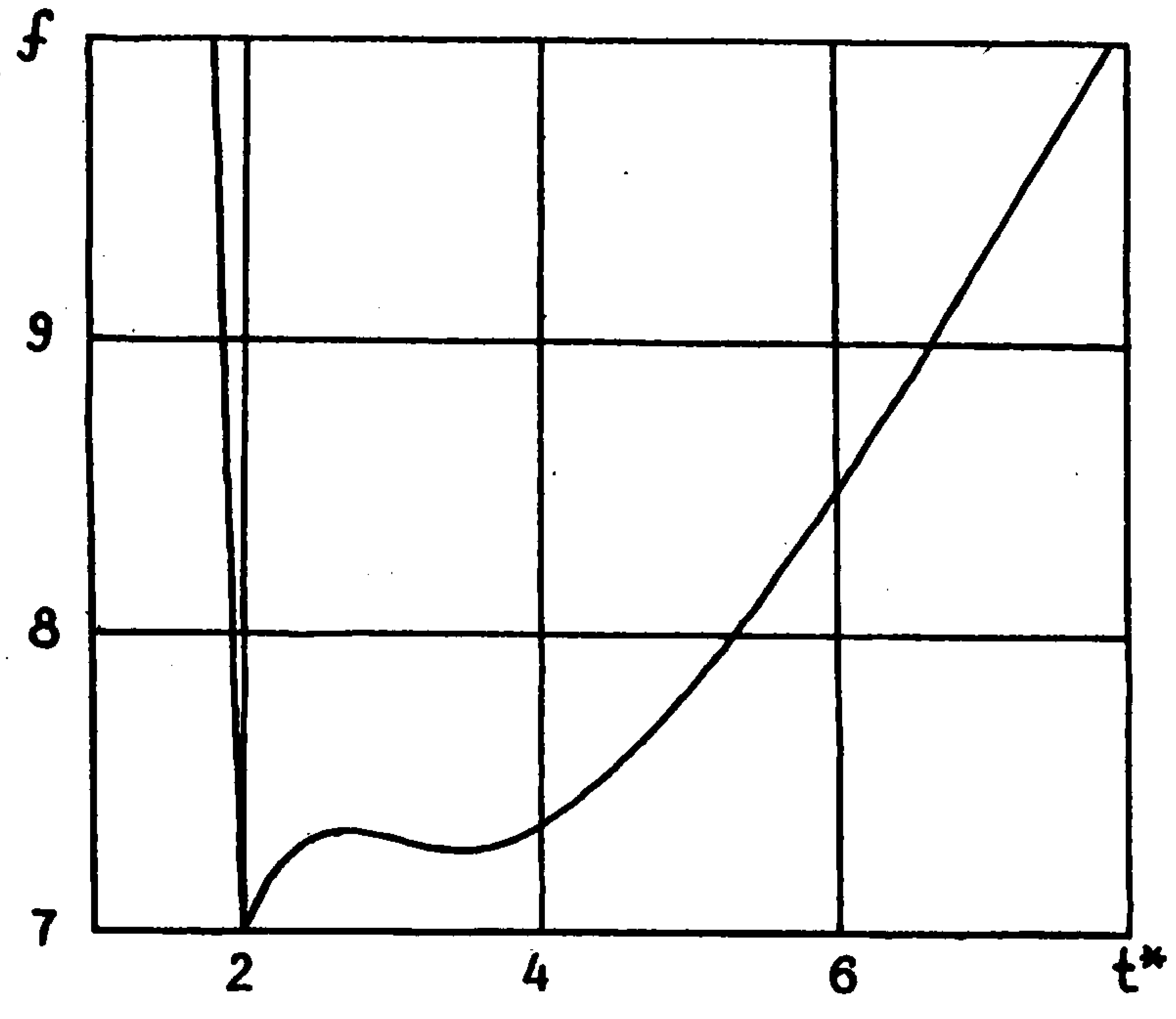
Уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=\sin x_1+x_3,\quad \dot{x}_3=u_2$$

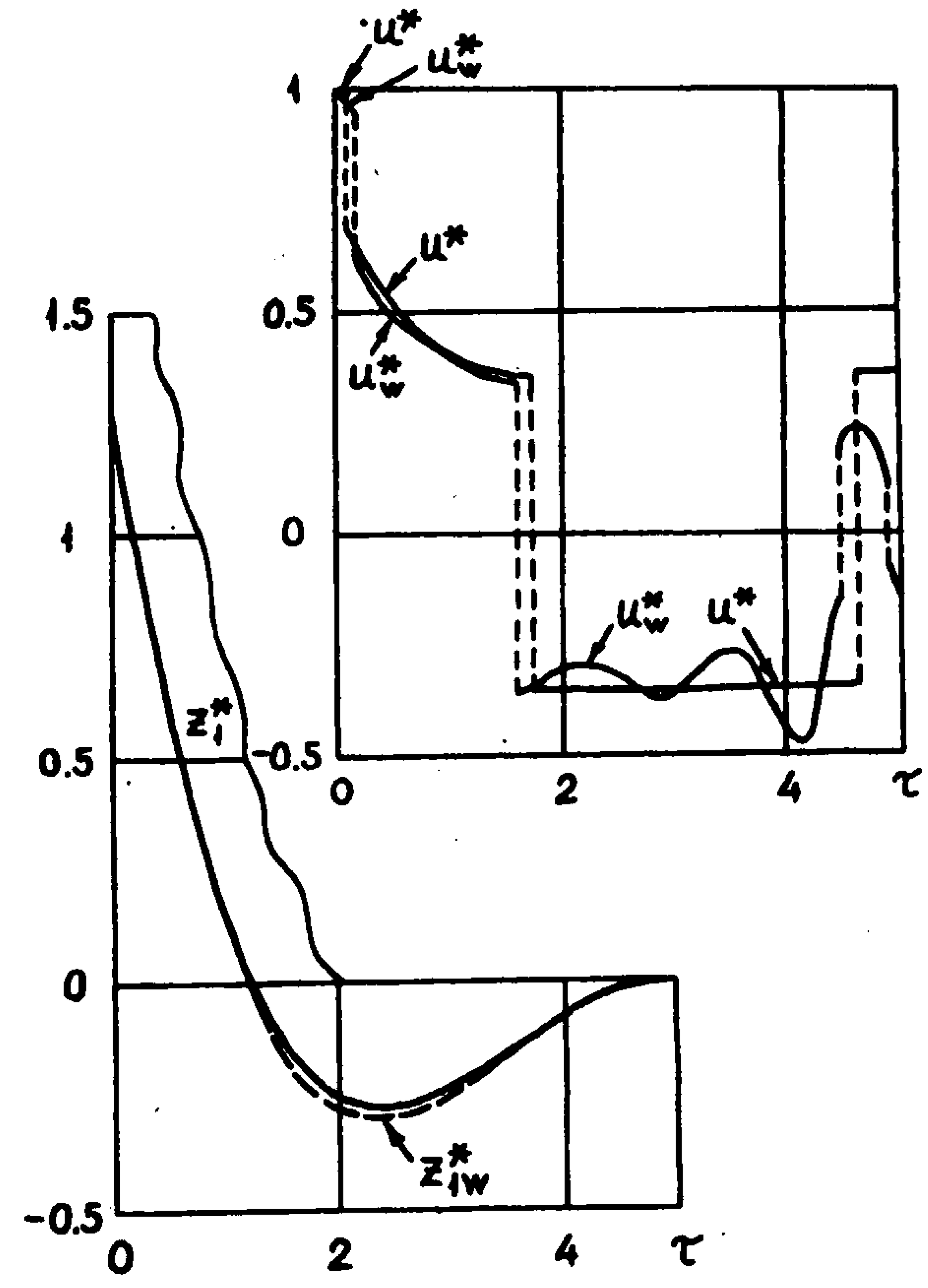
где $x_1=\varphi$ – угол отклонения маятника от вертикали; $x_2=\dot{\varphi}$, x_3 – момент, приложенный к маятнику.

Запишем уравнение первого приближения

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=x_1+x_3,\ \dot{x}_3=u \tag{5.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для стабилизации системы (5.1) при $\tau > 0$ решается задача

$$t^* + 5\rho \to \min,\ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = x_1 + x_3,\ \ \dot{x}_3 = u \tag{5.2}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}^*(\tau),\ \ x_1(t^*) = x_2(t^*) = x_3(t^*) = 0,\ \ |u(t)| \leqslant \rho,\ \ t \in [0, t^*]$$

где $\mathbf{z}^*(\tau) = (z_i^*(\tau),\ i = 1, 2, 3)$ – состояние системы (5.1) в момент τ, достигнутое под действием выработанного управления $u^*(t)$, $t \in [0, \tau[$. Управление $u^*(t)$ строится по правилам, описанным в разд. 3, 4.

В данном примере в качестве начального состояния было взято $\mathbf{z}^* = (1, 27; -1{,}67; 0.)$. Для $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}^*$ функция $f(t^*) = t^* + 5\rho(t^*)$ (1.3), (1.4) имеет два локальных минимума (фиг. 1): 1) в точке $t^*_{(1)} = 1{,}9947$ негладкий минимум с $\rho(t^*_{(1)}) = 1{,}0042$, $f(t^*_{(1)}) = 7{,}016$; 2) в точке $t^*_{(2)} = 3{,}294$ гладкий минимум с $\rho(t^*_{(2)}) = 0{,}782$, $f(t^*_{(2)}) = 7{,}204$. При $t^* = t^*_{(1)}$ оптимальное управление задачи (1.4) имеет одну точку переключения $t_{1(1)} = 0{,}9974$; при $t^* = t^*_{(2)}$ оптимальное управление задачи (1.4) имеет две точки переключения $t_{1(2)} = 1{,}264$, $t_{2(2)} = 2{,}912$. Поскольку $f(t^*_{(1)}) < f(t^*_{(2)})$, то решение задачи (5.2) при $\tau = 0$, $\mathbf{z}^*(0) = \mathbf{z}^*$ имеет вид

$$\begin{gathered} u(t|\mathbf{z}^*) = \rho(\mathbf{z}^*),\ \ t \in [0, t_1(\mathbf{z}^*)[\\ u(t|\mathbf{z}^*) = -\rho(\mathbf{z}^*),\ \ t \in [t_1(\mathbf{z}^*),\ t^*(\mathbf{z}^*)] \\ t^*(\mathbf{z}^*) = t_1^*,\ \ \rho(\mathbf{z}^*) = \rho(t^*_{(1)}),\ \ t_1(\mathbf{z}^*) = t_{1(1)} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Процесс стабилизации начинается с решения (5.3). При этом при $0 < \tau < 0{,}12$ для построения управления $u^*(\tau)$ используются правила (4.3), (4.4). В момент $\tau = \bar{\tau} = 0{,}12$ реализуется ситуация, описанная в конце разд. 4, когда при $\tau = \bar{\tau}$ задача (5.2) имеет два решения: 1) решение (4.6), где $p = 1$, $k = 1$, $t_1(\bar{\tau}) = t_{1(1)} - \bar{\tau}$, $t^*(\bar{\tau}) = t^*_{(1)} - \bar{\tau}$, $\rho = \rho(t^*_{(1)})$; 2) решение (4.7), где $p^{(*)} = 2$, $k^{(*)} = 1$, $t_1^{(*)}(\bar{\tau}) = 1{,}35 - \bar{\tau}$, $t_2^{(*)}(\bar{\tau}) = 3{,}18 - \bar{\tau}$, $t^{(*)*}(\bar{\tau}) = 3{,}62 - \bar{\tau}$, $\rho^{(*)} = 0{,}679$. Поскольку $\rho^{(*)} < \rho$, то согласно алгоритму полагаем

$$s_j = t_j^{(*)}(\bar{\tau}),\ j = 1, 2;\ \ s^* = t^{(*)*}(\bar{\tau}),\ \ \bar{\rho} = \rho^{(*)},\ \ \bar{k} = k^{(*)},\ \bar{p} = 2 \tag{5.4}$$

и действуем по правилам случая 1, считая $\tau_1 = \bar{\tau}$. Для параметров (5.4) имеет место (4.1). Следовательно, при $\tau \in T^+(\bar{\tau})$ управление $u^*(\tau)$ строится по правилам (3.5), (3.6), где p, k заменены на $\bar{p}, \bar{k}$ и начальных условий (4.2).

Правила (3.5), (3.6) используются до момента $\tau = \bar{\tau}_1 = 1{,}69$. В момент $\bar{\tau}_1$ имеем $t_1(\bar{\tau}_1) = 0$, $t_2(\bar{\tau}_1) = 4.62 - \bar{\tau}_1$, $t^*(\bar{\tau}_1) = 5{,}2 - \bar{\tau}_1$, т.е. реализуется ситуация 1. Для $s_1 = t_2(\bar{\tau}_1)$, $s^* = t^*(\bar{\tau}_1)$ и $p = 1$ соотношения (4.1) нарушаются, поэтому при $\tau \in T^+(\bar{\tau}_1)$ действуем по правилам (4.3) – (4.5). Поскольку $f_*(\bar{\tau}_1) = 0$, то при $\tau = \bar{\tau}_1$ имеет место случай *a*.

Согласно алгоритму, для $1{,}69 \leqslant \tau \leqslant 5{,}2$ стабилизирующее управление $u^*(\tau)$ строится по правилу (4.4). При $\tau > 5{,}2$ полагаем $u^*(\tau) = 0$, ибо $x^*(5{,}2) = 0$. Стабилизация завершена.

Рассмотрим процесс стабилизации системы (1.5) при постоянно действующих неизвестных возмущениях $w(t)$, $t \geqslant 0$, под влиянием которых система (5.1) принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 + w(t),\ \dot{x}_3 = u \tag{5.5}$$

Для стабилизации (5.5) при $\tau > 0$ решается задача

$$t^* + 5\rho \to min,\ \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_1 + x_3,\ \dot{x}_3 = u$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}_w^*(\tau),\ x_1(t^*) = x_2(t^*) = x_3(t^*) = 0,\ |u(t)| \leqslant \rho,\ t \in [0, t^*]$$

где $\mathbf{z}_w^*(\tau) = (z_{wi}^*(\tau),\ i = 1,2,3)$ – состояние системы (5.5) в момент τ, достигнутое под действием выработанного управления $u_w^*(t)$, $t \in [0, \tau[$, и возмущения $w(t)$, $t \in [0, \tau[$. Управление $u_w^*(t)$ строится по правилам, аналогичным описанным в разд. 3, 4 и [7]. В примере в качестве возмущения было взято $w(t) = 0.1\cos 5t$, $t \geqslant 0$.

На фиг. 2 при $0 \leqslant \tau \leqslant 5$ представлено поведение $z_1^*(\tau)$ под действием выработанного управления $u^*(\tau)$ (сплошная кривая) и поведение $\mathbf{z}_{w1}^*(\tau)$, под действием выработанного управления $u_w^*(\tau)$ и возмущения $w(\tau) = 0{,}1\cos 5\tau$ (штриховая кривая), а также $u^*(\tau)$ и $u_w^*(\tau)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (MW300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанс М., Фалб П.Л.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
2. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 4–№ 6. С. 436–441; с. 561–568, с. 661–665; 1961. Т. 22. № 4. С. 425–435; 1962. Т. 23. № 11. С. 1405–1413.
3. *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления // Тр. 1-го Конгр. ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961, Т. 2. С. 521–547.
4. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
5. *Mayne D.Q., Michalska H.* Receding horizon control of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1990. V. 35. № 7. P. 814–824.
6. *Kwon W.H., Pearson A.E.* A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system // IEEE Trans. Automat. Control. 1977. V. 22. № 5. P. 838–842.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.Т.* К методам стабилизации динамических систем// Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 67–77.
8. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Оптимальное позиционное наблюдение за линейными системами. // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 4. С. 461–464.
9. *Костюкова О.И.* Супербазисные планы линейной экстремальной задачи с континуумом ограничений. // Докл. АН БССР. 1989. Т. 33. № 8. С. 687–689.

Минск

Поступила в редакцию
16.VIII.1995